

## الموضوع

## التمرين الأول (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط  $A(1,1,-1)$  و  $B(0,1,-2)$

و  $C(3,2,1)$  والفلكة  $(S)$  التي معادلتها :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$

(1) بين أن مركز الفلكة  $(S)$  هو النقطة  $\Omega(1,0,1)$  وأن شعاعها هو  $\sqrt{3}$  0.5

(2) بين أن  $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} - \vec{k}$  وتحقق من أن  $x - z - 2 = 0$  هي معادلة ديكارثية للمستوى  $(ABC)$  0.75

ب- تحقق من أن  $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$  ثم بين أن المستوى  $(ABC)$  يقطع الفلكة  $(S)$  وفق دائرة  $(\Gamma)$  شعاعها 1

(3) ليكن  $(\Delta)$  المستقيم المار من النقطة  $\Omega$  والعمودي على المستوى  $(ABC)$

أ- بين أن  $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$  تمثيل بارامتري للمستقيم  $(\Delta)$  0.25

ب- بين أن مثلث إحداثيات  $H$  نقطة تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  والمستوى  $(ABC)$  هو  $(2,0,0)$  0.25

ج- استنتج مركز الدائرة  $(\Gamma)$  0.25

## التمرين الثاني (3 ن)

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $z^2 - 12z + 61 = 0$  0.75

(2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي

الحاقها على التوالي هي  $a$  و  $b$  و  $c$  بحيث :  $a = 6 - 5i$  و  $b = 4 - 2i$  و  $c = 2 + i$

أ- احسب  $\frac{a-c}{b-c}$  واستنتج أن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  مستقيمة . 0.5

ب- نعتبر الإزاحة  $T$  ذات المتجهة  $\vec{u}$  حيث لحق  $\vec{u}$  هو  $1 + 5i$  0.5

تحقق من أن لحق النقطة  $D$  صورة النقطة  $C$  بالإزاحة  $T$  هو  $d = 3 + 6i$

ج- بين أن :  $\frac{d-c}{b-c} = -1 + i$  وأن  $\frac{3\pi}{4}$  عمدة للعدد العقدي  $-1 + i$  0.75

د- استنتج قياسا للزاوية الموجهة  $(\overline{CB}, \overline{CD})$  0.5

## التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي كيس على ثماني بیدقات : بیدقة واحدة تحمل العدد 0 وخمس بیدقات تحمل العدد 1 وبیدقتان تحملان العدد 2 (لا يمكن التمييز بين البیدقات باللمس).

تسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث بیدقات من الكيس .

(1) ليكن  $A$  الحدث : " الحصول على ثلاث بیدقات تحمل أعدادا مختلفة مثلى مثلى " 1

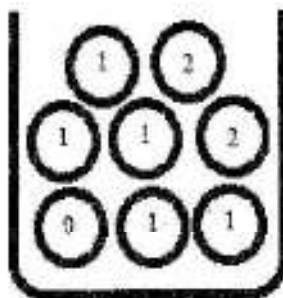
بين أن :  $P(A) = \frac{5}{28}$

(2) ليكن  $B$  الحدث : " مجموع الأعداد التي تحملها البیدقات المسحوبة يساوي 5 " 1

بين أن :  $P(B) = \frac{5}{56}$

(3) ليكن  $C$  الحدث : " مجموع الأعداد التي تحملها البیدقات المسحوبة يساوي 4 " 1

بين أن :  $P(C) = \frac{3}{8}$



## التمرين الرابع (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي :  $u_0 = 11$  و  $u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

(1) 0.25 تحقق من أن :  $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

(2) 0.5 أ- بين بالترجع أن :  $u_n < 12$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية قطعا .

ج- استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة .

(3) 0.25 لتكن  $(v_n)$  المتتالية العددية بحيث :  $v_n = u_n - 12$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

أ- باستعمال السؤال (1) بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{10}{11}$  ثم اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$

ب- بين أن :  $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ثم احسب نهاية المتتالية  $(u_n)$

## التمرين الخامس (8 ن)

(I) لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$

(1) 0.75 بين أن  $x^2 - 1$  و  $2x^2 \ln x$  لهما نفس الإشارة على المجال  $]0, 1[$

ثم استنتج أن  $g(x) \leq 0$  لكل  $x$  من المجال  $]0, 1[$

(2) 0.75 بين أن  $x^2 - 1$  و  $2x^2 \ln x$  لهما نفس الإشارة على المجال  $]1, +\infty[$

ثم استنتج أن  $g(x) \geq 0$  لكل  $x$  من المجال  $]1, +\infty[$

(II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $f(x) = (x^2 - 1) \ln x$

وليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد منظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة  $3\text{cm}$ ) .

(1) 0.5 أ- بين أن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  وأول هذه النتيجة هندسيا .

ب- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  (يمكنك كتابة  $\frac{f(x)}{x}$  على الشكل  $\left(\frac{x^2-1}{x}\right) \ln x$ )

واستنتج أن المنحنى  $(C)$  يقبل فرعاً شلجيميا بجوار  $+\infty$  يتم تحديده اتجاهه .

(2) 1.25 أ- بين أن  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  وأول هندسيا النتيجة  $f'(1) = 0$

ب- استنتج أن الدالة  $f$  تناقصية على المجال  $]0, 1[$  و تزايدية على المجال  $]1, +\infty[$

ج- أعط جدول تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0, +\infty[$  ثم بين أن  $f(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$

(3) 1 أنشئ المنحنى  $(C)$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(4) 0.5 أ- بين أن  $u: x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto x^2 - 1$  على  $\mathbb{R}$

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :  $\int_1^2 (x^2 - 1) \ln x \, dx = \frac{2}{9}(1 + 3 \ln 2)$

ج- احسب بـ  $\text{cm}^2$  مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى  $(C)$  ومحور الأضراسيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x=1$  و  $x=2$





التمرين الأول: (3 ن)

1) لنبين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة  $\Omega(1,0,1)$  و أن شعاعها  $r = \sqrt{3}$  **0,25 + 0,25**لدينا معادلة ديكارتية للفلكة (S)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$ ومنه (S):  $x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 2z - 1 = 0$  إذن (S):  $(x-1)^2 - 1 + (y-0)^2 + (z-1)^2 - 1 - 1 = 0$ أي (S):  $(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = (\sqrt{3})^2$  إذن (S):  $(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 3$ المعادلة المختصرة للفلكة (S) و بالتالي مركز الفلكة (S) هي النقطة  $\Omega(1,0,1)$  و شعاعها يساوي  $r = \sqrt{3}$ 2) أ- < لنبين أن  $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} - \vec{k}$  **0,5**لدينا:  $C(3,2,1)$  ;  $B(0,1,-2)$  ;  $A(1,1,-1)$ لدينا:  $\overline{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$  ومنه:  $\overline{AB}(0 - 1, 1 - 1, -2 + 1)$  إذن:  $\overline{AB}(-1, 0, -1)$ و  $\overline{AC}(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$  ومنه:  $\overline{AC}(3 - 1, 2 - 1, 1 + 1)$  إذن:  $\overline{AC}(2, 1, 2)$ 

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ إذن:}$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (0+1)\vec{i} - (-2+2)\vec{j} + (-1-0)\vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

و بالتالي:  $\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{i} - \vec{k}$ < نستنتج أن  $x - z - 2 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC): **0,25**طريقة 1: لدينا  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}(1,0,-1)$  متجهة منظمية على المستوى (ABC)إذن:  $(ABC): 1x + 0y - 1z + d = 0$  معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)و بما أن  $A \in (ABC)$  فإن مثلث إحداثياتها يحقق المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC).

$$A(1,1,-1) \in (ABC) \Leftrightarrow 1 - (-1) + d = 0 \text{ إذن } 2 + d = 0 \text{ أي } d = -2$$

وبالتالي  $x - z - 2 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).طريقة 2: لدينا  $\vec{n} = \overline{AB} \wedge \overline{AC}(1,0,-1)$  متجهة منظمية على المستوى (ABC)

$$M(x,y,z) \in (ABC) : \vec{n} \cdot \overline{AM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = 0 \text{ إذن:}$$

$$M(x,y,z) \in (ABC) \Leftrightarrow 1(x-1) + 0(y-1) - 1(z+1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 - z - 1 = 0$$

و بالتالي:  $x - z - 2 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ب- لنتحقق من أن  $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$  ثم لنبين أن المستوى  $(ABC)$  يقطع الفلكة  $(S)$  وفق دائرة  $(\Gamma)$  شعاعها  $r=1$ :

لدينا  $x-z-2=0$  هي معادلة ديكرتية للمستوى  $(ABC)$  و  $\Omega(1,0,1)$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1 \times 1 + 0 - 1 \times 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|1 + 0 - 1 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ ومنه } d(\Omega, (ABC)) = \frac{|ax_{\Omega} + by_{\Omega} + cz_{\Omega} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

إذن  $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$  و  $r = \sqrt{3}$  وبما أن  $d(\Omega, (ABC)) < r$  فإن المستوى  $(ABC)$  يقطع الفلكة  $(S)$  وفق

$$\text{دائرة } (\Gamma) \text{ شعاعها } r = 1 \text{ . } R = \sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = 1$$

3) أ- لنبين أن  $(\Delta)$  تمثيل بارامتري للمستقيم  $(\Delta)$  المار من  $\Omega$  والعمودي على المستوى  $(ABC)$ :

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

بما أن المستقيم  $(\Delta)$  عمودي على المستوى  $(ABC)$  فإن  $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} - \vec{k}$  المتجهة المنظمة على  $(ABC)$  هي

متجهة موجهة للمستقيم  $(\Delta)$  و  $\Omega \in (\Delta)$

$$\begin{cases} x-1=t \\ y-0=0 \\ z-1=-t \end{cases} \text{ إذن } M(x,y,z) \in (\Delta) \text{ تكافئ أن } \begin{cases} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{cases} = t \vec{AB} \wedge \vec{AC} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ و بالتالي: } M \in (\Delta) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \overline{\Omega M}$$

$$\text{تمثيل بارامتري للمستقيم } (\Delta) \text{ . } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{cases} \text{ إذن } (t \in \mathbb{R})$$

ب- لنبين أن مثلث إحداثيات  $H$  نقطة تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  و المستوى  $(ABC)$  هو  $(2;0;0)$  : 0,25

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \\ 1+t-1+t-2=0 \end{cases} \text{ ومنه } (t \in \mathbb{R}) \text{ لنحل تحليليا النظمة: } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \\ x - z - 2 = 0 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \\ 2t = 2 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \\ 2t - 2 = 0 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} x = 1+1=2 \\ y = 0 \\ z = 1-1=0 \\ t = 1 \end{cases}$$

و بالتالي مثلث إحداثيات  $H$  نقطة تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  و المستوى  $(ABC)$  هو  $(2;0;0)$ .

ج- لنستنتج مركز الدائرة  $(\Gamma)$  : 0,25

☆  $H(2;0;0)$  نقطة تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  و المستوى  $(ABC)$  هي المسقط العمودي للنقطة  $\Omega$  مركز الفلكة  $(S)$

و بما أن الفلكة  $(S)$  تقطع المستوى  $(ABC)$  وفق دائرة فإن  $H(2;0;0)$  هي مركز الدائرة  $(\Gamma)$  .



شعبة العلوم التجريبية بمسالكها و شعبة العلوم والتكنولوجيا بمسلكها

المعامل: 7

مادة الرياضيات مدة الانجاز: 3 ساعات

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

التمرين الثاني: (3 ن)

1) لنحل في  $\mathbb{C}$  مجموعة الأعداد العقدية المعادلة:  $z^2 - 12z + 61 = 0$ لدينا:  $a=1; b=-12; c=61$  و  $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 61 = 144 - 244 = -100$  **0,25**بما أن  $\Delta \neq 0$  فإن المعادلة تقبل حلين مترافقين

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{12 - 10i}{2 \times 1} = \frac{2(6 - 5i)}{2} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{12 + 10i}{2 \times 1} = \frac{2(6 + 5i)}{2}$$

و بالتالي:  $z_1 = 6 + 5i$  و  $z_2 = 6 - 5i$  إذن:  $S = \{6 + 5i, 6 - 5i\}$  **0,25 + 0,25**2) أ- لنحسب  $\frac{a-c}{b-c}$  و لنستنتج أن النقط A و B و C مستقيمية: **0,25 + 0,25**لدينا  $\frac{a-c}{b-c} = \frac{6-5i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{4-6i}{2-3i} = \frac{2(2-3i)}{2-3i} = 2$  و بما أن  $\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$  فإن النقط A و B و C مستقيمية.ب- لنتحقق من أن لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T ذات المتجهة  $\vec{u}(1+5i)$  هو  $d = 3+6i$ :

$$\text{لدينا } T(C) = D \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \vec{u} \Leftrightarrow d - c = 1 + 5i \Leftrightarrow d = 1 + 5i + c = 1 + 5i + 2 + i = 3 + 6i$$

و بالتالي لحق النقطة D صورة النقطة C بالإزاحة T ذات المتجهة  $\vec{u}(1+5i)$  هو  $d = 3+6i$ . **0,25 + 0,25**ج-  $\leftarrow$  لنبين أن:  $\frac{d-c}{b-c} = -1+i$  **0,5**

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{1+5i}{2-3i} = \frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+10i-15}{2^2+3^2} = \frac{-13+13i}{13} = \frac{13(-1+i)}{13} \quad \text{طريقة 1:}$$

$$\text{و منه } \frac{d-c}{b-c} = -1+i$$

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{3+6i-2-i}{4-2i-2-i} = \frac{1+5i}{2-3i} = \frac{(1+5i)(-1+i)}{(2-3i)(-1+i)} = \frac{(1+5i)(-1+i)}{-2+2i+3i+3} = \frac{(1+5i)(-1+i)}{1+5i} = -1+i \quad \text{طريقة 2:}$$

 $\leftarrow$  لنبين أن  $\frac{3\pi}{4}$  عمدة للعدد العقدي  $-1+i$  : **0,25**

$$\star \text{ لدينا } \frac{d-c}{b-c} = -1+i \text{ ومنه } \left| \frac{d-c}{b-c} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{و } \sin(\arg(-1+i)) = \frac{\text{Im}(-1+i)}{|-1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \cos(\arg(-1+i)) = \frac{\text{Re}(-1+i)}{|-1+i|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

 $\leftarrow$  إذن  $\arg(-1+i) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$  و بالتالي  $\frac{3\pi}{4}$  عمدة للعدد العقدي  $-1+i$ .
د- لنستنتج قياسا للزاوية الموجهة  $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD})$  : **0,25 + 0,25**

$$\left( \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD} \right) = \frac{3\pi}{4} [2\pi] \quad \text{و} \quad \left( \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD} \right) = \arg\left(\frac{d-c}{b-c}\right) = \arg(-1+i)$$



شعبة العلوم التجريبية بمسالكها و شعبة العلوم والتكنولوجيا بمسلكيها

المعامل: 7

مادة الرياضيات مدة الانجاز: 3 ساعات

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

التمرين الثالث: (3 ن)

2 2 1 1 1 1 1 0
-----------------

نسحب عشوائيا تانيا ثلاث بیدقات من كيس يضم ثمان بیدقات

$$(1) \text{ لنبين أن } p(A) = \frac{5}{28}$$

A: " نحصل على ثلاث بیدقات تحمل أرقاما مختلفة مثتى مثتى " :  $\{0;1;2\}$ 

0,5 + 0,5

$$p(A) = \frac{5}{28} \text{ و بالتالي } p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_1^1 \times C_5^1 \times C_2^1}{C_8^3} = \frac{1 \times 5 \times 2}{56} = \frac{10}{56}$$

$$(2) \text{ لنبين أن } p(B) = \frac{5}{56}$$

B: " نحصل على ثلاث بیدقات تحمل أرقاما مجموعها يساوي 5 " :  $\{1;2;2\}$ 

0,5 + 0,5

$$p(B) = \frac{5}{56} \text{ و بالتالي } p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_2^2}{C_8^3} = \frac{5 \times 1}{56}$$

$$(3) \text{ لنبين أن } p(C) = \frac{3}{8}$$

C: " نحصل على ثلاث بیدقات تحمل أرقاما مجموعها يساوي 4 " :  $\{1;1;2\}$  أو  $\{0;2;2\}$ 

0,5 + 0,5

$$p(C) = \frac{3}{8} \text{ و بالتالي } p(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_1^1 \times C_2^2 + C_5^2 \times C_2^1}{C_8^3} = \frac{1 + 10 \times 2}{56} = \frac{21}{56}$$

التمرين الرابع: (3 ن)

(1) نتحقق من أن:  $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  **0,25**

لدينا  $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$  وبالتالي  $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} - 12 = \frac{10u_n + 12 - 132}{11} = \frac{10u_n - 120}{11}$

(2) أ- لنبين بالترجع أن:  $u_n < 12$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  **0,5**

☆ نتحقق من أن  $u_0 < 12$ : لدينا  $u_0 = 11 < 12$  إذن  $u_0 < 12$  ①

☆ نفترض أن  $u_n < 12$  و نبين أن  $u_{n+1} < 12$ :

لدينا حسب فرضية الترجع  $u_n < 12$  ومنه  $u_n - 12 < 0$  و  $\frac{10}{11} > 0$  إذن  $\frac{10}{11}(u_n - 12) < 0$

أي  $u_{n+1} - 12 < 0$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ② من ① و ② نستنتج أن  $u_n < 12$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ .

ب- لنبين أن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية قطعاً  $n$ : **0,5**

لدينا  $u_{n+1} - u_n = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11} - u_n = \frac{10u_n + 12 - 11u_n}{11} = \frac{1}{11}(12 - u_n)$

لدينا  $u_n < 12$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ومنه  $0 < 12 - u_n$  و  $11 > 0$  إذن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ :  $\frac{1}{11}(12 - u_n) > 0$

أي  $u_{n+1} - u_n > 0$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  وبالتالي  $(u_n)$  تزايدية قطعاً  $n$ .

ج- نستنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة: **0,25**

لدينا مما سبق أن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية قطعاً  $n$  ومكبورة بالعدد 12 إذن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

(3) أ- لنبين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{10}{11}$ : **0,25**

لدينا  $v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12) = \frac{10}{11}v_n$  و  $v_n = u_n - 12$  إذن  $v_{n+1} = \frac{10}{11}v_n$  وبالتالي المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{10}{11}$ .

لنكتب  $v_n$  بدلالة  $n$ :

لدينا  $v_0 = u_0 - 12 = 11 - 12 = -1$  و  $v_n = v_0 \times q^n = -1 \times \left(\frac{10}{11}\right)^n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ . **0,25**

ب- ☆ لنبين أن  $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ : **0,25**

لدينا  $v_n = u_n - 12$  ومنه  $u_n = v_n + 12$  و  $v_n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

إذن  $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ .

☆ لنحسب نهاية المتتالية  $(u_n)$ :

لدينا  $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$  و  $-1 < \frac{10}{11} < 1$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{10}{11}\right)^n = 0$  إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12$  **0,25**



شعبة العلوم التجريبية بمسالكها و شعبة العلوم والتكنولوجيا بمسلكيها

المعامل: 7

مادة الرياضيات مدة الانجاز: 3 ساعات

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

التمرين الخامس: (8 ن)

- I-1)  $\curvearrowright$  لنبين أن:  $x^2 - 1$  و  $2x^2 \ln(x)$  لهما نفس الإشارة على المجال  $]0; 1[$ : **0,25 + 0,25**
- لدينا  $0 < x < 1$  و منه  $0 < x^2 < 1$  إذن  $-1 < x^2 - 1 < 0$  و بالتالي إشارة  $x^2 - 1$  سالبة على المجال  $]0; 1[$ . ①
- وإشارة  $2x^2 \ln(x)$  هي إشارة  $\ln(x)$  لأن لكل  $x$  من  $]0; 1[$ :  $2x^2 > 0$  و  $\ln(x) < 0$  على المجال  $]0; 1[$  و بالتالي إشارة  $2x^2 \ln(x)$  سالبة على المجال  $]0; 1[$ . ②
- إذن  $x^2 - 1$  و  $2x^2 \ln(x)$  لهما نفس الإشارة على المجال  $]0; 1[$ .

- $\curvearrowright$  لنستنتج أن  $g(x) \leq 0$  لكل  $x$  من  $]0; 1[$ : **0,25**
- من ① و ② نستنتج أن إشارة  $x^2 - 1 + 2x^2 \ln(x)$  سالبة على المجال  $]0; 1[$  أي  $g$  سالبة على المجال  $]0; 1[$  (لأن مجموع دالتين سالبتين  $x \mapsto x^2 - 1$  و  $x \mapsto 2x^2 \ln(x)$  هي دالة سالبة) و  $g(1) = 0$
- إذن نستنتج أن  $g(x) \leq 0$  لكل  $x$  من  $]0; 1[$ .

- 2)  $\curvearrowright$  لنبين أن:  $x^2 - 1$  و  $2x^2 \ln(x)$  لهما نفس الإشارة على المجال  $]1; +\infty[$ : **0,25 + 0,25**
- لدينا  $x > 1$  و منه  $x^2 > 1$  إذن  $x^2 - 1 > 0$  و بالتالي إشارة  $x^2 - 1$  موجبة على المجال  $]1; +\infty[$ . ③
- وإشارة  $2x^2 \ln(x)$  هي إشارة  $\ln(x)$  لأن لكل  $x$  من  $]1; +\infty[$ :  $2x^2 > 0$  و  $\ln(x) > 0$  على المجال  $]1; +\infty[$  و بالتالي إشارة  $2x^2 \ln(x)$  موجبة على المجال  $]1; +\infty[$ . ④
- إذن  $x^2 - 1$  و  $2x^2 \ln(x)$  لهما نفس الإشارة على المجال  $]1; +\infty[$ .

- $\curvearrowright$  لنستنتج أن  $g(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $]1; +\infty[$ : **0,25**
- من ③ و ④ نستنتج أن إشارة  $x^2 - 1 + 2x^2 \ln(x)$  موجبة على المجال  $]1; +\infty[$  أي  $g$  موجبة على المجال  $]1; +\infty[$  (لأن مجموع دالتين موجبتين  $x \mapsto x^2 - 1$  و  $x \mapsto 2x^2 \ln(x)$  هي دالة موجبة) و  $g(1) = 0$
- إذن نستنتج أن  $g(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $]1; +\infty[$ .



(1II) أ- لنبين أن:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$  ولنؤول النتيجة مبيانيا:  $0,25 + 0,25$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) = -1$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1)\ln(x) = (-1) \times (-\infty) = +\infty$  وبالتالي  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

و منه نستنتج أن (C) منحنى الدالة  $f$  يقبل مقاربا عموديا معادلته  $x = 0$ .

ب- لنحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  :  $0,25$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1)\ln(x) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$

وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب- لنبين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  و لنستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيا بجوار  $+\infty$  :  $0,25 + 0,5$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)\ln(x) = +\infty$

وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  ومنه نستنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور الأرتيب بجوار  $+\infty$  (2) - أ

لنبين أن  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  : 1

لدينا لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  :  $f(x) = (x^2 - 1)\ln(x)$

ومنه  $f'(x) = (x^2 - 1)' \ln(x) + (x^2 - 1)(\ln(x))' = 2x\ln(x) + (x^2 - 1)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 - 1 + 2x^2\ln(x)}{x}$

و  $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2\ln(x)$  وبالتالي  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$ .

لنؤول هندسيا النتيجة  $f'(1) = 0$  :  $0,25$

لدينا  $f'(1) = 0$  و منه يقبل المنحنى (C) مماسا أفقيا في النقطة  $A(1, 0)$

ب- لنستنتج أن الدالة  $f$  تناقصية على المجال  $]0, 1[$  و تزايدية على المجال  $[1, +\infty[$  :  $0,25 + 0,25$

لدينا  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  إذن إشارة  $f'(x)$  هي نفس إشارة  $g(x)$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  :

☆ إذا كان  $x \in ]0, 1[$  فإن  $g(x) \leq 0$  أي  $f'(x) \leq 0$  و بالتالي  $f$  تناقصية على المجال  $]0, 1[$ .

☆ إذا كان  $x \in [1, +\infty[$  فإن  $g(x) \geq 0$  أي  $f'(x) \geq 0$  و بالتالي  $f$  تزايدية على المجال  $[1, +\infty[$ .

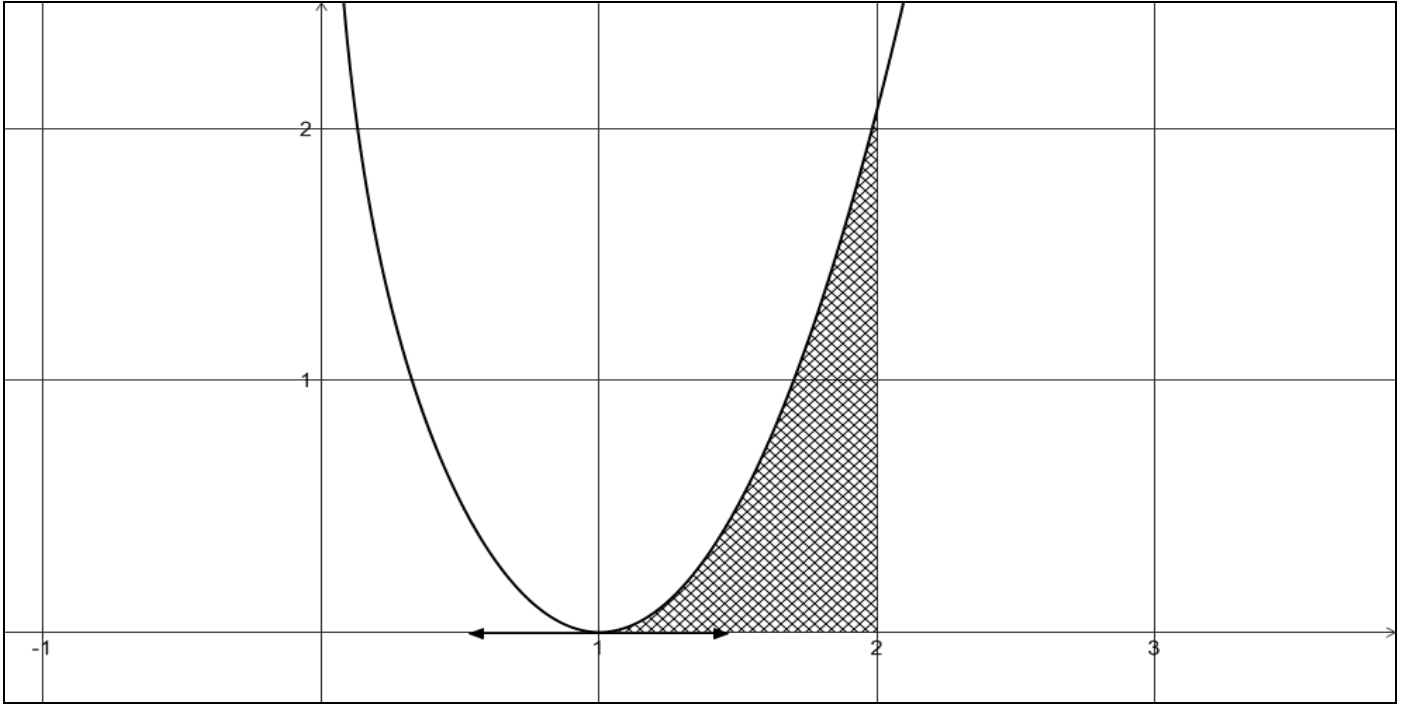
ج- لننجز جدول تغيرات الدالة  $f$  :  $0,25$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

لنبين أن  $f(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$  :  $0,25$

لدينا 0 قيمة دنيا مطلقة للدالة  $f$  عند  $x = 1$  إذن  $f(x) \geq 0$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$ .

(3) لنشئ (C) منحنى الدالة  $f: 1$



(4) أ- لنبين أن  $u: x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto x^2 - 1$  على  $\mathbb{R}$  :  $0, 5$

لدينا  $x \mapsto x^3 - 1$  دالة متصلة على  $\mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية و  $u'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)' = \frac{3x^2}{3} - 1 = x^2 - 1$   $\forall x \in \mathbb{R}$  ;

إذن  $u: x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto x^2 - 1$  على  $\mathbb{R}$ .

ب- لنبين باستعمال الكاملة بالأجزاء أن:  $\int_1^2 (x^2 - 1) \ln(x) dx = \frac{2}{9}(1 + 3\ln(2))$   $1$

$$\begin{cases} u(x) = \frac{x^3}{3} - x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} u'(x) = x^2 - 1 \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$$

$$\int_1^2 (x^2 - 1) \ln(x) dx = \left[ \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \left( \frac{1}{x} \right) dx = \left[ \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \left( \frac{1}{3}x^2 - 1 \right) dx$$

$$\int_1^2 (x^2 - 1) \ln(x) dx = \left[ \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \ln(x) \right]_1^2 - \left[ \frac{x^3}{9} - x \right]_1^2 = \left( \frac{8}{3} - 2 \right) \ln(2) - \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \ln(1) - \left( \frac{8}{9} - 2 - \frac{1}{9} + 1 \right)$$

$$\int_1^2 (x^2 - 1) \ln(x) dx = \frac{2}{9}(1 + 3\ln(2)) \text{ و بالتالي } \int_1^2 (x^2 - 1) \ln(x) dx = \frac{2\ln(2)}{3} - 0 + \frac{2}{9}$$

ج- لنحسب ب  $cm^2$  مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين

$$1u.a = 9cm^2 : x=2 \text{ و } x=1 \text{ معادلتهما } 0,25$$

$$S = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^2 - 1) \ln(x) dx = \frac{2}{9}(1 + 3\ln(2)) \times 9 \text{ لدينا و بالتالي } S = 2(1 + 3\ln(2)) cm^2$$