



**EXERCICE1** : (7.75 points)**Partie I**

0.5 1- a) Montrer que :  $\forall t \in [0, +\infty[ ; \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{(1+t)^2} \right)$

0.5 b) En déduire que :  $\forall x \in [0, +\infty[ ; \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{x^2 + 2x}{1+x} \right)$

2- Soit  $g$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

0.5 Montrer que :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - 1}{x} = \frac{-1}{2}$

**Partie II**

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in ]0, +\infty[ ; f(x) = g(x)e^{-x}$$

On note  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0.5 1- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 2- a) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0

0.25 b) Vérifier que :  $\forall x \in ]0, +\infty[ ; \frac{f(x) - 1}{x} = \left( \frac{e^{-x} - 1}{x} \right) g(x) + \left( \frac{g(x) - 1}{x} \right)$

0.5 c) En déduire que  $f$  est dérivable à droite en 0 et déterminer  $f'_d(0)$

3- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  puis que :

0.75  $\forall x \in ]0, +\infty[ ; f'(x) = \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}$

0.5 4- a) Montrer que :  $\forall x \in ]0, +\infty[ ; -\frac{3}{2} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$

0.25 b) En déduire que :  $\forall x \in ]0, +\infty[ ; -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$

0.25 5- a) Dresser le tableau de variations de  $f$

0.75 b) Construire la courbe  $(C)$  en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. (On prendra  $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ )

**Partie III**

0.5 1- Montrer que l'équation d'inconnue  $x : f(x) = 3x$ , admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0, +\infty[$

2- Soient  $\beta \in \mathbb{R}^+$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par :

$$u_0 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = \frac{1}{3} f(u_n)$$

- 0.5 a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n \geq 0$
- 0.5 b) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; |u_{n+1} - \alpha|, \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
- 0.5 c) Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; |u_n - \alpha|, \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$
- 0.25 d) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$

**EXERCICE2 :** (2.25 points)

On considère la fonction numérique :  $x \mapsto e^x$  et soit  $(\Gamma)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $k \in \{0; 1; \dots; n\}$ , on note  $M_k$  le point de la courbe  $(\Gamma)$  de coordonnées  $\left(\frac{k}{n}; e^{\frac{k}{n}}\right)$

0.5 1- a) Montrer que :  $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\} \exists c_k \in \left] \frac{k}{n}; \frac{k+1}{n} \right[$  tel que :  $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} e^{c_k}$

0.25 b) Montrer que :  $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\} ; M_k M_{k+1} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$   
( $M_k M_{k+1}$  désigne la distance de  $M_k$  à  $M_{k+1}$ )

0.5 c) En déduire que :  $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\} ; \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}, M_k M_{k+1}, \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2- Soit  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite numérique définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$

0.5 a) Vérifier que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}, S_n, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$

0.5 b) En déduire que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx$

**EXERCICE3 :** (3.5 points)

On considère le nombre complexe :  $u = 1 + (2 - \sqrt{3})i$

0.5 1- a) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes :  $1 - i$  et  $1 + \sqrt{3}i$

0.25 b) Montrer que :  $\frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$

0.25 c) En déduire que :  $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

0.5 d) Montrer que :  $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$

2- On considère les deux suites numériques  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) ; \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2 - \sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2 - \sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$$

0.5 a) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n + iy_n = u^n$

0.5 b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $x_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$  et  $y_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$

3- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $A_n$  le point d'affixe  $u^n$

0.5 a) Déterminer les entiers  $n$  pour lesquels les points  $O$ ,  $A_0$  et  $A_n$  sont alignés.

0.5 b) Montrer que pour tout entier  $n$ , le triangle  $OA_nA_{n+1}$  est rectangle en  $A_n$

#### **EXERCICE4** : (3 points)

Soit  $p$  un nombre premier impair. On considère dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $(E) : x^2 \equiv 2 \pmod{p}$

0.25 1- a) Montrer que :  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

0.25 b) En déduire que :  $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$  ou  $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$

(On remarque que :  $(2^{\frac{p-1}{2}} - 1)(2^{\frac{p-1}{2}} + 1) = 2^{p-1} - 1$ )

2- Soit  $x$  une solution de l'équation  $(E)$

0.5 a) Montrer que  $p$  et  $x$  sont premiers entre eux.

0.5 b) En déduire que :  $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$  (On pourra utiliser le théorème de Fermat)

0.25 3- Montrer que pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ ,  $p$  divise  $C_p^k$

(On rappelle que :  $(\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\}) \quad C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$  et que :  $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$ )

0.25 4-a) En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

$$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p \frac{\pi}{4}\right) + i 2^{\frac{p}{2}} \sin\left(p \frac{\pi}{4}\right)$$

( $i$  étant le nombre complexe tel que :  $i^2 = -1$ )

0.5 b) On admet que :  $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$

Montrer que :  $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p \frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$  et  $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p \frac{\pi}{4}\right) \equiv 1 \pmod{p}$  (on pourra utiliser la question 3-)

0.5 5- En déduire que si  $p \equiv 5 \pmod{8}$  alors l'équation  $(E)$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{Z}$

**EXERCICES** : (3.5 points)

On rappelle que  $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$  est un anneau non commutatif de zéro la matrice  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et d'unité la matrice  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , et que  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble  $E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

**Partie I :**

- 0.5 1- Montrer que  $E$  est un sous-groupe de  $(M_2(\mathbb{R}), +)$
- 0.25 2- Montrer que  $E$  est un sous- espace vectoriel de  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$
- 0.25 3- a) Vérifier que :  $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$  ;  $M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' + 3yy', xy' + yx')$
- 0.5 b) En déduire que  $(E, +, \times)$  est un anneau commutatif et unitaire.
- 0.25 4- a) Vérifier que :  $M(\sqrt{3}, 1) \times M(-\sqrt{3}, 1) = O$
- 0.25 b) En déduire que  $(E, +, \times)$  n'est pas un corps.

**Partie II :**

Soient  $F = \{x + y\sqrt{3} / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$  et  $G = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

- 0.25 1- Montrer que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  ;  $x + y\sqrt{3} = 0$  si et seulement si  $(x = 0$  et  $y = 0)$
- 0.25 2- Montrer que  $F - \{0\}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}^*, \times)$
- 3- Soit  $\varphi$  l'application définie de  $F - \{0\}$  vers  $E$  par :
- $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} ; \varphi(x + y\sqrt{3}) = M(x, y)$$
- 0.25 a) Vérifier que :  $\varphi(F - \{0\}) = G - \{O\}$
- 0.25 b) Montrer que  $\varphi$  est un homomorphisme de  $(F - \{0\}, \times)$  vers  $(E, \times)$
- 0.25 c) En déduire que  $(G - \{O\}, \times)$  est un groupe commutatif.
- 0.25 4- Montrer que  $(G, +, \times)$  est un corps commutatif.

**FIN**



EXERCICE2		Éléments de réponses	Barème
1)	a)	Application du théorème des accroissements finis.	0.5
	b)	Calcul de la distance $M_k M_{k+1}$	0.25
	c)	Double inégalité.	0.25x2
2)	a)	Double inégalité.	0.25x2
	b)	Déduction de $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .	0.5

EXERCICE3		Éléments de réponses	Barème
1-	a)	La forme exponentielle de $1 - i$ .....	0.25
		La forme exponentielle de $1 + \sqrt{3}i$ .....	0.25
	b)	Démonstration de l'égalité : $e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}}$	0.25
	c)	Déduction de l'égalité : $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$	0.25
2-	d)	Démonstration de l'égalité : $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$	0.5
	a)	Démonstration par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n + iy_n = u^n$	0.5
3-	b)	Déduction des expressions de $x_n$ et $y_n$	0.25x2
	a)	Détermination des entiers $n$ pour lesquels les points $O$ , $A_0$ et $A_n$ sont alignés.	0.5
	b)	Démonstration que pour tout entier $n$ , le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en $A_n$	0.5

EXERCICE4		Éléments de réponses	Barème
1-	a)	Démonstration de $2^{p-1} \equiv 1 [p]$	0.25
	b)	Déduction de : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]$ .	0.25
2-	a)	Démonstration que $p$ et $x$ sont premiers entre eux.	0.5
	b)	Déduction de : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$	0.5
3-		Démonstration de $p$ divise $C_p^k$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$	0.25
4-	a)	Démonstration de l'égalité en utilisant la formule de Moivre.	0.25
	b)	Démonstration de : $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p \frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$ et $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p \frac{\pi}{4}\right) \equiv 1 [p]$	0.25x2
5-		Déduction	0.5

EXERCICE5		Éléments de réponses	Barème	
I	1-	Démonstration que $E$ est un sous-groupe de $(M_2(\square), +)$	0.5	
	2-	Démonstration que $E$ est un sous- espace vectoriel de $(M_2(\square), +, \cdot)$	0.25	
	3-	a)	Vérification de l'égalité.	0.25
		b)	Déduction que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.	0.5
	4-	a)	Vérification de l'égalité.	0.25
		b)	Déduction que $(E, +, \times)$ n'est pas un corps.	0.25
II	1-	Démonstration de l'équivalence.	0.25	
	2-	Démonstration que $F - \{0\}$ est un sous-groupe de $(\square^*, \times)$	0.25	
	3-	a)	Vérification de l'égalité.	0.25
		b)	Démonstration que $\varphi$ est un homomorphisme de $(F - \{0\}, \times)$ vers $(E, \times)$	0.25
		c)	Déduction que $(G - \{O\}, \times)$ est un groupe commutatif.	0.25
	4-	Démonstration que $(G, +, \times)$ est un corps commutatif.	0.25	