

التمرين 1: (7.75 نقطة)

الجزء I

1- (أ) بين أن: $\forall t \in [0, +\infty[; \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right)$ 0.5

(ب) استنتج أن: $\forall x \in [0, +\infty[; \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$ 0.5

2- لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي:

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

بين أن: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - 1}{x} = \frac{-1}{2}$ 0.5

الجزء II

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي:

$$\forall x \in]0, +\infty[; f(x) = g(x)e^{-x} \text{ و } f(0) = 1$$

و ليكن (C) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

2- (أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0 0.25

(ب) تحقق أن: $\forall x \in]0, +\infty[; \frac{f(x) - 1}{x} = \left(\frac{e^{-x} - 1}{x}\right)g(x) + \left(\frac{g(x) - 1}{x}\right)$ 0.25

(ج) استنتج أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و حدد $f'_d(0)$ 0.5

3- بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ثم أن: 0.75

$$\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}$$

4- (أ) بين أن: $-\frac{3}{2} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$ 0.5

(ب) استنتج أن: $-\frac{3}{2} < f'(x) < 0$ 0.25

5- (أ) اعط جدول تغيرات الدالة f 0.25

(ب) أنشئ المنحنى (C) مبرزا نصف المماس على اليمين في النقطة ذات الأفصول 0 0.75

(نأخذ $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$)

III الجزء

1- بين أن المعادلة ذات المجهول x : $f(x) = 3x$ ، تقبل حلا وحيدا α في $]0, +\infty[$ 0.5

2- ليكن $\beta \in \mathbb{R}^+$ و $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = \frac{1}{3} f(u_n) \quad \text{و} \quad u_0 = \beta$$

(أ) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq 0$ 0.5

(ب) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}; |u_{n+1} - \alpha|, \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ 0.5

(ج) بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}; |u_n - \alpha|, \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$ 0.5

(د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تؤول إلى α 0.25

التمرين 2: (2.25 نقطة)

نعتبر الدالة العددية: $x \mapsto e^x$ و ليكن (Γ) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$ و لكل $k \in \{0; 1; \dots; n\}$ ، نشير بالرمز M_k إلى نقطة المنحنى (Γ) ذات الإحداثيات

$$\left(\frac{k}{n}; e^{\frac{k}{n}} \right)$$

1- (أ) بين أن: $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\} \exists c_k \in \left] \frac{k}{n}; \frac{k+1}{n} \right[: e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} e^{c_k}$ 0.5

(ب) بين أن: $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}; M_k M_{k+1} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$ 0.25

(M_{k+1} هي المسافة من M_k إلى M_{k+1})

(ج) استنتج أن: $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}; \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}, M_k M_{k+1}, \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$ 0.5

2- لتكن $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$ 0.5

(أ) تحقق أن: $\forall n \in \mathbb{N}^*; \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}, S_n, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$ 0.5

(ب) استنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx$ 0.5

التمرين 3: (3.5 نقطة)

نعتبر العدد العقدي: $u = 1 + (2 - \sqrt{3})i$

1- (أ) اكتب على الشكل الأسّي الأعداد العقدية: $1 - i$ و $1 + \sqrt{3}i$ 0.5

(ب) بين أن: $\frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$ 0.25

ج) استنتج أن: $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$ 0.25

د) بين أن: $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$ 0.5

2- نعتبر المتتاليتين العدديتين $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2 - \sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2 - \sqrt{3})x_n + y_n \end{cases} \quad \text{و} \quad y_0 = 0, \quad x_0 = 1$$

أ) بين بالترجع أن لكل $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n + iy_n = u^n$ 0.5

ب) استنتج أن لكل $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$ و $y_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$ 0.5

3- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

لكل عدد صحيح طبيعي n ، نشير بالرمز A_n إلى النقطة ذات اللق u^n

أ) حدد الأعداد الصحيحة n التي تكون من أجلها النقط O و A_0 و A_n مستقيمة. 0.5

ب) بين أن لكل عدد صحيح n ، المثلث OA_nA_{n+1} قائم الزاوية في A_n 0.5

التمرين 4: (3 نقط)

ليكن p عددا أوليا فرديا. نعتبر في \mathbb{Z} المعادلة: $(E) : x^2 \equiv 2 \pmod{p}$

1- أ) بين أن: $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 0.25

ب) استنتج أن: $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ أو $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ 0.25

(نلاحظ أن: $(2^{\frac{p-1}{2}} - 1)(2^{\frac{p-1}{2}} + 1) = 2^{p-1} - 1$)

2- ليكن x حلا للمعادلة (E)

أ) بين أن p و x أوليان فيما بينهما. 0.5

ب) استنتج أن: $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ (يمكن استعمال ميرهنة فيرما Fermat) 0.5

3- بين أن لكل $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ ، p يقسم C_p^k 0.25

(نذكر أن لكل $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$: $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ و $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$)

4- أ) باستعمال صيغة موافر (Moivre)، بين أن: 0.25

$$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}} \sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$$

(i هو العدد العقدي بحيث: $i^2 = -1$)

$$(1+i)^p = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$$

0.5

بين أن: $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p \frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Q}$ و $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p \frac{\pi}{4}\right) \equiv 1 [p]$ (يمكن استعمال السؤال 3-)

5- استنتج أنه إذا كان $p \equiv 5 [8]$ فإن المعادلة (E) لا تقبل حلا في \mathbb{Q}

0.5

التمرين 5: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{Q}), +, \times)$ حلقة غير تبادلية صفرها المصفوفة $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و وحدتها المصفوفة

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ و أن } (M_2(\mathbb{Q}), +, \cdot) \text{ فضاء متجهي حقيقي.}$$

$$E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$$

الجزء I:

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{Q}), +)$ 0.5

2- بين أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{Q}), +, \cdot)$ 0.25

3- أ) تحقق أن: $M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' + 3yy', xy' + yx')$; $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{Q}^4$ 0.25

ب) استنتج أن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية و واحدة. 0.5

4- أ) تحقق أن: $M(\sqrt{3}, 1) \times M(-\sqrt{3}, 1) = O$ 0.25

ب) استنتج أن $(E, +, \times)$ ليس جسما. 0.25

الجزء II:

$$G = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \right\} \text{ و } F = \{x + y\sqrt{3} / (x, y) \in \mathbb{Q}^2\}$$

1- بين أن: $(x=0 \text{ و } y=0)$ يكافئ $x + y\sqrt{3} = 0$; $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2$ 0.25

2- بين أن $F - \{0\}$ زمرة جزئية للزمرة (\mathbb{Q}^*, \times) 0.25

3- ليكن φ التطبيق المعرف من $F - \{0\}$ نحو E بما يلي:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2 - \{(0, 0)\}; \varphi(x + y\sqrt{3}) = M(x, y)$$

أ) تحقق أن: $\varphi(F - \{0\}) = G - \{O\}$ 0.25

ب) بين أن φ تشاكل من $(F - \{0\}, \times)$ نحو (E, \times) 0.25

ج) استنتج أن $(G - \{O\}, \times)$ زمرة تبادلية. 0.25

4- بين أن $(G, +, \times)$ جسم تبادلي. 0.25

انتهى

سلم التقييط	عناصر الإجابة	التمرين 2	
0.5	تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية.	(أ)	-1
0.25	حساب المسافة $M_k M_{k+1}$	(ب)	
0.25x2	البرهنة على المتفاوتة المزدوجة.	(ج)	
0.25x2	البرهنة على المتفاوتة المزدوجة.	(أ)	-2
0.5	استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$	(ب)	

سلم التقييط	عناصر الإجابة	التمرين 3	
0.25	الشكل الأسّي للعدد $1-i$	(أ)	-1
0.25	الشكل الأسّي للعدد $1+\sqrt{3}i$		
0.25	البرهنة على المتساوية: $e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}}$	(ب)	-2
0.25	استنتاج المتساوية: $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$	(ج)	
0.5	البرهنة على المتساوية: $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$	(د)	
0.5	البرهان بالترجع على أن: $\forall n \in \mathbb{N}, x_n + iy_n = u^n$	(أ)	
0.25x2	استنتاج تعبير x_n و y_n	(ب)	-3
0.5	تحديد الأعداد الصحيحة n التي تكون من أجلها النقط O و A_0 و A_n مستقيمة.	(أ)	
0.5	البرهنة على أن لكل عدد صحيح n ، المثلث $OA_n A_{n+1}$ قائم الزاوية في A_n	(ب)	

سلم التقييط	عناصر الإجابة	التمرين 4	
0.25	البرهنة على أن: $2^{p-1} \equiv 1 [p]$	(أ)	-1
0.25	استنتاج: $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ أو $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]$	(ب)	
0.5	البرهنة على أن p و x أوليان فيما بينهما.	(أ)	-2
0.5	استنتاج: $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$	(ب)	
0.25	البرهنة على أن p يقسم C_p^k لكل $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$		-3
0.25	البرهنة على المتساوية باستعمال صيغة موافر (Moivre)	(أ)	-4
0.25x2	البرهنة على أن: $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$ و $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1 [p]$	(ب)	
0.5	استنتاج.		

سلم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين 5	
0.5	البرهنة على أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}), +)$	-1	I
0.25	البرهنة على أن E فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$	-2	
0.25	التحقق من المتساوية.	(أ) -3	
0.5	استنتاج أن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية وواحدية.	(ب)	
0.25	التحقق من المتساوية.	(أ) -4	
0.25	استنتاج أن $(E, +, \times)$ ليس جسما.	(ب)	
0.25	البرهنة على التكافؤ.	-1	
0.25	البرهنة على أن $F - \{0\}$ زمرة جزئية للزمرة (\mathbb{R}^*, \times)	-2	
0.25	التحقق من المتساوية.	(أ) -3	
0.25	البرهنة على أن φ تشاكل من $(F - \{0\}, \times)$ نحو (E, \times)	(ب)	
0.25	استنتاج أن $(G - \{0\}, \times)$ زمرة تبادلية.	(ج)	
0.25	البرهنة على أن $(G, +, \times)$ جسم تبادلي.	-4	