





### Exercice n° 1:(5pts)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par :  $u_0 = 5$  et  $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n - 1$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

0.5 1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$

1 2.a. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_n > -\frac{5}{3}$

0.75 2.b. Vérifier que  $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{5}\left(u_n + \frac{5}{3}\right)$ , puis en déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante.

0.5 2.c. Dire pourquoi la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

3. On pose pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $v_n = u_n + \frac{5}{3}$

0.5 3.a. Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{5}$

0.25 3.b. Calculer  $v_0$

0.5 3.c. Donner l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$

0.5 3.d. En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_n = \frac{20}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{5}{3}$

0.5 3.e. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### Exercice n° 2 :(3pts)

Une urne contient trois boules vertes numérotées 1 ; 2 ; 3 , trois boules rouges numérotées 1 ; 2 ; 3 et trois boules blanches numérotées 1 ; 2 ; 2 (Les neufs boules sont indiscernables au toucher).

On tire simultanément au hasard trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

$A$  : « Les trois boules tirées portent le même numéro »

$B$  : « Les trois boules tirées sont de couleurs deux à deux différentes »

0.75 1. Montrer que  $p(A) = \frac{5}{84}$

0.75 2. Calculer  $p(B)$

0.75 3. Montrer que  $p(A \cap B) = \frac{1}{28}$

0.75 4. En déduire  $p(A \cup B)$

### Exercice n° 3 :(8pts)

Soit  $h$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D = ]0; e[ \cup ]e; +\infty[$  par :

$$h(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$$

2 1.a. En remarquant que pour tout  $x \neq 1$ ,  $h(x) = \frac{1 + \frac{1}{\ln x}}{1 - \frac{1}{\ln x}}$ , montrer que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = 1$  et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$$



2 1.b. Montrer que  $\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} h(x) = -\infty$  et que  $\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} h(x) = +\infty$

1 2.a. Montrer que pour tout  $x$  de  $D$  :  $h'(x) = \frac{-2}{x(\ln x - 1)^2}$

1.25 2.b. Calculer  $h\left(\frac{1}{e}\right)$  et donner le signe de  $h'(x)$ , puis dresser le tableau de variations de  $h$

2.c. Déterminer, à l'aide du tableau de variations :

1 i. l'ensemble des solutions de l'inéquation :  $h(x) \leq 0$

0.75 ii. l'image de l'intervalle  $]0; e[$  par la fonction  $h$

### Exercice n°4:(4pts)

On considère les fonctions numériques  $f$  et  $g$  de la variable réelle  $x$  définies respectivement sur  $\mathbb{R}$  et sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  et  $g(x) = \ln x$

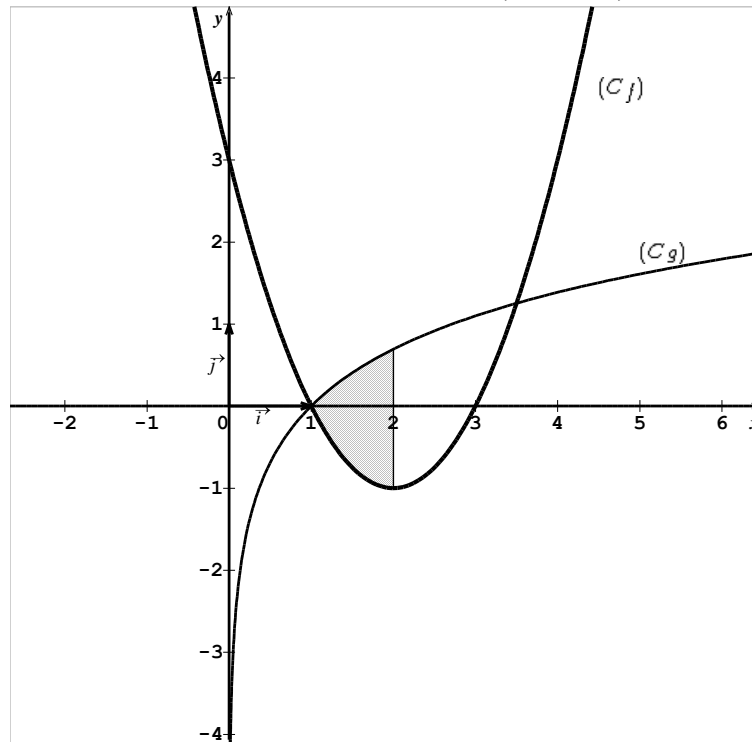
0.75 1. Calculer  $g(1)$ ,  $f(1)$  et  $f(3)$

2. Ci-dessous,  $(C_f)$  et  $(C_g)$  sont les courbes représentatives respectives de  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 2.a. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que  $\int_1^2 \ln x dx = 2\ln 2 - 1$

1.25 2.b. Calculer  $\int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx$

1 2.c. En déduire que l'aire de la partie hachurée est égale à  $\left(2\ln 2 - \frac{1}{3}\right) u.a$







2	Donner la formule correcte	0.25	0.75	Accepter toute méthode correcte
	$p(B) = \frac{9}{28}$	0.5		
3	Donner la formule correcte	0.5	0.75	
	Prouver que $p(A \cap B) = \frac{1}{28}$	0.25		
4	Donner la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$	0.5	0.75	
	$p(A \cup B) = \frac{29}{84}$	0.25		

### Exercice n°3 :(8pts)

Question	Détails d'éléments de réponses et barème	Notes partielles	Total	Observations
1.a	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = 1$	1	2	
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$	1		
1.b	$\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x < e}} h(x) = -\infty$	1	2	
	$\lim_{\substack{x \rightarrow e \\ x > e}} h(x) = +\infty$	1		
2.a	$h'(x) = \frac{-2}{x(\ln x - 1)^2}$	1	1	
2.b	$h\left(\frac{1}{e}\right) = 0$	0.25	1.25	
	Le signe de $h'(x)$	0.5		
	Tableau de variations	0.5		
2.c	i $S = \left[\frac{1}{e}; e\right[$	1	1	
	ii $h(]0; e]) = ]-\infty; 1[$	0.75	0.75	

### Exercice n°4 :(4pts)

Question	Détails d'éléments de réponses et barème	Notes partielles	Total	Observations
1	$g(1) = f(1) = f(3) = 0$	0.25x3	0.75	
2.a	$\int_1^2 \ln x dx = 2 \ln 2 - 1$	1	1	
2.b	$\int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx = -\frac{2}{3}$	1.25.	1.25.	
2.c	L'aire : $\left(2 \ln 2 - \frac{1}{3}\right) u.a$	1	1	On acceptera le résultat même sans unité d'aire