



**Exercice 1 (3 points) :**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 4$  et  $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{1 + u_n}$ , pour tout entier naturel  $n$

0.25 1) a) Vérifier que  $u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1 + u_n}$ , pour tout entier naturel  $n$

0.5 b) Montrer par récurrence que  $2 \leq u_n \leq 4$ , pour tout entier naturel  $n$

0.25 2) a) Montrer que  $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$ , pour tout entier naturel  $n$

0.5 b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et en déduire que  $(u_n)$  est convergente.

3) Soit  $(v_n)$  la suite numérique définie par  $v_n = \frac{2 - u_n}{1 - u_n}$ , pour tout entier naturel  $n$

0.5 a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$

0.5 b) Montrer que  $u_n = 1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$ , pour tout entier naturel  $n$

0.5 c) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$

**Exercice 2 (3 points) :**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les deux points  $A(-1, 0, -1)$  et  $B(1, 2, -1)$ , le plan  $(P)$  passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}(2, -2, 1)$  et la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(2, -1, 0)$  et de rayon 5

0.25 1) Montrer que  $2x - 2y + z + 3 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(P)$

0.25 2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère  $(S)$

0.5 3) a) Vérifier que la distance du point  $\Omega$  au plan  $(P)$  est  $d(\Omega, (P)) = 3$

0.5 b) En déduire que le plan  $(P)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(\Gamma)$  de rayon à déterminer.

0.5 4) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par  $\Omega$  et perpendiculaire au plan  $(P)$

0.5 b) Montrer que le point  $H(0, 1, -1)$  est le centre du cercle  $(\Gamma)$

0.5 c) Montrer que la droite  $(\Delta)$  est une médiatrice du segment  $[AB]$

**Exercice 3 (4 points) :**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points

$A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a = \sqrt{3}(1-i)$  et  $b = 2 + \sqrt{3} + i$

0.5 1) Vérifier que  $|a| = \sqrt{6}$  et que  $\arg(a) \equiv \frac{-\pi}{4} [2\pi]$

0.75 2) a) Montrer que  $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$  puis vérifier que  $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$

0.75 b) En déduire une forme trigonométrique du complexe  $b$  puis vérifier que  $b^{24}$  est un nombre réel.

3) Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ , qui transforme chaque point  $M$  du plan d'affixe  $z$

en un point  $M'$  d'affixe  $z'$ . On pose  $R(B) = B'$ ,  $R(A) = A'$  et  $R(A') = A''$

0.5 a) Vérifier que  $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z$  et que  $\arg(a') \equiv \frac{-\pi}{12} [2\pi]$  où  $a'$  est l'affixe du point  $A'$

0.5 b) Montrer que l'affixe du point  $A''$  est  $a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$  et en déduire que les points  $O$ ,  $A''$  et  $B$  sont alignés.

0.5 c) Montrer que  $b'$ , l'affixe du point  $B'$ , vérifie  $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$

0.5 d) En déduire que le triangle  $OAB'$  est rectangle en  $O$

**Exercice 4 (2 points) :**

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

0.5 1) Montrer que  $p(A) = \frac{1}{3}$ , où  $A$  est l'évènement « les deux boules tirées portent le même numéro »

0.5 2) Montrer que  $p(B) = \frac{5}{21}$ , où  $B$  est l'évènement « La somme des numéros des boules tirées est 4 »

0.5 3) Calculer  $p(A \cap B)$

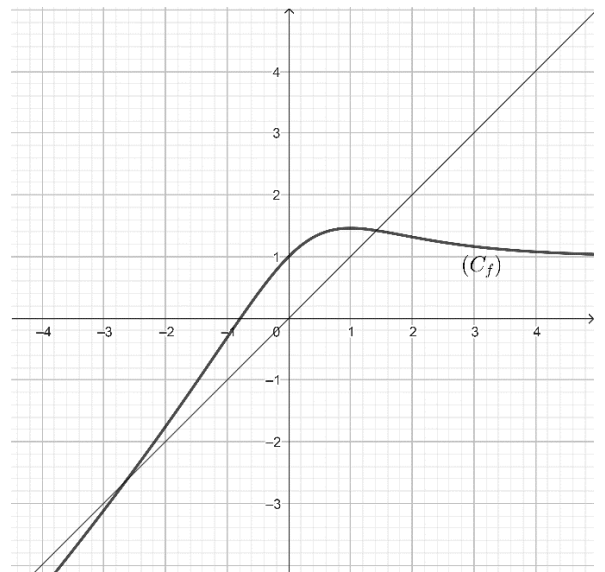
0.5 4) Les évènements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ? Justifier.

**Problème (8 points) :****Partie I :** On considère les deux fonctions  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $u(x) = e^x$  et  $v(x) = x$ 

- 0.5 1) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes  $(C_u)$  et  $(C_v)$  des fonctions  $u$  et  $v$
- 0.25 2) Justifier graphiquement que  $e^x - x > 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$
- 0.5 3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $(C_u)$ , la courbe  $(C_v)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$

**Partie II :** On considère la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$ .

- 0.25 1) a) Vérifier que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$
- 0.5 b) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$
- 0.5 c) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , puis interpréter géométriquement ce résultat.
- 0.25 2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 0.5 b) Vérifier que pour tout  $x < 0$ ,  $f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$
- 0.75 c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis déduire que la courbe  $(C_f)$  admet une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = x$  au voisinage de  $-\infty$
- 0.5 3) a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$
- 0.5 b) Etudier le signe de la fonction dérivée de  $f$ , puis déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$
- 0.75 c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans l'intervalle  $]-1, 0[$
- 4) La courbe  $(C_f)$  ci-contre est la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé.
- 0.5 a) Justifier graphiquement que l'équation  $f(x) = x$  admet deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$ .
- 0.5 b) Montrer que :  $e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$
- 5) Soit  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I = ]-\infty, 1]$
- 0.5 a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer  $g^{-1}(x)$ )
- 0.75 b) Vérifier que  $g^{-1}$  est dérivable en 1 et calculer  $(g^{-1})'(1)$



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
المسالك الدولية  
الدورة العادية 2024

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS

مخاض الإجابة

NR 22F

3h

مدة الإجازة

الرياضيات

المادة

7

المعامل

مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)

الضبة أو المسلك

Questions	Notes	Eléments de réponse
<b>Exercice 1 (3pts)</b>		
1-a	0.25	0.25 pour le calcul.
1-b	0.5	0.25 pour l'initialisation et 0.25 pour $p(n) \Rightarrow p(n+1)$
2-a	0.25	0.25 pour le calcul
2-b	0.5	$2 \times 0.25$
3-a	0.5	0.25 pour la méthode et 0.25 pour le reste des calculs.
3-b	0.5	0.25 pour le calcul de $v_n$ en fonction de $n$ et 0.25 pour le résultat.
3-c	0.5	0.25 pour la limite et 0.25 pour la justification.
<b>Exercice 2 (3pts)</b>		
1	0.25	0.25
2	0.25	0.25
3-a	0.5	0.25 pour la formule et 0.25 pour le calcul.
3-b	0.5	0.25 pour la déduction et 0.25 pour le calcul du rayon.
4-a	0.5	0.25 pour la méthode et 0.25 pour la représentation paramétrique.
4-b	0.5	0.25 pour la méthode et 0.25 pour le résultat.
4-c	0.5	0.25 pour l'orthogonalité et 0.25 pour H milieu de $[AB]$
<b>Exercice 3 (4pts)</b>		
1	0.5	0.25 pour le module et 0.25 pour l'argument
2-a	0.75	$0.5 + 0.25$
2-b	0.75	$0.5 + 0.25$
3-a	0.5	$2 \times 0.25$
3-b	0.5	$2 \times 0.25$
3-c	0.5	0.5
3-d	0.5	0.5
<b>Exercice 4 (2pts)</b>		
1	0.5	0.25 pour la formule et 0.25 pour le calcul de $p(A) = \frac{1}{3}$
2	0.5	0.25 pour la formule et 0.25 pour le calcul de $p(B) = \frac{5}{21}$
3	0.5	0.25 pour $\text{card}(A \cap B) = 1$ et 0.25 pour $p(A \cap B) = \frac{1}{21}$
4	0.5	0.25 pour la réponse et 0.25 pour la justification

	Questions	Notes	Eléments de réponse
<b>Problème (8pts)</b>			
<b>Partie I</b>	1	0.5	0.25 pour chaque courbe.
	2	0.25	0.25 pour la justification.
	3	0.5	0.25 pour la formule de l'aire et 0.25 pour le calcul
<b>Partie II</b>	1-a	0.25	0.25
	1-b	0.5	0.5
	1-c	0.5	$2 \times 0.25$
	2-a	0.25	0.25 pour la limite
	2-b	0.5	0.5 pour le calcul.
	2-c	0.75	0.5 pour la limite et 0.25 pour la déduction
	3-a	0.5	0.25 pour la méthode et 0.25 pour le calcul.
	3-b	0.5	$2 \times 0.25$
	3-c	0.75	0.5 pour l'application de T.V.I et 0.25 pour l'unicité.
	4-a	0.5	0.5
	4-b	0.5	0.25 pour $f(\alpha) = \alpha$ et $f(\beta) = \beta$ et 0.25 pour la relation $e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$
	5-a	0.5	0.25 pour l'existence de $g^{-1}$ et 0.25 pour l'intervalle J
	5-b	0.75	$0.25 + 0.5$