

التمرين 1: (7.5 نقطة)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[1, +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}, \quad x \in]1, +\infty[\text{ و } f(1) = \frac{1}{2}$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد (O, \vec{i}, \vec{j})

1- بين أن f متصلة على اليمين في 1 0.5

2- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

3- (أ) ليكن $x \in]1, +\infty[$

$$\frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{-\sqrt{t} + \ln(1+\sqrt{t})}{t} \quad \text{بوضع: } t = (x-1)^2, \text{ تحقق أن:} \quad 0.25$$

$$\text{(ب) بين أن: } -\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t} + \ln(1+\sqrt{t})}{t} < \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})} \quad (\forall t \in]0, +\infty[) \quad 0.5$$

(يمكن استعمال مبرهنة التزايد المتناهية على المجال $[0; t]$)

$$\text{(ج) استنتج أن: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2} \quad 0.25$$

$$f(x) - \frac{1}{2} = -\frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2} \quad \text{(أ) تحقق أن لكل } x \in]1, +\infty[\quad 0.5$$

(ب) استنتج أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

$$J(x) = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^2} dt \quad \text{و} \quad I(x) = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3} dt \quad \text{نضع } x \in]1, +\infty[\quad \text{للكل } x \in]1, +\infty[\quad 0.5$$

(أ) بين أن: $\forall x \in]1, +\infty[, 0 \leq I(x) \leq J(x)$ 0.5

$$J(x) = \frac{(x-1)^2}{x} \quad \text{و} \quad I(x) = \ln(x) - \frac{x^2-1}{2x^2}, \quad x \in]1, +\infty[\quad \text{بين أن لكل } x \in]1, +\infty[\quad 0.5$$

$$\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)} \quad \text{(ج) تحقق أن:} \quad 0.5$$

$$\forall x \in]1, +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0 \quad \text{(د) استنتج أن:} \quad 0.5$$

6- (أ) ضع جدول تغيرات الدالة f 0.25

(ب) أنشئ المنحنى (C) (نأخذ $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ و $\|\vec{j}\| = 2\text{cm}$) 0.5

7- بين أن المعادلة $f(x) = x-1$ تقبل حلا وحيدا a في المجال $]1, 2[$ 0.5

8- لتكن $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$a_{n+1} = 1 + f(a_n), \quad \text{لكل } n \in \mathbb{N} \quad \text{و} \quad a_0 \in]1, +\infty[$$

(أ) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}), |a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|a_n - a|$ 0.5

(ب) بين بالترجع أن: $(\forall n \in \mathbb{N}), |a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$ 0.5

(ج) استنتج أن المتتالية $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة. 0.25

التمرين 2: (2.5 نقطة)

لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;1]$ بما يلي: $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

1- (أ) بين أن F متصلة و تزايدية قطاعا على المجال $[0;1]$ 0.5

(ب) استنتج أن F تقابل من المجال $[0;1]$ نحو المجال $[0;\beta]$ حيث $\beta = \int_0^1 e^{t^2} dt$ 0.5

2- ليكن F^{-1} التقابل العكسي للدالة F

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right) \text{ نضع: } n \in \mathbb{N}^*$$

(أ) بين أن المتتالية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة نهايتها $\ell = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F^{-1}(t) dt$ 0.5

(ب) بين أن $\ell = \frac{1}{\beta} \int_0^1 u e^{u^2} du$ (يمكنك استعمال طريقة تغيير المتغير بوضع $u = F^{-1}(t)$) 0.5

(ج) استنتج أن: $\ell = \frac{e-1}{2\beta}$ 0.5

التمرين 3: (3.5 نقطة)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O, \vec{u}, \vec{v})

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z

$$\alpha \in \mathbb{C} \text{ حيث } (E_\alpha): z^2 - 2iz + \alpha = 0$$

الجزء I :

1- (أ) بين أن مميز المعادلة (E_α) هو $\Delta = -4(1+\alpha)$ 0.25

(ب) حدد مجموعة قيم α التي من أجلها تقبل المعادلة (E_α) حلين مختلفين في المجموعة \mathbb{C} 0.25

2- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_α) 0.5

حدد $z_1 + z_2$ و $z_1 z_2$

الجزء II :

لتكن Ω و M_1 و M_2 النقط ذات الألفاق على التوالي α و z_1 و z_2

1- نفترض أن $\alpha = m^2 - 2m$ حيث $m \in \mathbb{R}$

(أ) حدد z_1 و z_2 بدلالة m 0.5

(ب) استنتج أن النقط O و M_1 و M_2 مستقيمية. 0.25

2- نفترض أن النقط O و M_1 و M_2 غير مستقيمية.

(أ) بين أن $\frac{z_1}{z_2}$ تخيلي صرف إذا فقط إذا كان $Re(z_1 \bar{z}_2) = 0$ 0.25

(ب) بين أن: $|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4 Re(z_1 \bar{z}_2)$ 0.5

(ج) استنتج أن $\frac{z_1}{z_2}$ تخيلي صرف إذا فقط إذا كان $|z_1 - z_2| = 2$ 0.25

(أ) بين أن: $(z_1 - z_2)^2 = \Delta$ 0.25

(ب) حدد المجموعة Γ للنقط Ω بحيث يكون المثلث OM_1M_2 قائم الزاوية في O 0.5

التمرين 4: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة غير تبادلية صفرها المصفوفة $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ قانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي:

$$\forall ((a,b), (c,d)) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)^2 ; (a,b)T(c,d) = (a\bar{d} + c, bd)$$

(\bar{d} هو مرافق العدد العقدي d)

1- (أ) تحقق أن $(i,2)T(1,i) = (2,2i)$ ، ثم احسب $(1,i)T(i,2)$ 0.5

(ب) استنتج أن القانون T غير تبادلي في $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ 0.25

2- بين أن القانون T تجميعي في $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ 0.5

3- تحقق أن $(0,1)$ هو العنصر المحايد للقانون T في $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ 0.25

4- (أ) تحقق أن $(a,b)T\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) = (0,1)$; $\forall (a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ 0.5

(ب) بين أن $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$ زمرة غير تبادلية. 0.5

5- (أ) بين أن $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ مستقر بالنسبة لقانون التركيب الداخلي T 0.5

(ب) بين أن $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$ 0.5

التمرين 5: (3 نقط)

ليكن p و q عددين أوليين مختلفين و r عددا صحيحا طبيعيا أوليا مع p و مع q

1- أ) بين أن p يقسم $r^{p-1} - 1$ و أن q يقسم $r^{q-1} - 1$ 1

ب) استنتج أن p و q يقسمان $r^{(p-1)(q-1)} - 1$ 0.5

ج) بين أن pq يقسم $r^{(p-1)(q-1)} - 1$ 0.5

2- حل في \mathbb{Z} المعادلة $[221] x \equiv 3 \pmod{2024}$ (نعطي: $221 = 13 \times 17$) 1

انتهى

سلم التقييم	عناصر الإجابة	التمرين 2	
0.5	اتصال ورتابة F على $[0;1]$	(أ)	-1
0.5	استنتاج.	(ب)	
0.25x2	تقارب و نهاية المتتالية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$	(أ)	-2
0.5	البرهنة على المتساوية $\ell = \frac{1}{\beta} \int_0^1 u e^{u^2} du$	(ب)	
0.5	استنتاج.	(ج)	

سلم التقييم	عناصر الإجابة	التمرين 3		الجزء I
0.25	البرهنة على المتساوية $\Delta = -4(1 + \alpha)$	(أ)	-1	
0.25	تحديد مجموعة قيم α	(ب)		
0.25x2	تحديد $z_1 z_2$ و $z_1 + z_2$		-2	
0.5	تحديد z_1 و z_2 بدلالة m	(أ)	-1	الجزء II
0.25	استنتاج.	(ب)		
0.25	البرهنة على التكافؤ.	(أ)	-2	
0.5	البرهنة على المتساوية.	(ب)		
0.25	استنتاج.	(ج)		
0.25	البرهنة على المتساوية $(z_1 - z_2)^2 = \Delta$	(أ)	-3	
0.5	تحديد المجموعة Γ	(ب)		

سلم التقييم	عناصر الإجابة	التمرين 4	
0.25x2	تحقق و حساب.	(أ)	-1
0.25	استنتاج.	(ب)	
0.5	تجميعية القانون T في $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$		-2
0.25	تحقق.		-3
0.5	تحقق.	(أ)	-4
0.5	البرهنة على أن $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$ زمرة غير تبادلية.	(ب)	
0.5	استقرار $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ بالنسبة لقانون التركيب الداخلي T	(أ)	-5
0.5	البرهنة على أن $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$	(ب)	

سلم التقييم	عناصر الإجابة	التمرين 5	
0.5x2	البرهنة على أن $p / r^{p-1} - 1$ و $q / r^{q-1} - 1$	(أ)	-1
0.5	استنتاج.	(ب)	
0.5	البرهنة على أن $pq / r^{(p-1)(q-1)} - 1$	(ج)	
1	حل في \mathbb{Z} المعادلة: $2024^{192} x \equiv 3 \pmod{221}$		-2