



Exercice n° 1:(5pts)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n - 9}{u_n - 4}$ pour tout n de \mathbb{N}

- 0.5 1. Calculer u_1 et u_2
- 0.75 2.a. Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n < 3$
- 0.5 2.b. Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)^2}{4 - u_n}$
- 0.25 2.c. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.
- 0.25 2.d. Dire pourquoi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
3. On pose pour tout n de \mathbb{N} : $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 3}$
- 0.25 3.a. Calculer v_0
- 0.5 3.b. Montrer que $v_{n+1} = \frac{2u_n - 7}{u_n - 3}$ pour tout n de \mathbb{N}
- 0.5 3.c. En déduire que $v_{n+1} - v_n = 1$ pour tout n de \mathbb{N}
- 0.5 3.d. Montrer que $v_n = \frac{3}{2} + n$ pour tout n de \mathbb{N}
- 0.5 4.a. Montrer que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n = \frac{3v_n - 4}{v_n - 1}$
- 0.25 4.b. En déduire que $u_n = \frac{6n + 1}{2n + 1}$ pour tout n de \mathbb{N}
- 0.25 4.c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice n° 2:(3pts) (Les résultats seront donnés sous forme de fractions)

Pour passer un contrôle oral de mathématiques à ses élèves, un professeur prépare dix exercices de trois domaines comme suit : cinq en algèbre, trois en analyse et deux en géométrie.

Un élève choisit au hasard et simultanément 3 exercices pour passer le contrôle. Tous les exercices ont la même probabilité d'être choisis.

On considère les événements suivants :

A : « Le choix de l'élève ne contient que des exercices d'algèbre »

B : « Le choix de l'élève contient un exercice de chaque domaine »

C : « Parmi les trois exercices choisis, il y'a un seul de géométrie »

- 1 1. Montrer que $p(A) = \frac{1}{12}$
- 1 2. Calculer $p(B)$
- 1 3. Calculer $p(C)$

Exercice n° 3:(4pts)

On considère les fonctions numériques f et g de la variable réelle x définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - \ln x \text{ et } g(x) = \ln x$$



(C_f) et (C_g) sont les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

0.5 1. Calculer $f(e)$ et $g(\sqrt{e})$

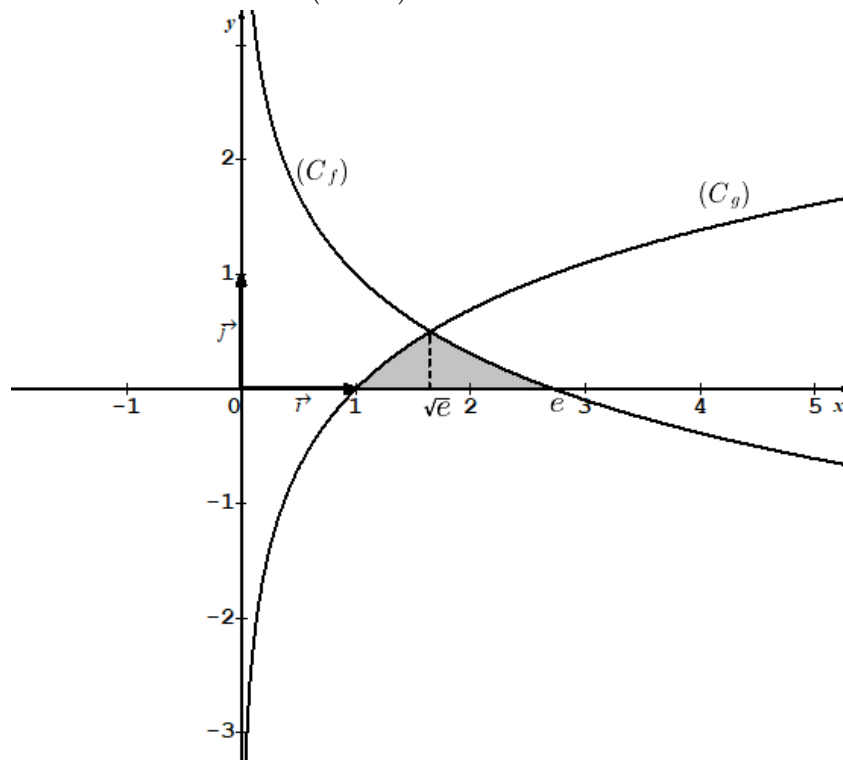
0.5 2. Déterminer algébriquement les coordonnées du point d'intersection de (C_f) et (C_g)

1 3.a. Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}} g(x) dx = \frac{2-\sqrt{e}}{2}$ (On pourra utiliser une intégration par parties)

1 3.b. Calculer $\int_{\sqrt{e}}^e f(x) dx$

1 3.c. En déduire que l'aire A de la partie colorée est $A = (\sqrt{e}-1)^2 u.a$

(On remarquera que $e - 2\sqrt{e} + 1 = (\sqrt{e}-1)^2$)



Exercice n°4:(8pts)

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$$

et (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

0.25 1.a. Vérifier que $h(x) = \ln x((\ln x)^2 - 3)$ pour tout x de $]0; +\infty[$

0.5 1.b. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = -\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

1.25 1.c. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.



(On admettra que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0$)

1.5 2. Vérifier que l'ensemble des solutions de l'équation : $h(x) = 0$ est $\{e^{-\sqrt{3}}; 1; e^{\sqrt{3}}\}$

1 3.a. Montrer que $h'(x) = \frac{3}{x}(\ln x - 1)(\ln x + 1)$ pour tout x de $]0; +\infty[$

1 3.b. Montrer que : $h'(x) \geq 0$ sur $]0; \frac{1}{e}] \cup [e; +\infty[$ et $h'(x) \leq 0$ sur $[\frac{1}{e}; e]$

1 3.c. Calculer $h\left(\frac{1}{e}\right)$ et $h(e)$ puis dresser le tableau de variations de h

1.5 4. A l'aide du tableau de variations de h , donner l'image de chacun des intervalles $I = \left[\frac{1}{e}; e\right]$
et $J =]0; +\infty[$ par la fonction h

3	Pour la formule correcte	0.5	1	
	Pour le résultat $p(C) = \frac{7}{15}$	0.5		

Exercice n°3 :(4pts)

1	$f(e) = 0$ et $g(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$	0.25x2	0.5	
2	$(\sqrt{e}; \frac{1}{2})$ est le couple des coordonnées du point demandé	0.5	0.5	0.25 pour l'abscisse et 0.25 pour l'ordonnée
3.a	$\int_1^{\sqrt{e}} g(x) dx = \frac{2 - \sqrt{e}}{2}$	1	1	
3.b	$\int_{\sqrt{e}}^e f(x) dx = e - \frac{3}{2}\sqrt{e}$	1	1	
3.c	$A = (\sqrt{e} - 1)^2 u.a$	1	1	0.5 pour la relation de Chasles et 0.5 pour le résultat. On accepte le résultat même sans unité d'aire

Exercice n°4 :(8pts)

Question	Détails d'éléments de réponses et barème	Notes partielles	Total	Observations
1.a	La vérification de $h(x) = \ln x ((\ln x)^2 - 3)$	0.25	0.25	
1.b	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = -\infty$	0.25	0.5	
	L'interprétation géométrique du résultat	0.25		
1.c	$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$	0.5	1.25	
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = 0$	0.5		
	L'interprétation géométrique du résultat	0.25		
2	L'ensemble des solutions de l'équation : $h(x) = 0$	1.5	1.5	
3.a	$h'(x) = \frac{3}{x} (\ln x - 1)(\ln x + 1)$	1	1	Accorder 0.5 pour $h'(x) = \frac{3}{x} (\ln x)^2 - \frac{3}{x}$ et 0.5 pour la factorisation
3.b	Etude du signe de $h'(x)$	1	1	
3.c	$h\left(\frac{1}{e}\right) = 2$ et $h(e) = -2$	0.25x2	1	
	Tableau de variations	0.5		
4	$h(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$	0.75	1.5	
	$h\left(\left[\frac{1}{e}; e\right]\right) = [-2; 2]$	0.75		