الصفحة	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة المركز الوطني للتقويم والامتحانات
1 / 4	الدورة الاستدراكية 2024	
**|	-الموضوع -	
	SSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSSS RS 24	

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز: 4h
الشعبة المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل: 9

تعليمات:

- مدة الاختبار هي أربع ساعات.
- يتضمن موضوع الاختبار خمسة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن أن تنجز التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين1 يتعلق بالتحليل.....(6.5 نقطة)
- التمرين2 يتعلق بالتحليل.....(3.5 نقطة)
- التمرين3 يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 نقطة)
- التمرين4 يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 نقطة)
- التمرين5 يتعلق بالحسابيات.....(3 نقط)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر

التمرين1 : (6.5 نقطة)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f_n(0)=0 \quad \text{و} \quad \left(\forall x\in]0,+\infty[\right)\ ;\ f_n(x)=x-x^n\ln x$$

وليكن (C_n) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم .

0.25 1- أ) بين أن f_n متصلة على اليمين في 0

0.75 ب) بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=-\infty$ و أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}=-\infty$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.5 ج) بين أن f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أن عددها المشتق على اليمين في 0 يساوي 1

0.5 د) بين أن f_n قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أن:

$$\left(\forall x\in]0,+\infty[\right)\ ;\ f_n'(x)=1-x^{n-1}-nx^{n-1}\ln x$$

0.5 هـ) بين أن f_n تزايدية قطعا على $[0;1]$ و تناقصية قطعا على $[1,+\infty[$

0.5 2- أ) بين أن لكل $n\geq 2$ ، لدينا : $\forall x\in[0,+\infty[\ ;\ f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$

0.25 ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

0.5 3- أ) بين أن لكل $n\geq 2$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n\in]1;2[$ بحيث: $f_n(\alpha_n)=0$ (نأخذ $\ln 2=0,7$)

0.25 ب) تحقق أن: $\left(\forall n\geq 2\right)\quad \alpha_{n+1}^n\ln\alpha_{n+1}=1$

0.25 ج) استنتج أن: $\left(\forall n\geq 2\right)\quad f_n(\alpha_{n+1})=\alpha_{n+1}-1$

0.5 د) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ التي تم تعريفها، تناقصية قطعا.

0.25 هـ) استنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متقاربة.

4- نضع $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

0.25 أ) بين أن: $1\leq \ell\leq 2$

0.5 ب) بين أن لكل $n\geq 2$ ، $n-1=-\dfrac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$

0.25 ج) نفترض أن $\ell>1$ ، احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$ بدلالة ℓ

0.5 د) استنتج قيمة النهاية ℓ

التمرين 2: (3.5 نقطة)

0.25 1- أ) احسب التكامل: $\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}dx$

0.5 ب) لكل عدد صحيح $n\geq 1$ ، نضع: $u_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{n}{n^2+k^2}$

بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ متقاربة ثم حدد نهايتها.

0.25 2- بين أن: $\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx \le 1$

0.5 3- أ) بين أن: $\left(\forall x \in [0,1]\right)$; $0 \le e^x - 1 \le e.x$

0.25 ب) استنتج أن: $\left(\forall x \in [0,1]\right)$; $0 \le e^x - 1 - x \le \frac{e}{2}x^2$

4- لكل عدد صحيح $n \ge 1$ ، نضع: $w_n = \sum_{k=1}^{k=n}\left(e^{\frac{n}{n^2+k^2}} - 1\right)$

0.25 أ) بين أن لكل عدد صحيح $n \ge 1$، لدينا : $0 \le w_n - u_n \le \frac{e}{2}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2$

0.25 ب) بين أن الدالة : $x \mapsto \left(1+x^2\right)^{-2}$ تناقصية قطعا على المجال $[0,1]$

ج) استنتج أن لكل عدد صحيح $n \ge 1$ و لكل عدد صحيح $k \in \{1,2,3,.....,n\}$ ، لدينا:

0.25 $$\frac{1}{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-2} \le \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(1+x^2\right)^{-2} dx$$

0.5 5- أ) بين أن لكل عدد صحيح $n \ge 1$، لدينا : $0 \le w_n - u_n \le \frac{e}{2n}$

0.5 ب) استنتج أن المتتالية $\left(w_n\right)_{n\ge 1}$ متقاربة وحدد نهايتها.

التمرين3: (3.5 نقطة)

ليكن $m \in \mathbb{C}^*$

الجزء I: نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(E) : z^2 - (2+i)mz + m^2(1+i) = 0$

0.25 1- أ) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta = (im)^2$

0.5 ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

2- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

0.5 اكتب $z_1 z_2$ على الشكل الأسي في الحالة حيث $m = re^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R}$ ، $r \in \mathbb{R}_+^*)$

الجزء II: المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$

نضع $z_1 = m$ و $z_2 = m(1+i)$

لتكن M_1 النقطة ذات اللحق z_1 و M_2 النقطة ذات اللحق z_2 و $M_3(z_3)$ صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه M_2 وزاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ و $M_4(z_4)$ صورة النقطة M_1 بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته k $\left(k \in \mathbb{R}^* - \{1\}\right)$

0.75 1- احسب z_3 بدلالة m و z_4 بدلالة m و k

0.75 2- اكتب على الشكل الجبري العدد $\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$

0.75 3-استنتج أن النقط M_1 و M_2 و M_3 و M_4 متداورة إذا وفقط إذا كان $k = -2$

التمرين4: (3.5 نقطة)

نزود مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي:

$$\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4 \; ; \; (x+iy)*(x'+iy') = (xy'+y^5x')+iyy'$$

الجزء I:

0.25 1- أ) تحقق أن: $1*(2i) = 2$

0.25 ب) بين أن القانون التركيب الداخلي $*$ ليس تبادليا.

0.5 2- بين أن القانون $*$ تجميعي.

0.25 3- أ) تحقق أن: $1*(1+2i) = 2$

0.25 ب) استنتج أن $(\mathbb{C},*)$ ليس زمرة.

4- لتكن E المجموعة الجزئية من $\mathbb{C}$ المعرفة بما يلي: $E = \{x+yi \,/\, (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*\}$

0.25 أ) بين أن المجموعة E مستقرة في $(\mathbb{C},*)$

0.5 ب) بين أن $(E,*)$ زمرة غير تبادلية.

الجزء II:

نعتبر المجموعات الجزئية من المجموعة E المعرفة بما يلي:

$$F = \{yi \,/\, y \in \mathbb{R}^*\} \quad \text{و} \quad G = \{x+i \,/\, x \in \mathbb{R}\}$$

0.5 1- بين أن F زمرة جزئية من $(E,*)$

2- نعتبر التطبيق φ المعرف من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{C}$ بما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{R} \; , \; \varphi(x) = x+i$$

0.25 أ) بين أن: $\varphi(\mathbb{R}) = G$

0.25 ب) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(\mathbb{C},*)$

0.25 ج) استنتج أن $(G,*)$ زمرة تبادلية.

التمرين5: (3 نقط)

0.5 1- باستعمال خوارزمية اقليدس، حدد العدد الصحيح $u \in \{1,2,.....,22\}$ بحيث: $10u \equiv 1[23]$

2- ليكن m عددا صحيحا طبيعيا و q و r ، على التوالي، خارج وباقي القسمة الإقليدية للعدد m على 10

0.5 أ) بين أن: $m \equiv 10(q+ur) \; [23]$

0.75 ب) بين أن: 23 يقسم m $\Leftrightarrow$ 23 يقسم $(q+ur)$

3- نعتبر في $\mathbb{N}$ النظمة $(S): \begin{cases} x \equiv 1 \; [23] \\ x \equiv 2 \; [10] \end{cases}$

0.75 أ) بين أنه إذا كان x حلا للنظمة (S) فإنه يوجد $q \in \mathbb{N}$ بحيث $x = 10q+2$ و 23 يقسم $(q+7)$

0.5 ب) حل في $\mathbb{N}$ النظمة (S)

انتهى

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2024

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

RR 24 | عناصر الإجابة | sssssssssssssssssss-ssss

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

التمرين1		الأجوبة	سلم التنقيط
-1	أ)	اتصال f_n على يمين 0	0.25
	ب)	البرهنة على أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=-\infty$	0.25
		البرهنة على أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}=-\infty$	0.25
		تأويل مبياني	0.25
	ج)	اشتقاق f_n على اليمين في 0	0.25
		$(f_n)'_d(0)=1$	0.25
	د)	اشتقاق f_n على $]0,+\infty[$	0.25
		$\forall x\in]0,+\infty[\ ;\ f_n'(x)=1-x^{n-1}-nx^{n-1}\ln x$	0.25
	هـ)	f_n تزايدية قطعا على $[0;1]$	0.25
		f_n تناقصية قطعا على $]1,+\infty[$	0.25
-2	أ)	البرهنة على أن : $\forall n\geq 2\ \forall x\in[0,+\infty[\ ;\ f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$	0.5
	ب)	استنتاج.	0.25
-3	أ)	وجود ووحدانية α_n	0.25x2
	ب)	التحقق.	0.25
	ج)	استنتاج.	0.25
	د)	البرهنة على أن: $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا	0.5
	هـ)	استنتاج تقارب المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$	0.25
-4	أ)	البرهنة على التأطير: $1\leq \ell\leq 2$	0.25
	ب)	البرهنة على أن لكل $n\geq 2$ ، $n-1=-\dfrac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$	0.5
	ج)	حساب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$ بدلالة ℓ	0.25
	د)	استنتاج قيمة النهاية ℓ	0.5

التمرين2			الأجوبة	سلم التنقيط
-1		أ)	حساب التكامل: $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$	0.25
		ب)	تقارب ونهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$	0.25x2
-2			البرهنة على أن : $\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx \leq 1$	0.25
-3		أ)	البرهنة على المتفاوتة المزدوجة.	0.5
		ب)	استنتاج المتفاوتة المزدوجة.	0.25
-4		أ)	البرهنة على: $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ 0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2$	0.25
		ب)	البرهنة على أن الدالة $x \mapsto \left(1+x^2\right)^{-2}$ تناقصية قطعا على $[0,1]$	0.25
		ج)	استنتاج.	0.25
-5		أ)	البرهنة على أن لكل $n \geq 1$ لدينا: $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2n}$	0.5
		ب)	تقارب ونهاية المتتالية $(w_n)_{n\geq 1}$	0.5

التمرين3			الأجوبة	سلم التنقيط
الجزء I	-1	أ)	التحقق.	0.25
		ب)	حل المعادلة (E)	0.25x2
	-2		الشكل الأسي للعدد $z_1 z_2$	0.5
الجزء II	-1		حساب z_3 بدلالة m	0.25
			حساب z_4 بدلالة m و k	0.5
	-2		الصيغة الجبرية للعدد $\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$	0.75
	-3		استنتاج التكافؤ.	0.75

التمرين4			الأجوبة	سلم التنقيط
الجزء I	-1	أ)	التحقق.	0.25
		ب)	القانون $*$ غير تبادلي.	0.25
	-2		تجميعية القانون $*$ على $\mathbb{C}$	0.5
	-3	أ)	التحقق.	0.25
		ب)	استنتاج.	0.25
	-4	أ)	استقرار E في $(\mathbb{C}, *)$	0.25
		ب)	البرهنة على أن $(E, *)$ زمرة غير تبادلية.	0.5

الجزء II	1-		البرهنة على أن F زمرة جزئية من الزمرة $(E,*)$	0.5
	2-	أ)	البرهنة على المتساوية $\varphi(\mathbb{R})=G$	0.25
		ب)	البرهنة على أن φ تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ إلى $(\mathbb{C},*)$	0.25
		ج)	استنتاج.	0.25

التمرين5		الأجوبة	سلم التنقيط
1-		تحديد العدد الصحيح $u\in\{1,2,...,22\}$ بحيث: $10u\equiv 1\ [23]$ (إثبات وحدانية u غير مطلوب)	0.5
2-	أ)	البرهنة على التوافق: $m\equiv 10(q+ur)\ [23]$	0.5
	ب)	البرهنة على التكافؤ.	0.75
3-	أ)	البرهنة على وجود العدد الصحيح q الذي يحقق $x=10q+2$ و $23/(q+7)$ ، حيث x حل للنظمة (S)	0.75
	ب)	حل النظمة (S)	0.5