

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- الموضوع -

NS 24

ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵍⴻⴳⴷⴰⵢⵜ
ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵍⴻⴳⴷⴰⵢⵜ
ⵏ ⵍⴻⴳⴷⴰⵢⵜ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالأعداد العقدية.....(3 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنىات الجبرية.....(4 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6.5 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3.5 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير



التمرين الأول: (3 نقط)

1- نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة التالية: $(E) : z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$

(أ) تحقق أن $(3 - i\sqrt{3})^2$ هو مميز المعادلة (E) 0.25

(ب) حدد a و b حلي المعادلة (E) (علما أن: b ، x) 0.5

(ج) تحقق أن: $b = (1 - i\sqrt{3})a$ 0.25

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر.
لتكن A النقطة التي لحقها a و B النقطة التي لحقها b

(أ) حدد العدد العقدي b_1 لحق النقطة B_1 صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{p}{2}$ 0.5

(ب) بين أن B هي صورة B_1 بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{3}$ 0.5

(ج) تحقق أن: $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ 0.5

(د) لتكن C نقطة ، لحقها c ، تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB وتخالف O و A 0.5

حدد عمدة للعدد العقدي $\frac{c}{c-a}$

التمرين الثاني: (3 نقط)

ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث: $[2015] 1436$ ؛ x^{1439}

1- علما أن: $1 = 749' 2015 - 1051' 1436$ ، بين أن 1436 و 2015 أوليان فيما بينهما. 0.25

2- ليكن d قاسما مشتركا للعددين x و 2015

(أ) بين أن d يقسم 1436 0.5

(ب) استنتج أن x و 2015 أوليان فيما بينهما. 0.5

3- (أ) باستعمال مبرهنة فيرما بين أن: $[5] x^{1440} \equiv 1$ و $[13] x^{1440} \equiv 1$ و $[31] x^{1440} \equiv 1$ 0.75

(لاحظ أن: $2015 = 5.13.31$)

(ب) بين أن: $[65] x^{1440} \equiv 1$ ثم استنتج أن: $[2015] x^{1440} \equiv 1$ 0.5

4- بين أن: $[2015] 1051$ ؛ x 0.5

التمرين الثالث: (4 نقط)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ حلقة واحدة وحدتها $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ زمرة تبادلية.

لكل عدد حقيقي x نضع: $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ 2x & 1+2x \end{pmatrix}$ و نعتبر المجموعة $E = \{M(x) / x \in \mathbb{C}\}$

- نزود E بقانون التركيب الداخلي T المعروف بما يلي: $M(x)TM(y) = M(x+y+1)$ (" x, y)²)
- 1- ليكن j التطبيق من E نحو E المعروف بما يلي: $j(x) = M(x-1)$ (" x)²)
- (أ) بين أن j تشكل من $(+, +)$ نحو (E, T) 0.5
- (ب) بين أن (E, T) زمرة تبادلية. 0.5
- 2- (أ) بين أن: $M(x)'M(y) = M(x+y+xy)$ (" x, y)²) 0.5
- (ب) استنتج أن E جزء مستقر من $(M_2(E), ')$ و أن القانون " \times " تبادلي في E 0.5
- (ج) بين أن القانون " \times " توزيعي بالنسبة للقانون " T " في E . 0.5
- (د) تحقق أن $M(-1)$ هو العنصر المحايد في (E, T) و أن I هو العنصر المحايد في $(E, ')$. 0.5
- 3- (أ) تحقق أن: $M(x)'M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = I$ (" x)²) 0.25
- (ب) بين أن $(E, T, ')$ جسم تبادلي. 0.75

التمرين الرابع: (6.5 نقط)

الجزء الأول: لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي:

$$f(0) = 0 \quad \text{و} \quad f(x) = x(1 + \ln^2 x) \quad \text{إذا كان } x > 0$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم (O, i, j) .

- 1- أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5
- 2- (أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0 0.25
- (ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5
- (ج) أحسب $f'(x)$ من أجل $x > 0$ ثم استنتج أن الدالة f تزايدية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$ 0.5
- 3- (أ) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1} . 0.25
- (ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته: $y = x$ 0.25
- (ج) أنشئ المنحنى (C) . (نأخذ: $e^{-1} = 0.4$) 0.5
- الجزء الثاني:** نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = e^{-1}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ (" n)²)
- 1- بين بالترجع أن: $e^{-1} \leq u_n < 1$ (" n)²) 0.5
- 2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة. 0.5
- 3- نضع: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ 0.5
- (أ) بين أن: $e^{-1} \leq 1 \leq 1$ 0.25
- (ب) حدد قيمة 1 0.5

الجزء الثالث: لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

1- (أ) بين أن الدالة: $H : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$ دالة أصلية للدالة: $h : x \mapsto x \ln x$ على المجال $]0, +\infty[$ 0.25

(ب) بين أن: $\int_1^x t \ln^2(t)dt = \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \int_1^x t \ln(t)dt$ ($\forall x > 0$) 0.5

(ج) استنتج أن: $F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{x^2}{2} \ln^2(x)$ ($\forall x > 0$) 0,5

2- (أ) بين أن الدالة F متصلة على المجال $[0, +\infty[$ 0.25

(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل $\int_0^1 f(x)dx$ 0.5

التمرين الخامس: (3.5 نقط)

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $g(0) = \ln 2$ و $g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$ إذا كان $x > 0$

1- (أ) بين أن: $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$ ($\forall t \in [x, 2x]$) ($\forall x > 0$) 0.5

(ب) بين أن: $e^{-2x} \ln 2 \leq g(x) \leq e^{-x} \ln 2$ ($\forall x > 0$) 0.5

(ج) استنتج أن الدالة g متصلة على اليمين في 0. 0.25

2- بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ثم أحسب $g'(x)$ من أجل $x > 0$ 0.75

3- (أ) بين أن: $-1 \leq \frac{e^{-t} - 1}{t} \leq -e^{-t}$ ($\forall t > 0$) (يمكنك استعمال مبرهنة التزايديات المنتهية) 0.5

(ب) بين أن: $-1 \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$ ($\forall x > 0$) 0.5

(ج) استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0. 0.5

انتهى

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2015
- عناصر الإجابة -

NR 24

ⵜⴰⴷⵓⴷⴰ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ
ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵏⵓⵔⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ
ⵏ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵏⵓⵔⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

سلم التقط	عناصر الإجابة	التمرين الأول
0.25	التحقق	1- (أ)
0.5	نحصل على : $b = 4$ و $a = 1 + i\sqrt{3}$	(ب)
0.25	التحقق	(ج)
0.5	نحصل على : $b_1 = a(1-i) = (1+i\sqrt{3})(1-i)$	2- (أ)
0.5	التحقق من أن : $b - a = \sqrt{3}(b_1 - a)$	(ب)
0.5	نحصل على : $\frac{b}{b-a} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{p}{6}}$ إذن $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$	(ج)
0.5	النقط O و A و B و C متداورة إذن ، خ $\frac{b}{b-a}$ ، $\frac{c}{c-a}$ ونحصل على $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) \equiv \frac{p}{6} [p]$ تمنح 0,25 في حالة توصل التلميذ إلى النتيجة : $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) \equiv \frac{p}{6} [2p]$	(د)
سلم التقط	عناصر الإجابة	التمرين الثاني
0.25	مبرهنة بوزو انطلاقا من الملاحظة أو أية طريقة صحيحة أخرى	1-
0.5		2- (أ)
0.5	الاستنتاج	(ب)
0.75	تطبيق مبرهنة فيرما ثلاث مرات و تمنح 0.25 عن كل تطبيق	3- (أ)
0.5	5 و 13 أوليين فيما بينهما 0.25	(ب)

	0.25.....	31 و 65 أوليين فيما بينهما	
0.5	1436 [2015] ؛ x^{1439} و $1 = 1436 - 1051$	توظيف العلاقتين:	-4
سلم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين الثالث	
0.5	التشاكل.....0.5	(أ-1)	
0.5	0.25..... $j(,) = E$	(ب)	
	0.25..... صورة زمرة تبادلية بتشاكل		
0.5	المتساوية	(أ-2)	
0.5	0.25..... الاستنتاج	(ب)	
	0.25..... التبادلية		
0.5	التوزيعية	(ج)	
0.5	0.25..... هو العنصر المحايد	(د)	
	0.25..... هو العنصر المحايد		
0.25	المتساوية	(أ-3)	
0.75	0.25..... استنتاج من السؤال (أ-3) أن كل عنصر من E يخالف $M(-1)$ يقبل مماثل	(ب)	
	0.5..... باقي الخصائص		
سلم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين الرابع	
0.5	0.25..... حساب النهايتين	-1	الجزء الأول
	0.25..... التأويل المبياني		
0.25		(أ-2)	
0.5	0.25..... حساب النهاية	(ب)	
	0.25..... التأويل المبياني		
0.5	0.25..... حساب المشتقة	(ج)	
	0.25..... الرتبة		
0.25	نقطة الإنعطاف	(أ-3)	
0.25		(ب)	

0.5	يتم الأخذ بعين الإعتبار نقطة الإنعطاف و الفرع اللا نهائي و نصف المماس	(ج)	
0.5		-1	الجزء الثاني
0.5	الرتابة.....0.25ن	-2	
	التقارب..... 0.25 ن		
0.25		(أ -3)	
0.5	$l = 1$	(ب)	
0.25		(أ -1)	الجزء الثالث
0.5		(ب)	
0.5		(ج)	
0.25		(أ -2)	
0.5	$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\frac{3}{4}$0.25ن $\int_0^1 f(x) dx = -F(0) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{3}{4}$0.25ن لأن الدالة F متصلة على اليمين في 0	(ب)	
سلم التقط	عناصر الإجابة		التمرين الخامس
0.5		(أ -1)	
0.5		(ب)	
0.25		(ج)	
0.75	قابلية الإشتقاق.....0.25ن	-2	
	0.5..... $g'(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$		
0.5	تطبيق مبرهنة التزايدت المنتهية $\frac{e^{-t} - 1}{t} = -e^{-s}$ $(\forall t > 0) (\exists s \in]0, t[)$	(أ -3)	
	ثم تأطير e^{-s} كما تقبل أية طريقة صحيحة أخرى		

0.5	توظيف نتيجة السؤال 3-أ)	(ب)
0.5	$0.25 \dots \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} = -1$ $0.25 \dots \text{و تأويل النتيجة} \dots \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -1$	(ج)