

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة الاستدراكية 2015  
- الموضوع -

RS 24

ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⵔⵓⵔ  
ⵏ ⵉⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⵔⵓⵔ  
ⵏ ⵉⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⵔⵓⵔ



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....(4 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات و حساب الاحتمالات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(4 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

**التمرين الأول: (4 نقط)**

**الجزء الأول:** نزود ، بقانون التركيب الداخلي \* المعرف بما يلي:

$$x * y = x + y - e^{xy} + 1 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

1- (أ) بين أن القانون \* تبادلي في ،

0.25

(ب) بين أن القانون \* يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده.

0.5

2- علما أن المعادلة:  $3 + x - e^{2x} = 0$  (E) تقبل في ، حلين مختلفين  $a$  و  $b$  ،

0.5

بين أن القانون \* غير تجميعي.

**الجزء الثاني:** نذكر أن  $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$  حلقة غير تبادلية و واحدة وحدتها  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

و أن  $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي و أن  $(\mathbb{F}^*, \cdot)$  زمرة تبادلية.

$$F = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{و ليكن} \quad M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

1- بين أن  $F$  فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي  $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$

0.5

2- بين أن  $F$  جزء مستقر من  $(M_2(\mathbb{C}), \cdot)$

0.5

3- نعتبر التطبيق  $z$  من  $\mathbb{F}^*$  نحو  $F$  الذي يربط كل عدد عقدي  $x + iy$  (حيث  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان) بالمصفوفة  $M(x, y)$

(أ) بين أن  $z$  تشاكل من  $(\mathbb{F}^*, \cdot)$  نحو  $(F, \cdot)$

0.5

(ب) نضع:  $F^* = F - \{M(0, 0)\}$  . بين أن:  $z(\mathbb{F}^*) = F^*$

0.25

(ج) بين أن  $(F^*, \cdot)$  زمرة تبادلية.

0.25

4- بين أن  $(F, +, \cdot)$  جسم تبادلي.

0.75

**التمرين الثاني: (3 نقط)**

I- 1- ليكن  $a$  من  $\mathbb{C}$ . بين أنه إذا كان  $a$  و 13 أوليان فيما بينهما فإن:  $a^{2016} \equiv 1 [13]$

0.5

2- نعتبر في  $\mathbb{Z}$  المعادلة:  $x^{2015} \equiv 2 [13]$  (E) وليكن  $x$  حلا للمعادلة (E)

(أ) بين أن  $x$  و 13 أوليان فيما بينهما.

0.5

(ب) بين أن:  $x \equiv 7 [13]$

0.5

3- بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي:  $S = \{7 + 13k / k \in \mathbb{Z}\}$

0.5

II- نعتبر صندوقا  $U$  يحتوي على خمسين (50) كرة مرقمة من 1 إلى 50. (الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس)

0.5

1- نسحب عشوائيا كرة من الصندوق. ما هو احتمال الحصول على كرة تحمل رقما يكون حلا للمعادلة (E) ؟

0.5

2- نسحب عشوائيا كرة من الصندوق ، نسجل رقمها ثم نعيدها إلى الصندوق. نكرر هذه التجربة ثلاث مرات.

0.5

ما هو احتمال الحصول مرتين بالضبط على كرة تحمل رقما يكون حلا للمعادلة (E) ؟

**التمرين الثالث:** (3 نقط)

نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية: (E) :  $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$

(أ-1) تحقق أن  $(1-3i)^2$  هو مميز المعادلة (E) 0.25

(ب) حدد  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة (E) في المجموعة  $\mathbb{C}$  (نأخذ  $z_1$  تخيلي صرف) 0.5

(ج) بين أن:  $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$  0.5

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر .  
نعتبر النقطة A التي لحقها  $z_1$  و B النقطة التي لحقها  $z_2$

(أ) حدد العدد العقدي e لحق النقطة E منتصف القطعة [AB] 0.25

(ب) ليكن r الدوران الذي مركزه A وقياس زاويته  $\frac{\pi}{2}$  0.5

وليكن c لحق النقطة C صورة النقطة E بالدوران r . بين أن:  $c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

(ج) نعتبر D النقطة ذات اللق  $d = 1 + \frac{3}{2}i$  .

بين أن العدد  $\frac{z_2 - d}{z_1 - d}$  حقيقي ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها. 1

**التمرين الرابع:** (6 نقط)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية  $f_n$  للمتغير الحقيقي x المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$

و ليكن  $(C_n)$  المنحنى الممثل للدالة  $f_n$  في معلم متعامد و ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

(أ-1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$  ثم أول مبيانيا النتيجتين المحصل عليهما. 0.75

(ب) بين أن الدالة  $f_n$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ثم أحسب  $f'_n(x)$  لكل x من  $\mathbb{R}$  0.75

(ج) بين أن الدالة  $f_n$  تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$  0.25

(أ-2) بين أن النقطة  $I_n \in \mathbb{C}$ ,  $\frac{1}{2}$  مركز تماثل للمنحنى  $(C_n)$  0.5

(ب) أنشئ المنحنى  $(C_1)$  . 0.5

- (ج) أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى  $(C_1)$  و المستقيمت:  $x=0$  و  $x=1$  و  $y=0$  0.75
- 3- (أ) لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$ ، بين أن المعادلة:  $f_n(x) = x$  تقبل حلا وحيدا  $u_n$  في المجال  $]0, n[$  0.75
- (ب) بين أن:  $f_{n+1}(x) < f_n(x)$  ( $x \in ]0, n[$ ) ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) 0.5
- (ج) بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75
- (د) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  0.5

التمرين الخامس: (4 نقط)

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$ ، بما يلي:  $g(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$

- 1- بين أن الدالة  $g$  زوجية. 0.5
- 2- بين أن الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$  ثم أحسب  $g'(x)$  من أجل  $x > 0$  0.75
- 3- (أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، تحقق أن:  $\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$  ( $x > 0$ ) 0.5
- (ب) بين أنه لكل  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$  لدينا:  $|g(x)| \leq \frac{2}{x}$  ثم استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  0.75
- 4- (أ) بين أن:  $0 \leq \int_x^{3x} \frac{1 - \cos t}{t} dt \leq 2x$  ( $x > 0$ ) (لاحظ أن:  $1 - \cos t \leq t$  ( $t > 0$ )) 0.5
- (ب) تحقق أن:  $g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$  ( $x > 0$ ) 0.5
- (ج) استنتج:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  0.5

انتهى

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة الاستدراكية 2015  
- عناصر الإجابة -

RR 24

ⵜⴰⴳⴷⴰⵏⵜ ⵏ ⵎⴰⵔⴷⴰⵢⵜ  
ⵜⴰⵎⴰⵔⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵔⴰⵎⴰⵔⴷⴰⵢⵜ  
ⵏ ⵔⴰⵎⴰⵔⴷⴰⵢⵜ



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

سلم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين الأول	
0.25		1- (أ)	الجزء الأول
0.5	0 هو العنصر المحايد	(ب)	
0.5	إذا كان القانون تجميعي فإن المماثل إذا وجد يكون وحيدا و هذا يناقض كون المعادلة $2 * x = 0$ (E) تقبل حلين مختلفين.	2-	
0.5		1-	الجزء الثاني
0.5		2-	
0.5	التشاكل	3- (أ)	
0.25		(ب)	
0.25		(ج)	
0.75		4-	
	توزيعية الضرب بالنسبة للجمع في F ..... 0.25		
	باقي المسلمات ..... 0.5		

سلم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين الثاني	
0.5	تطبيق مبرهنة فيرما	1-	I
0.5	x و 13 أوليان فيما بينهما	2- (أ)	
0.5	x ؛ 7 [13]	(ب)	
0.5	تحديد مجموعة الحلول	3-	
0.5	عدد الحالات الممكنة هو 50 و عدد الحالات التي تحقق الحدث هو 4 إذن الاحتمال هو $\frac{4}{50}$	1-	II

0.5	حالة تكرار نفس التجربة : $C_3^2 \left( \frac{4}{50} \right)^2 \left( 1 - \frac{4}{50} \right)$	-2
-----	--	----

سلم التقييط	عناصر الإجابة	التمرين الثالث
0.25		-1 (أ)
0.5		(ب)
0.5		(ج)
0.25		-2 (أ)
0.5		(ب)
1	قيمة الجداء $\left(\frac{1}{2}\right) \dots \dots \dots 0.5$ التأويل $\dots \dots \dots 0.5$	-3

سلم التقييط	عناصر الإجابة	التمرين الرابع
0.75	0.25 لكل نتيجة	-1 (أ)
0.75	قابلية الاشتقاق $\dots \dots \dots 0.25$ حساب المشتقة $\dots \dots \dots 0.5$	(ب)
0.25		(ج)
0.5		-2 (أ)
0.5		(ب)
0.75		(ج)
0.75		-3 (أ)
0.5		(ب)
0.75	الرتابة $\dots \dots \dots 0.5$ التقارب $\dots \dots \dots 0.25$	(ج)
0.5		(د)

سلم التقييط	عناصر الإجابة	التمرين الخامس
0.5		-1
0.75	0.25.....قابلية الاشتقاق 0.5.....حساب المشتقة	-2
0.5		-3 (أ)
0.75	0.5.....المتفاوتة 0.25.....النهاية	(ب)
0.5		-4 (أ)
0.5		(ب)
0.5		(ج)