

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة العادية 2015  
- الموضوع -

NS 24

ⵜⴰⴳⴷⴰⵏⵜ ⵏ ⵍⴻⴷⴰⵏⵜ  
ⵜⴰⴳⴷⴰⵏⵜ ⵏ ⵍⴻⴷⴰⵏⵜ  
ⵏ ⵍⴻⴷⴰⵏⵜ



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالأعداد العقدية.....(3 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنىات الجبرية.....(4 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6.5 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3.5 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3 نقط)

1- نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية:  $(E) : z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$

(أ) تحقق أن  $(3 - i\sqrt{3})^2$  هو مميز المعادلة (E) 0.25

(ب) حدد  $a$  و  $b$  حلي المعادلة (E) (علما أن:  $b \neq 0$ ) 0.5

(ج) تحقق أن:  $b = (1 - i\sqrt{3})a$  0.25

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر.  
لتكن  $A$  النقطة التي لحقها  $a$  و  $B$  النقطة التي لحقها  $b$

(أ) حدد العدد العقدي  $b_1$  لحق النقطة  $B_1$  صورة النقطة  $O$  بالدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $\frac{p}{2}$  0.5

(ب) بين أن  $B$  هي صورة  $B_1$  بالتحاكي الذي مركزه  $A$  ونسبته  $\sqrt{3}$  0.5

(ج) تحقق أن:  $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$  0.5

(د) لتكن  $C$  نقطة، لحقها  $c$ ، تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث  $OAB$  وتخالف  $O$  و  $A$  0.5

حدد عمدة للعدد العقدي  $\frac{c}{c-a}$

التمرين الثاني: (3 نقط)

ليكن  $x$  عددا صحيحا نسبيا بحيث:  $[2015] 1436$  ؛  $x^{1439}$

1- علما أن:  $1 = 749' 2015 - 1051' 1436$ ، بين أن  $1436$  و  $2015$  أوليان فيما بينهما. 0.25

2- ليكن  $d$  قاسما مشتركا للعددين  $x$  و  $2015$

(أ) بين أن  $d$  يقسم  $1436$  0.5

(ب) استنتج أن  $x$  و  $2015$  أوليان فيما بينهما. 0.5

3- (أ) باستعمال مبرهنة فيرما بين أن:  $[5] x^{1440} \equiv 1$  و  $[13] x^{1440} \equiv 1$  و  $[31] x^{1440} \equiv 1$  0.75

(لاحظ أن:  $2015 = 5.13.31$ )

(ب) بين أن:  $[65] x^{1440} \equiv 1$  ثم استنتج أن:  $[2015] x^{1440} \equiv 1$  0.5

4- بين أن:  $[2015] 1051$  ؛  $x$  0.5

التمرين الثالث: (4 نقط)

نذكر أن  $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$  حلقة واحدة وحدتها  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  و  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  زمرة تبادلية.

لكل عدد حقيقي  $x$  نضع:  $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ 2x & 1+2x \end{pmatrix}$  و نعتبر المجموعة  $E = \{M(x) / x \in \mathbb{C}\}$

نزود  $E$  بقانون التركيب الداخلي  $T$  المعروف بما يلي:  $M(x)TM(y) = M(x+y+1)$  ("  $x, y$  )<sup>2</sup>

1- ليكن  $j$  التطبيق من  $E$  نحو  $E$  المعروف بما يلي:  $j(x) = M(x-1)$  ("  $x$  )<sup>2</sup>

(أ) بين أن  $j$  تشكل من  $(+, +)$  نحو  $(E, T)$  0.5

(ب) بين أن  $(E, T)$  زمرة تبادلية. 0.5

2- (أ) بين أن:  $M(x)'M(y) = M(x+y+xy)$  ("  $x, y$  )<sup>2</sup> 0.5

(ب) استنتج أن  $E$  جزء مستقر من  $(M_2(E, '),')$  و أن القانون " $\times$ " تبادلي في  $E$  0.5

(ج) بين أن القانون " $\times$ " توزيعي بالنسبة للقانون " $T$ " في  $E$ . 0.5

(د) تحقق أن  $M(-1)$  هو العنصر المحايد في  $(E, T)$  و أن  $I$  هو العنصر المحايد في  $(E, ')$ . 0.5

3- (أ) تحقق أن:  $M(x)'M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = I$  ("  $x$  )<sup>2</sup> 0.25

(ب) بين أن  $(E, T, ')$  جسم تبادلي. 0.75

#### التمرين الرابع: (6.5 نقط)

الجزء الأول: لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بما يلي:

$$f(0) = 0 \quad \text{و} \quad f(x) = x(1 + \ln^2 x) \quad \text{إذا كان } x > 0$$

ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم  $(O, i, j)$ .

1- أحسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

2- (أ) بين أن الدالة  $f$  متصلة على اليمين في  $0$  0.25

(ب) أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$  ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

(ج) أحسب  $f'(x)$  من أجل  $x > 0$  ثم استنتج أن الدالة  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $[0, +\infty[$  0.5

3- (أ) بين أن المنحنى  $(C)$  يقبل نقطة انعطاف  $I$  أفصولها  $e^{-1}$ . 0.25

(ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C)$  بالنسبة للمستقيم الذي معادلته:  $y = x$  0.25

(ج) أنشئ المنحنى  $(C)$ . (نأخذ:  $e^{-1} = 0.4$ ) 0.5

الجزء الثاني: نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بما يلي:  $u_0 = e^{-1}$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$  ("  $n \in \mathbb{N}$  )

1- بين بالترجع أن:  $e^{-1} \leq u_n < 1$  ("  $n \in \mathbb{N}$  ) 0.5

2- بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  تزايدية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة. 0.5

3- نضع:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$  0.5

(أ) بين أن:  $e^{-1} \leq 1 \leq 1$  0.25

(ب) حدد قيمة  $1$  0.5

الجزء الثالث: لتكن  $F$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بما يلي:  $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

1- (أ) بين أن الدالة:  $H : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$  دالة أصلية للدالة:  $h : x \mapsto x \ln x$  على المجال  $]0, +\infty[$  0.25

(ب) بين أن:  $\int_1^x t \ln^2(t)dt = \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \int_1^x t \ln(t)dt$  ( $\forall x > 0$ ) 0.5

(ج) استنتج أن:  $F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{x^2}{2} \ln^2(x)$  ( $\forall x > 0$ ) 0,5

2- (أ) بين أن الدالة  $F$  متصلة على المجال  $[0, +\infty[$  0.25

(ب) أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$  ثم استنتج قيمة التكامل  $\int_0^1 f(x)dx$  0.5

التمرين الخامس: (3.5 نقط)

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بما يلي:  $g(0) = \ln 2$  و  $g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$  إذا كان  $x > 0$

1- (أ) بين أن:  $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$  ( $\forall t \in [x, 2x]$ ) ( $\forall x > 0$ ) 0.5

(ب) بين أن:  $e^{-2x} \ln 2 \leq g(x) \leq e^{-x} \ln 2$  ( $\forall x > 0$ ) 0.5

(ج) استنتج أن الدالة  $g$  متصلة على اليمين في 0. 0.25

2- بين أن الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$  ثم أحسب  $g'(x)$  من أجل  $x > 0$  0.75

3- (أ) بين أن:  $-1 \leq \frac{e^{-t} - 1}{t} \leq -e^{-t}$  ( $\forall t > 0$ ) (يمكنك استعمال مبرهنة التزايديات المنتهية) 0.5

(ب) بين أن:  $-1 \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$  ( $\forall x > 0$ ) 0.5

(ج) استنتج أن الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على اليمين في 0. 0.5

انتهى

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة العادية 2015  
- عناصر الإجابة -

NR 24

ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ  
ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ  
ⵏ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

سلم التقط	عناصر الإجابة	التمرين الأول
0.25	التحقق	1- (أ)
0.5	نحصل على: $b = 4$ و $a = 1 + i\sqrt{3}$	(ب)
0.25	التحقق	(ج)
0.5	نحصل على: $b_1 = a(1-i) = (1+i\sqrt{3})(1-i)$	2- (أ)
0.5	التحقق من أن: $b - a = \sqrt{3}(b_1 - a)$	(ب)
0.5	نحصل على: $\frac{b}{b-a} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{p}{6}}$ إذن $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$	(ج)
0.5	النقط O و A و B و C متداورة إذن ، خ $\frac{b}{b-a}$ ، $\frac{c}{c-a}$ ونحصل على $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) \equiv \frac{p}{6} [p]$ تمنح 0,25 في حالة توصل التلميذ إلى النتيجة: $\arg\left(\frac{c}{c-a}\right) \equiv \frac{p}{6} [2p]$	(د)
سلم التقط	عناصر الإجابة	التمرين الثاني
0.25	مبرهنة بوزو انطلاقا من الملاحظة أو أية طريقة صحيحة أخرى	1-
0.5		2- (أ)
0.5	الاستنتاج	(ب)
0.75	تطبيق مبرهنة فيرما ثلاث مرات و تمنح 0,25 عن كل تطبيق	3- (أ)
0.5	5 و 13 أوليين فيما بينهما ..... 0,25	(ب)

	0.25.....	31 و 65 أوليين فيما بينهما	
0.5	1436 [2015] ؛ $x^{1439}$ و $1 = 1436 - 1051$	توظيف العلاقتين:	-4
سلم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين الثالث	
0.5	التشاكل.....0.5	(أ-1)	
0.5	0.25..... $j(, ) = E$	(ب)	
	0.25..... صورة زمرة تبادلية بتشاكل		
0.5	المتساوية	(أ-2)	
0.5	0.25..... الاستنتاج	(ب)	
	0.25..... التبادلية		
0.5	التوزيعية	(ج)	
0.5	0.25..... هو العنصر المحايد	(د)	
	0.25..... هو العنصر المحايد		
0.25	المتساوية	(أ-3)	
0.75	0.25..... استنتاج من السؤال (أ-3) أن كل عنصر من $E$ يخالف $M(-1)$ يقبل مماثل	(ب)	
	0.5..... باقي الخصائص		
سلم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين الرابع	
0.5	0.25..... حساب النهايتين	-1	الجزء الأول
	0.25..... التأويل المبياني		
0.25		(أ-2)	
0.5	0.25..... حساب النهاية	(ب)	
	0.25..... التأويل المبياني		
0.5	0.25..... حساب المشتقة	(ج)	
	0.25..... الرتبة		
0.25	نقطة الإنعطاف	(أ-3)	
0.25		(ب)	

0.5	يتم الأخذ بعين الإعتبار نقطة الإنعطاف و الفرع اللا نهائي و نصف المماس	(ج)	
0.5		-1	الجزء الثاني
0.5	الرتابة.....0.25	-2	
	التقارب..... 0.25		
0.25		(أ-3)	
0.5	$l = 1$	(ب)	
0.25		(أ-1)	الجزء الثالث
0.5		(ب)	
0.5		(ج)	
0.25		(أ-2)	
0.5	$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\frac{3}{4}$ $\int_0^1 f(x) dx = -F(0) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{3}{4}$ لأن الدالة F متصلة على اليمين في 0	(ب)	
سلم التقط	عناصر الإجابة		التمرين الخامس
0.5		(أ-1)	
0.5		(ب)	
0.25		(ج)	
0.75	قابلية الإشتقاق.....0.25	-2	
	$g'(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$		
0.5	تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية $\frac{e^{-t} - 1}{t} = -e^{-s}$ ثم تأطير $e^{-s}$ كما تقبل أية طريقة صحيحة أخرى	(أ-3)	

0.5	توظيف نتيجة السؤال 3-أ)	(ب)
0.5	$0.25 \dots \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} = -1$ $0.25 \dots \text{و تأويل النتيجة} \dots \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -1$	(ج)

