

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2017
- الموضوع -



المركز الوطني للتقوية والامتحانات والتوجيه

NS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	المعامل

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(10 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها
لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3,5 نقط)

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نذكر أن $(M_3(i), +, ')$ حلقة واحدة صفرها المصفوفة

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و وحدتها المصفوفة $(\mathcal{F}, +, ')$ جسم تبادلي.

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

نضع: لكل (a,b) من i^2

$$E = \{M(a,b) / (a,b) \in i^2\}$$

نعتبر المجموعة

$$1- \text{بين أن } E \text{ زمرة جزئية للزمرة } (M_3(i), +) \quad 0,5$$

$$2- \text{نعرف على } M_3(i) \text{ قانون التركيب الداخلي "T" بما يلي:} \quad 0,5$$

$$; \quad (a,b,c,d) \in i^4 \quad M(a,b)TM(c,d) = M(a,b)' A' M(c,d)$$

$$\text{تحقق أن } E \text{ جزء مستقر من } (M_3(i), T)$$

$$3- \text{ليكن } z \text{ التطبيق من } \mathcal{F}^* \text{ نحو } E \text{ الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم } a+ib \text{ (حيث: } (a,b) \in i^2 \text{) بالمصفوفة } M(a,b) \text{ من } E$$

$$\text{أ) تحقق أن } z \text{ تشاكل من } (\mathcal{F}^*, ') \text{ نحو } (E, T) \text{ وأن } z(\mathcal{F}^*) = E^* \text{ حيث: } E^* = E \setminus \{M(0,0)\} \quad 0,75$$

$$\text{ب) استنتج أن } (E^*, T) \text{ زمرة تبادلية ينبغي تحديد عنصرها المحايد } J \quad 0,75$$

$$4- \text{أ) بين أن قانون التركيب الداخلي "T" توزيعي بالنسبة لقانون التركيب الداخلي "+" في } E \quad 0,5$$

$$\text{ب) استنتج أن } (E, +, T) \text{ جسم تبادلي.} \quad 0,5$$

التمرين الثاني: (3,5 نقط)

ليكن m عددا عقديا غير منعدم.

الجزء الأول:

$$\text{نعتبر في المجموعة } \mathcal{F} \text{ المعادلة: } (E) : 2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$$

$$1- \text{تحقق أن مميز المعادلة } (E) \text{ هو: } D = (2im)^2 \quad 0,5$$

$$2- \text{حل في المجموعة } \mathcal{F} \text{ المعادلة } (E) \quad 0,5$$

الجزء الثاني: المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر (O, e_1, e_2)

$$\text{نفترض أن: } \{0,1,i\} \in \mathcal{F} \text{ و } m \in \mathcal{F} \text{ ونضع: } z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1) \text{ و } z_2 = \frac{1-i}{2}(m+i)$$

نعتبر النقط A و B و M و M_1 و M_2 التي ألقاها على التوالي 1 و i و m و z_1 و z_2

$$1- \text{أ) تحقق أن: } z_1 = iz_2 + 1 \quad 0,25$$

(ب) بين أن M_1 هي صورة M_2 بالدوران الذي مركزه النقطة W ذات اللق $w = \frac{1+i}{2}$ و قياس زاويته $\frac{p}{2}$ 0,5

2- (أ) تحقق أن : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m-1}{m-i}$ 0,5

(ب) بين أنه إذا كانت النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية فإن M تنتمي إلى الدائرة (G) التي أقطارها $[AB]$ 0,5

(ج) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط W و M و M_1 و M_2 متداورة. (لاحظ أن: $\frac{z_1 - W}{z_2 - W} = i$) 0,75

التمرين الثالث: (3 نقط)

نقبل أن 2017 عدد أولي و أن $2016 = 2^5 3^2 7$
ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5

1- ليكن الزوج (x, y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ بحيث: $px + y^{p-1} = 2017$

(أ) تحقق أن: $p < 2017$ 0,25

(ب) بين أن: p لا يقسم y 0,5

(ج) بين أن: $[p] \mid 1 \circ y^{p-1}$ ثم استنتج أن p يقسم 2016 0,75

(د) بين أن: $p = 7$ 0,5

2- حدد ، حسب قيم p ، الأزواج (x, y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ التي تحقق : $px + y^{p-1} = 2017$ 1

التمرين الرابع: (10 نقط)

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي:

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (نأخذ: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

1- (أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0 0,25

(ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 0,5

(ج) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$ 0,5

2- (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0,5

(ب) اعط جدول تغيرات الدالة f 0,25

3- (أ) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I يتم تحديدها. 0,75

(ب) ارسم المنحنى (C) . (نأخذ: $f(1); 0,7$ و $f(1); 0,2$ و $4e^{-3}$) 0,5

الجزء الثاني: نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي: $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$

1- بين أن الدالة F متصلة على المجال $[0, +\infty[$ 0,25

2- (أ) باستعمال طريقة المكاملة با لأجزاء بين أن: 0,5

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \quad \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}} dt = e^{-1} - x e^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt$$

(ب) حدد : $\int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}} dt$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$ 0.25

(ج) بين أن: $\int_0^1 f(x) dx = e^{-1}$ 0.5

3- احسب بالسنتيمتر مربع (cm^2) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) والمستقيمت ذات المعادلات:

$$y = 0 \quad \text{و} \quad x = 2 \quad \text{و} \quad x = 0$$

4- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_n = F(n) - F(n+2)$

(أ) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد حقيقي v_n من المجال

$$u_n = 2 \left(1 + \frac{1}{v_n}\right) e^{-\frac{1}{v_n}} \quad [n, n+2] \text{ بحيث:}$$

(ب) بين أن: $2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2 \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) e^{-\frac{1}{n+2}}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) 0,25

(ج) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 0.25

الجزء الثالث:

1- (أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يوجد عدد حقيقي موجب قطعاً وحيد a_n بحيث: $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$ 0.5

(ب) بين أن المتتالية العددية $(a_n)_{n \geq 1}$ تزايدية. 0,25

(ج) تحقق أن: $\frac{1}{a_n} + \ln \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) 0,25

2- (أ) بين أن: $1 - t + t^2 \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t$ ($t \in]0, +\infty[$) 0,25

(ب) بين أن: $-\frac{x^2}{2} \leq x + \ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ ($x \in]0, +\infty[$) 0,5

3- ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً أكبر من أو يساوي 4

(أ) تحقق أن: $a_4^3 \leq 1$ ثم استنتج أن: $a_n^3 \leq 1$ (نقبل أن: $2 \leq e^{\frac{3}{4}}$) 0.5

(ب) بين أن: $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$ (يمكنك استعمال السؤالين 1-ج) و 2-ب) من الجزء الثالث) 0.5

(ج) بين أن: $a_n \leq \sqrt{\frac{n}{6}}$ (يمكنك استعمال السؤالين 3-أ) و 3-ب) ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 0.5

(د) حدد : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{n}}$ 0.5

انتهى