

# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة الاستدراكية 2023



SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS

الموضوع

RS 24

4h

مدة الإجازة

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)

الشعبة أو المسلك

### تعليمات:

- مدة الاختبار هي أربع ساعات.
- يتضمن موضوع الاختبار أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن أن تنجز التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بتحليل.....(10 نقط)
- التمرين 2 يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 نقطة)
- التمرين 3 يتعلق بالبنى الجبرية.....(3.5 نقطة)
- التمرين 4 يتعلق بالحسابيات.....(3 نقط)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر

**التمرين 1 :** (10 نقط)

**الجزء I:**

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم  $n$  ، نعتبر الدالة  $f_n$  المعرفة على  $I = ]0, +\infty[$  بما يلي :

$$f_n(0) = 0 \text{ و } f_n(x) = \sqrt{x}(\ln x)^n \text{ ; } (\forall x \in ]0, +\infty[)$$

وليكن  $(C_n)$  منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- أ) تحقق أن:  $\sqrt{x}(\ln x)^n = (2n)^n \left( x^{\frac{1}{2n}} \ln \left( x^{\frac{1}{2n}} \right) \right)^n$  ;  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$  ، استنتج أن  $f_n$  متصلة على اليمين في 0

0.5

(ب) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

0.25

ج) تحقق أن:  $\frac{f_n(x)}{x} = (2n)^n \left( \frac{\ln \left( x^{\frac{1}{2n}} \right)}{x^{\frac{1}{2n}}} \right)^n$  ;  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$  ، استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$  ثم أول

0.75

مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

د) احسب، حسب زوجية  $n$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x)}{x}$  ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.5

2- أ) بين أن  $f_n$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$  و أن :

$$f_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^{n-1} (2n + \ln x) \text{ ; } (\forall x \in ]0, +\infty[)$$

0.75

ب) تحقق أن لكل  $n \geq 2$  :  $f_n'(x) = 0$  تكافئ  $(x = e^{-2n} \text{ أو } x = 1)$

0.25

ج) ادرس، حسب زوجية  $n$  ، منحنى تغيرات  $f_n$  و اعط جدول تغيراتها.

1

د) بين أنه إذا كان  $n$  فرديا و  $n \geq 3$  فإن النقطة ذات الأفصول 1 هي نقطة انعطاف  $(C_n)$

0.25

**الجزء II:**

1- ليكن  $\beta \in ]1, e[$  عددا حقيقيا ثابتا. نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلي :

$$u_n = f_n(\beta) \text{ ; } (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

أ) بين أن:  $0 < u_n < \sqrt{e}$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

0.25

ب) بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  تناقصية.

0.25

ج) حدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

0.25

2- أ) بين أنه لكل عدد صحيح  $n$  غير منعدم، يوجد عدد حقيقي وحيد  $x_n \in ]1, e[$  بحيث:  $f_n(x_n) = 1$

0.5

ب) بين أن المتتالية المعرفة  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  تزايدية، استنتج أنها متقاربة.

0.75

3- نضع:  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

(أ) بين أن:  $1 < l \leq e$  0.5

(ب) بين أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{l}}$  0.25

(ج) بين أنه إذا كان  $l < e$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(\ln x_n) = -\infty$  0.25

(د) استنتج قيمة  $l$  0.25

### الجزء III:

نضع لكل  $x \in I$  ،  $F(x) = \int_x^1 (f_1(t))^2 dt$

1- (أ) بين أن الدالة  $F$  متصلة على  $I$  0.25

(ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء مرتين، بين أن:

$$(\forall x \in ]0, +\infty[); F(x) = -\frac{x^2}{2} \ln^2(x) + \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{1}{4}(1-x^2) \quad 1$$

2- (أ) احسب  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x)$  0.5

(ب) استنتج قيمة  $F(0)$  0.25

(ج) احسب، بـ  $\text{cm}^3$ ، حجم المجسم المولد بدوران جزء المنحنى  $(C_1)$  الموافق للمجال  $[0,1]$  دورة كاملة حول محور الأفاصيل. (نأخذ  $\|i\| = 1 \text{cm}$ ) 0.5

### التمرين 2: (3.5 نقطة)

يمكن أن ينجز الجزءان I و II بشكل مستقل.

#### الجزء I:

$$(S): \begin{cases} \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = \frac{12}{5} \\ \sqrt{y} \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = \frac{4}{5} \end{cases} \quad \text{نعتبر في } \mathbb{R}_+^2 \text{ النظمة التالية:}$$

1- ليكن  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$  حلا للنظمة (S). نضع:  $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$

(أ) بين أن:  $z + \frac{1}{z} = \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i$  0.25

(ب) بين أن:  $z^2 - \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i\right)z + 1 = 0$ ، استنتج القيم الممكنة للعدد  $z$  0.75

$$\left(\frac{28}{25} + \frac{96}{25}i\right) = \left(\frac{2}{5}(4 + 3i)\right)^2 \quad \text{(نلاحظ أن)}$$

(ج) استنتج قيم الزوج  $(x, y)$  0.25

2- حل في  $\mathbb{R}_+^2$  النظمة (S) 0.5

## الجزء II:

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}, \vec{v})$   
 لتكن  $(U)$  الدائرة التي مركزها  $O$  و شعاعها 1 و  $A(a)$  و  $B(b)$  و  $C(c)$  ثلاث نقط مختلفة مثنى مثنى من  $(U)$

$$0.25 \quad 1- \text{بين أن: } \bar{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow |z|=1 \quad ; \quad (\forall z \in \mathbb{C})$$

$$0.5 \quad 2- \text{أ) المستقيم المار من } A \text{ و الموازي للمستقيم } (BC) \text{ يقطع الدائرة } (U) \text{ في النقطة } P(p)$$

$$\text{بين أن: } p = \frac{bc}{a}$$

$$0.5 \quad \text{ب) المستقيم المار من } A \text{ و العمودي على المستقيم } (BC) \text{ يقطع الدائرة } (U) \text{ في النقطة } Q(q)$$

$$\text{بين أن: } q = -p$$

$$0.5 \quad \text{ج) المستقيم المار من } C \text{ و الموازي للمستقيم } (AB) \text{ يقطع الدائرة } (U) \text{ في النقطة } R(r)$$

بين أن المستقيمين  $(PR)$  و  $(OB)$  متعامدان.

## التمرين 3: (3.5 نقطة)

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{نذكر أن } (M_3(\mathbb{C}), +, \times) \text{ حلقة واحدة و غير تبادلية وحدتها}$$

$$E = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\} \quad \text{ليكن}$$

$$0.25 \quad 1- \text{بين أن } E \text{ زمرة جزئية للزمرة } (M_3(\mathbb{C}), +)$$

2- نرود المجموعة  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  بقانون التركيب الداخلي \* المعروف بما يلي:

$$\forall ((x, z), (x', z')) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C})^2; (x, z) * (x', z') = (x + x', z + z')$$

و نعتبر التطبيق  $\varphi$  المعروف من  $E$  نحو  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  بما يلي:

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3, \varphi(M(a, b, c)) = (a, b + ci)$$

$$0.5 \quad \text{أ) بين أن } \varphi \text{ تشاكل من } (E, +) \text{ نحو } (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, *) \text{ و أن } \varphi(E) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

$$0.25 \quad \text{ب) استنتج أن } (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, *) \text{ زمرة تبادلية.}$$

3- نرود  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  بقانون التركيب الداخلي  $T$  المعروف بما يلي:

$$\forall ((x, z), (x', z')) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C})^2; (x, z) T (x', z') = (x \operatorname{Re}(z') + x' \operatorname{Re}(z), zz')$$

(  $\operatorname{Re}(z)$  هو الجزء الحقيقي للعدد العقدي  $z$  )

$$0.25 \quad \text{أ) بين أن } T \text{ تبادلي.}$$

$$0.25 \quad \text{ب) تحقق أن } (0, 1) \text{ هو العنصر المحايد للقانون } T \text{ في } \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

$$0.5 \quad \text{ج) تحقق أن } (1, i) T (x, -i) = (0, 1) \text{ ، } \forall x \in \mathbb{C} \text{ ؛ استنتج أن } T \text{ غير تجميعي في } \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

$$4- \text{ليكن } G = \{(\text{Im}(z), z) / z \in \mathbb{C}\}$$

( $\text{Im}(z)$  هو الجزء التخيلي للعدد العقدي  $z$ )

(أ) بين أن  $G$  زمرة جزئية للزمرة  $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, *)$  0.25

(نلاحظ أن  $(-\text{Im}(z), -z)$  هو مماثل  $(\text{Im}(z), z)$  بالنسبة للقانون  $*$ )

(ب) ليكن  $\psi$  التطبيق المعرف من  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  نحو  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  بما يلي:  $\psi(z) = (\text{Im}(z), z)$  ;  $\forall z \in \mathbb{C}^*$  0.25

بين أن  $\psi$  تشاكل من  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو  $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*, T)$

(ج) استنتج أن  $(G - \{(0,0)\}, T)$  زمرة تبادلية. 0.5

5- بين أن  $(G, *, T)$  جسم تبادلي. 0.5

#### التمرين 4: (3 نقط)

ليكن  $p$  عددا أوليا فرديا. نضع:  $S = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^{p-1}$

ليكن  $q$  عددا أوليا يقسم  $S$

1- (أ) بين أن  $p$  و  $q$  أوليان فيما بينهما. 0.5

(ب) استنتج أن:  $p^{q-1} \equiv 1 [q]$  0.25

(ج) تحقق أن:  $p^p - 1 = (p-1)S$  ، استنتج أن:  $p^p \equiv 1 [q]$  0.5

2- نفترض أن  $p$  و  $q-1$  أوليان فيما بينهما.

(أ) باستعمال مبرهنة بوزوت (Bézout)، بين أن:  $p \equiv 1 [q]$  0.75

(ب) استنتج أن  $S \equiv 1 [q]$  0.25

3- بين أن:  $q \equiv 1 [p]$  0.75

انتهى

# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

## الدورة الاستعدادية 2023

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS

عناصر الإجابة

RR 24

4h

مدة الإجازة

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)

الشعبة أو المملك

سليم التقييط	عناصر الإجابة	التمرين I		
0.25	تحقق.....	(أ)	I	
0.25	استنتاج.....			
0.25	حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$	(ب)		
0.25	تحقق.....	(ج)		
0.25	استنتاج.....			
0.25	تأويل مبياني.....			
0.25	حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x)}{x}$	(د)		
0.25	تأويل مبياني.....			
0.25	اشتقاق $f_n$ على $]0; +\infty[$ .....	(أ)		-2
0.5	حساب $f'_n(x)$ .....			
0.25	تحقق.....	(ب)		
2x0.5	دراسة تغيرات $f_n$ حسب زوجية $n$	(ج)		
0.25	إذا كان $n$ فرديا و $n \geq 3$ فإن النقطة ذات الأفصول 1 هي نقطة انعطاف $(C_n)$	(د)		
0.25	البرهنة على: $0 < u_n < \sqrt{e} ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$	(أ)	-1	
0.25	تناقصية المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$	(ب)		
0.25	تحديد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	(ج)		
0.5	الوجود و الوحدانية.	(أ)	II	
0.5	تزايدية المتتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$	(ب)		-2
0.25	استنتاج تقارب $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$			
0.25	البرهنة على: $1 \leq \ell \leq e$	(أ)	-3	
0.25	البرهنة على: $\ell \neq 1$			

0.25	البرهنة على: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{l}}$	(ب)		
0.25	البرهنة على: $l < e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(\ln x_n) = -\infty$	(ج)		
0.25	استنتاج قيمة $l$	(د)		
0.25	اتصال الدالة $F$ على المجال $I$	(أ)	-1	III
2x0.5	تطبيق المكاملة بالأجزاء مرتين.	(ب)		
0.5	حساب $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$	(أ)	-2	
0.25	استنتاج $F(0)$	(ب)		
0.5	حجم المجسم.	(ج)		

سلم التقييط	عناصر الإجابة	التمرين 2		
0.25	البرهنة على: $z + \frac{1}{z} = \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i$	(أ)	-1	I
0.25	البرهنة على المتساوية: $z^2 - \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i\right)z + 1 = 0$ .....	(ب)		
0.5	استنتاج القيم الممكنة للعدد $z$ .....	(ج)		
0.25	استنتاج قيم الزوج $(x, y)$	(ج)		
0.5	حل النظمة $(S)$ في $\mathbb{R}_+^2$	-2	-1	II
0.25	البرهنة على التكافؤ.	-1		
0.5	البرهنة على: $p = \frac{bc}{a}$	(أ)		
0.5	البرهنة على: $q = -p$	(ب)		
0.5	البرهنة على: $(PR) \perp (OB)$	(ج)		

سلم التقييط	عناصر الإجابة	التمرين 3	
0.25	$E$ زمرة جزئية للزمرة $(M_3(i), +)$	-1	-2
0.25	$z$ تشكل من $(E, +)$ نحو $(i', \mathbb{F}, *)$ .....	(أ)	
0.25	$z(E) = i' \mathbb{F}$ .....	(ب)	
0.25	زمرة تبادلية $(i', \mathbb{F}, *)$ .	(ب)	-3
0.25	$T$ تبادلي.	(أ)	
0.25	تحقق.	(ب)	
0.25	$T(x, -i) = (0, 1)$ , $(1, i)T(x, -i) = (0, 1)$ .....	(ج)	
0.25	$T$ غير تجميعي .....	(ج)	

0.25	$G$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{Z}, *)$	(أ)	-4
0.25	$\psi$ تشاكل من $(\mathbb{Z}, \times)$ نحو $(\mathbb{Z}, T)$	(ب)	
0.5	زمرة تبادلية $(G - \{(0,0)\}, T)$	(ج)	
0.5	$(G, *, T)$ جسم تبادلي.		-5

سلم التنقيط	عناصر الإجابة	التمرين 4
0.5	$p$ و $q$ أوليان فيما بينهما.	(أ)
0.25	استنتاج: $p^{q-1} \equiv 1 [q]$	(ب)
0.25	تحقق.....	(ج)
0.25	استنتاج.....	
0.75	البرهنة على: $p \equiv 1 [q]$	(أ)
0.25	استنتاج: $S \equiv 1 [q]$	(ب)
0.75	البرهنة على: $q \equiv 1 [p]$	-3