

# المثلث القائم الزاوية و الدائرة

I - خاصية منتصف وتر مثلث قائم الزاوية :

(1) - الخاصية المباشرة :

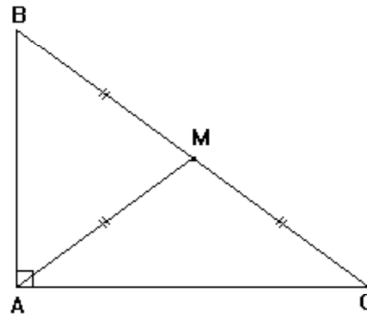
إذا كان مثلث قائم الزاوية فإن منتصف وتره يبعد بنفس المسافة عن رؤوسه.  
أي محاط بدائرة مركزها منتصف الوتر .

► بتعبير آخر :

إذا كان  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  و  $M$  منتصف  $[BC]$   
فإن :  $MA = MB = MC$  أي:  $ABC$  محاط بدائرة مركزها  $M$

► مثال :

$ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  و  $M$  منتصف  $[BC]$  .

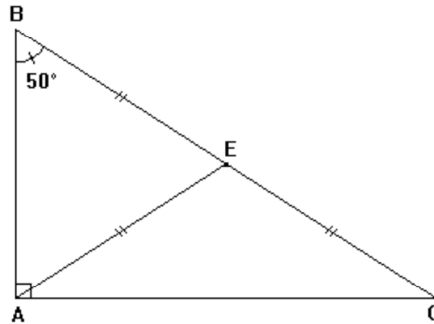


سيكون لدينا :  $MA = MB = MC$  .

تمرين تطبيقي :

$ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  بحيث :  $\hat{ABC} = 50^\circ$  و  $E$  منتصف  $[BC]$  .

- (1) - أرسم شكلا مناسبيا .
- (2) - ماهي طبيعة المثلث  $AEB$  ؟ علل جوابك .
- (3) - استنتج قياس الزاوية  $\hat{EAB}$  .



الحل :

(1) - الشكل :

(2) - طبيعة المثلث  $AEB$  .

نعلم أن :  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  .  
و  $E$  منتصف الوتر  $[BC]$  .

إذن :  $EA = EB = EC$  .

أي :  $EA = EB$  .

و منه فإن المثلث  $AEB$  متساوي الساقين رأسه  $E$  .

(3) - نستنتج قياس الزاوية  $E\hat{A}B$  .

نعلم أن :  $AEB$  مثلث متساوي الساقين في  $E$  .

إذن :  $E\hat{A}B = E\hat{B}A$  .

و بما أن :  $E\hat{B}A = 50^\circ$  فإن :  $E\hat{A}B = 50^\circ$

(2) - الخاصية العكسية :  
خاصية:

إذا كان منتصف أحد أضلاع مثلث يبعد بنفس المسافة عن رؤوسه ، فإن هذا المثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع .

▶ بتعبير آخر :

$ABC$  مثلث و  $E$  منتصف  $[AB]$  .

إذا كان :  $EA = EB = EC$

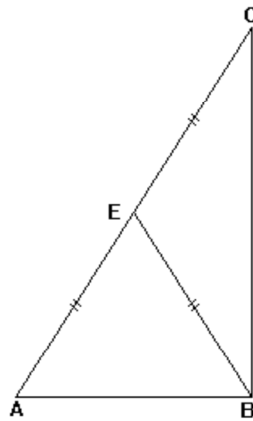
فإن  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $C$  .

تمرين تطبيقي :

$AEB$  مثلث متساوي الساقين في  $E$  و  $C$  مماثلة  $A$  بالنسبة للنقطة  $E$  .

(1) - أرسم شكلا مناسباً .

(2) - أثبت أن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية .



الحل :

(1) - الشكل :

(2) - لنثبت أن  $ABC$  مثلث قائم الزاوية .

نعلم أن :  $AEB$  مثلث متساوي الساقين رأسه  $E$  .

إذن :  $EA = EB$  (1) .

و نعلم أن :  $C$  هي مماثلة  $A$  بالنسبة للنقطة  $E$  .

إذن  $E$  منتصف  $[AC]$  .

ومنه فإن  $EA = EC$  : ② .

من ① و ② نستنتج أن  $EA = EB = EC$  .

وبالتالي :

$E$  منتصف  $[AC]$  } لدينا في المثلث  $ABC$  : و  
 $EA = EB = EC$

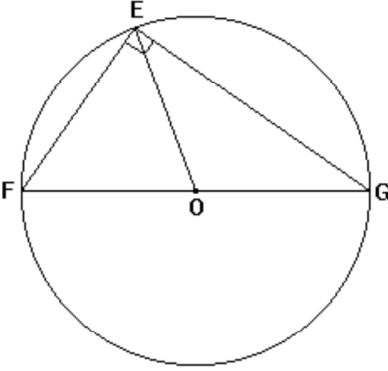
إذن  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $B$  .

## II - المثلث القائم الزاوية و الدائرة :

(1) - مثال :

$EFG$  مثلث قائم الزاوية في  $E$  و  $O$  منتصف  $[FG]$  .

-- لنثبت أن  $O$  هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $EFG$  محددتين شعاعها .



لدينا  $EFG$  مثلث قائم الزاوية في  $E$  .

وبما أن  $O$  منتصف وتره  $[FG]$  فإن  $OE = OF = OG$  ( حسب الخاصية المباشرة )

ومنه فإن  $E$  و  $F$  و  $G$  تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها  $O$  .

وبالتالي فإن  $O$  هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $EFG$  و التي شعاعها  $\frac{FG}{2}$  .

(2) - خاصية :

إذا كان مثلث قائم الزاوية فإن منتصف وتره هو مركز الدائرة المحيطة به و التي شعاعها هو نصف طول وتره

► بتعبير آخر :

إذا كان  $ABC$  مثلثا قائم الزاوية في  $A$  و  $O$  منتصف وتره  $[BC]$

فإن  $O$  هو مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$  و التي شعاعها  $\frac{BC}{2}$

### III - مبرهنة فيثاغورس :

(1) - الخاصية المباشرة :

إذا كان  $ABC$  مثلثا قائم الزاوية في  $A$  فإن :  
 $BC^2 = AB^2 + AC^2$

▶ تطبيق :  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  بحيث :  $AB = 3$  cm و  $BC = 5$  cm .  
لنحسب  $AC$  .

لدينا حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

إذن :

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$AC^2 = 5^2 - 3^2$$

$$AC^2 = 25 - 9$$

$$AC^2 = 16$$

وبما أن  $AC$  عدد موجب فإن :  $AC = 4$  .

(2) - الخاصية العكسية :

إذا كان  $ABC$  مثلثا بحيث :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$   
فإن : هذا المثلث قائم الزاوية في  $A$  .

▶ تطبيق :

$ABC$  مثلث بحيث :  $AC = \frac{3}{5}$  و  $AB = 1$  و  $BC = \frac{4}{5}$  .

نبين أن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية .

لدينا :  $AB^2 = 1^2 = 1$  و  $BC^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$  و  $AC^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

نلاحظ أن :  $1 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25}$  أي :  $AB^2 = AC^2 + BC^2$

و حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية في  $C$  .

(3) - خاصية لأضلاع مثلث قائم الزاوية :

خاصية:

إذا كان مثلث قائم الزاوية فإن طول وتره أكبر من  
طولي ضلعي الزاوية القائمة .

## VI - جيب تمام زاوية حادة :

(1) - تعريف :

جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية يساوي خارج طول الضلع المحادي للزاوية الحادة على طول الوتر

▶ اصطلاحات :

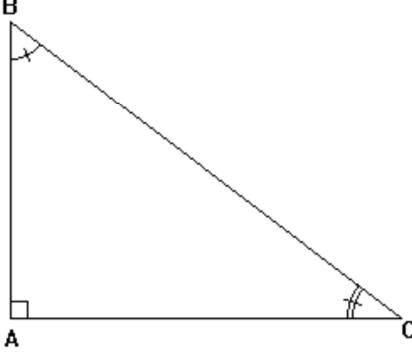
ABC مثلث قائم الزاوية في A

-- الزاويتان الحادتان هما :  $\hat{A}BC$  و  $\hat{A}CB$  .

-- [AB] هو الضلع المحادي للزاوية  $\hat{A}CB$  ، والمقابل للزاوية  $\hat{A}BC$  .

-- [AC] هو الضلع المحادي للزاوية  $\hat{A}BC$  ، والمقابل للزاوية  $\hat{A}CB$  .

-- [BC] هو الوتر .



▶ بتعبير آخر :

ABC مثلث قائم الزاوية في A .

$$\cos \hat{A}CB = \frac{AC}{BC} \quad \text{و} \quad \cos \hat{A}BC = \frac{AB}{BC}$$

▶ ملاحظة هامة :

$$0 < \cos \alpha < 1 \quad : \quad \alpha \text{ قياس زاوية حادة}$$

(2) - مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث :  $AB = 3 \text{ cm}$  و  $AC = 4 \text{ cm}$  . لنحسب  $\cos \hat{A}BC$  .

لنحسب أولاً BC .

بما أن ABC مثلث قائم الزاوية في A فإن حسب مبرهنة فيثاغورس :