

الترتيب والعمليات

نشاط تمهيدي

$x + 9 = y + 15$ و y و x عددا حقيقيان بحيث

1. بين أن $x - y = 6$.

2. استنتج أن $x > y$.

ليكن x عددا حقيقيا بحيث $\sqrt{3} < x < 3$. نعتبر التعبير $\alpha = x^2 + 2x + 4$.

3. أطر التعبير α .

4. بين أن $\alpha = (x + 1)^2 + 3$.

5. نفترض أن $1 < x < 2$ اعط تأطيرا آخر للتعبير α .

6. ما هو أدق تأطير من بين التأطيرين السابقين .

I. الترتيب

قاعدة 1

x و y عددا حقيقيان : $a \leq b$ يعني $a - b \leq 0$.

تطبيق 1

قارن العددين $-3 + 8\sqrt{7}$ و $4 + 8\sqrt{7}$ ثم قارن $(x + 1)^2$ و $4x$ حيث x عدد حقيقي

الحل

لنقارن العددين $(x + 1)^2$ و $4x$
لدينا $(x + 1)^2 - 4x = x^2 + 2x + 1 - 4x$
 $= x^2 - 2x + 1$
 $= (x - 1)^2$
بما أن $(x - 1)^2 \geq 0$ فإن $(x + 1)^2 \geq 4x$

لنقارن العددين $-3 + 8\sqrt{7}$ و $4 + 8\sqrt{7}$.
لدينا $(4 + 8\sqrt{7}) - (-3 + 8\sqrt{7}) = 4 + 8\sqrt{7} + 3 - 8\sqrt{7} = 7$
إذن $(4 + 8\sqrt{7}) - (-3 + 8\sqrt{7}) > 0$
و منه $4 + 8\sqrt{7} > -3 + 8\sqrt{7}$

ملاحظة: لمقارنة عددين حقيقيين يمكن تحديد إشارة فرقيهما.

II. الترتيب والعمليات

1 - الترتيب والجمع

خاصية 1

a و b و c أعداد حقيقية.

$a \leq b$ يعني $a + c \leq b + c$

تطبيق 2

الحل

$$\begin{aligned} \text{لدينا } x + 2\sqrt{2} &\leq \sqrt{2} \\ \text{يكافئ } x + 2\sqrt{2} + (-2\sqrt{2}) &\leq \sqrt{2} + (-2\sqrt{2}) \\ \text{يكافئ } x &\leq \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ \text{يكافئ } x &\leq (1-2)\sqrt{2} \\ \text{يكافئ } x &\leq -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{علما أن } x + 2\sqrt{2} &\leq \sqrt{2} \\ \text{بين أن } x &\leq -\sqrt{2} \end{aligned}$$

2 - الترتيب و الضرب

خاصية 2

$$\begin{aligned} a \text{ و } b \text{ و } m \text{ أعداد حقيقية .} \\ \text{إذا كان } a \leq b \text{ و } m > 0 \text{ فإن } ma \leq mb \\ \text{إذا كان } a \leq b \text{ و } m < 0 \text{ فإن } ma \geq mb \end{aligned}$$

حالة خاصة

$$a \leq b \text{ يعني } -a \geq -b$$

تطبيق 3

$$\begin{aligned} \text{لدينا } \sqrt{3}a + 2 &\leq \sqrt{3} \\ \text{يكافئ } \sqrt{3}a + 2 + (-2) &\leq \sqrt{3} + (-2) \\ \text{يكافئ } \sqrt{3}a &\leq \sqrt{3} - 2 \\ \text{يكافئ } \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}a &\leq \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} - 2) \\ \text{يكافئ } a &\leq \frac{(\sqrt{3} - 2)\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ \text{يكافئ } a &\leq \frac{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} \\ \text{تكافئ } a &\leq \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \text{ عدد حقيقي معلوم .} \\ \text{إذا علمت أن } \sqrt{3}a + 2 &\leq \sqrt{3} \\ \text{بين أن } a &\leq \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \\ \text{(نظيف مقابل 2 أولا ثم نضرب} \\ \text{طرفي المتفاوتة في مقلوب } \sqrt{3} \text{ في} \\ \text{المرحلة الثانية)} \end{aligned}$$

خاصية 3

$$\begin{aligned} a \text{ و } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ أعداد حقيقية موجبة .} \\ \text{إذا كان } a \leq b \text{ و } x \leq y \text{ فإن } a \times x \leq b \times y \end{aligned}$$

تطبيق 4

$$\begin{aligned} a \text{ و } b \text{ عددا حقيقيان موجبان بحيث } a \leq \sqrt{3} - 1 \text{ و } 3b \leq \sqrt{3} + 1 \\ \text{1 - بين أن } ab \leq \frac{2}{3} \\ \text{2 - بين أن } (a + 3b)^2 \leq 12 \end{aligned}$$

لنبين أن $(a + 3b)^2 \leq 12$

لدينا $3b \leq \sqrt{3} + 1$ و $a \leq \sqrt{3} - 1$

إذن $(3b)^2 \leq (\sqrt{3} + 1)^2$ و $a^2 \leq (\sqrt{3} - 1)^2$

يعني $(3b)^2 \leq 4 + 2\sqrt{3}$ و $a^2 \leq 4 - 2\sqrt{3}$

من جهة أخرى حسب السؤال $1 \leq \frac{2}{3} ab$

يعني $6ab \leq 4$ ، نجمع المتفاوتات الثلاث نحصل على

$$a^2 + 6ab + (3b)^2 \leq 4 + 4 + 4$$

ومنه $(a + 3b)^2 \leq 12$

لنبين أن $ab \leq \frac{2}{3}$

لدينا $3b \leq \sqrt{3} + 1$ و $a \leq \sqrt{3} - 1$

إذن $3b \times a \leq (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$

(لأن a و b عددا حقيقيين موجبان)

يكافي $3ab \leq (\sqrt{3})^2 - 1^2$

يكافي $3ab \leq 3 - 1$

يكافي $3ab \leq 2$

يكافي $ab \leq \frac{2}{3}$ و منه $\frac{1}{3} \times 3ab \leq \frac{1}{3} \times 2$

3 - الترتيب و المربع

خاصية 4

a و b عددا حقيقيين موجبان.

$a \leq b$ يعني $a^2 \leq b^2$

$a \leq b$ يعني $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

يمكنك البرهان على الخاصية (أدرس إشارة $a^2 - b^2$)

تطبيق 5

قارن العددين $4\sqrt{5}$ و $3\sqrt{7}$.

الحل

ومنه $(4\sqrt{5})^2 > (3\sqrt{7})^2$

و بالتالي $4\sqrt{5} > 3\sqrt{7}$

لنقارن العددين $4\sqrt{5}$ و $3\sqrt{7}$.

لدينا $(4\sqrt{5})^2 = 4^2 \times (\sqrt{5})^2 = 16 \times 5 = 80$

و $(3\sqrt{7})^2 = 3^2 \times (\sqrt{7})^2 = 9 \times 7 = 63$

ملاحظة: لمقارنة عددين حقيقيين موجبين يمكن مقارنة مربعيهما.

خاصية 5

a و b عددا حقيقيين موجبان قطعاً : $\ll a \leq b \gg$ يعني $\ll \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \gg$.

تطبيق 6

x و y عددا حقيقيين أصغر قطعاً من 1 بحيث $2x \leq y$. بين أن $\frac{1}{1-2x} \leq \frac{1}{1-y}$.

- لنبين أن $\frac{1}{1-2x} \leq \frac{1}{1-y}$ لدينا $2x \leq y$ يكافئ $-2x \geq -y$ يكافئ $1-2x \geq 1-y$ يكافئ $\frac{1}{1-2x} \leq \frac{1}{1-y}$ (لأن $1-y > 0$ و $1-2x > 0$)

III. التاثير

تعريف 1

x و a و b أعداد حقيقية.
- الكتابة $a \leq x \leq b$ تسمى تأطيرا سعته $b-a$ للعدد x .

أمثلة

$1.41 \leq \sqrt{2} \leq 1.42$ تأطيرا للعدد $\sqrt{2}$ سعته 0.01
 $1.5 \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{5}$ تأطيرا للعدد $\sqrt{3}$ سعته $\sqrt{5} - 1.5$.

1 - تأطير مجموع عددين حقيقيين .

قاعدة 2

a و b و c و d أعداد حقيقية.
إذا كان $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$ فإن $a+c \leq x+y \leq b+d$.

تطبيق 7

علما أن $\sqrt{2} \leq x \leq 3$ و $-2\sqrt{2} \leq y \leq -1$ أطر العدد $x+y$

الحل

يعني $(-2+1)\sqrt{2} \leq x+y \leq 3-1$
يعني $-\sqrt{2} \leq x+y \leq 2$
ومنه $-\sqrt{2} \leq x+y \leq 2$

. لنؤطر العدد $x+y$.
لدينا $\sqrt{2} \leq x \leq 3$ و $-2\sqrt{2} \leq y \leq -1$
إذن $-2\sqrt{2} + \sqrt{2} \leq x+y \leq 3 + (-1)$

2 - تأطير فرق عددين حقيقيين

قاعدة 3

لتأطير الفرق $x-y$ نؤطر $-y$ ثم نطبق قاعدة الجمع ($x-y = x+(-y)$).

تطبيق 8

علما أن $1.5 \leq x \leq 3$ و $-2.6 \leq y \leq -1$ أطر العدد $x-y$.

يجب تأطير مقابل y بالضرب في -1

الحل

$$1.5 + 1 \leq x + (-y) \leq 3 + 2.6 \quad \text{يعني}$$

$$2.5 \leq x - y \leq 5.6 \quad \text{يعني}$$

$$\boxed{2.5 \leq x - y \leq 5.6} \quad \text{ومنه}$$

لنؤطر العدد $x - y$.

$$-2.6 \leq y \leq -1 \quad \text{و} \quad 1.5 \leq x \leq 3 \quad \text{لدينا}$$

$$1 \leq -y \leq 2.6 \quad \text{و} \quad 1.5 \leq x \leq 3 \quad \text{يعني}$$

3 - تأطير جداء عددين حقيقيين

قاعدة 4

a و b و c و d أعداد حقيقية موجبة .

إذا كان $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$ فإن $a \times c \leq x \times y \leq b \times d$

تطبيق 9

$$\text{علما أن } 1.5 \leq x \leq 3 \quad \text{و} \quad -\frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{4} \quad \text{أطر العدد } 2xy .$$

الحل

$$\frac{1}{4} \leq -y \leq \frac{1}{2} \quad \text{تكافئ}$$

$$\frac{1}{4} \times 1.5 \leq x \times (-y) \leq \frac{1}{2} \times 3 \quad \text{و منه}$$

$$\frac{1.5}{4} \leq -xy \leq \frac{3}{2} \quad \text{يكافئ}$$

$$-\frac{3}{2} \leq xy \leq -\frac{1.5}{4} \quad \text{يكافئ}$$

لنؤطر العدد $2xy$.

$$-\frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad 1.5 \leq x \leq 3 \quad \text{لدينا}$$

يشترط في تأطير جداء عددين حقيقيين

أن تكون الأعداد المؤطر بها موجبة

$$-\frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{4} \quad \text{لدينا}$$

4 - تأطير خارج عددين حقيقيين

قاعدة 5

لتأطير الخارج $\frac{x}{y}$ نؤطر $\frac{1}{y}$ ثم نطبق قاعدة الجداء $(\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y})$.

$$\text{علما أن } 1.5 \leq x \leq 3 \quad \text{و} \quad -\frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{4} \quad \text{أطر العدد } 2 \times \frac{x}{y} .$$

تطبيق 10

$$2 \leq -\frac{1}{y} \leq 4 \quad \text{تكافئ}$$

$$2 \times 1.5 \leq x \times \left(-\frac{1}{y}\right) \leq 4 \times 3 \quad \text{و منه}$$

$$3 \leq -\frac{x}{y} \leq 12 \quad \text{يكافئ}$$

$$12 \times (-2) \leq (-2) \times \left(-\frac{x}{y}\right) \leq 3 \times (-2) \quad \text{يكافئ}$$

$$-24 \leq 2 \times \frac{x}{y} \leq -6 \quad \text{يكافئ}$$

لنؤطر العدد $2 \times \frac{x}{y}$.

$$-\frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad 1.5 \leq x \leq 3 \quad \text{لدينا}$$

يشترط في تأطير خارج عددين حقيقيين أن تكون

الأعداد المؤطر بها موجبة.

$$-\frac{1}{2} \leq y \leq -\frac{1}{4} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{1}{4} \leq -y \leq \frac{1}{2} \quad \text{تكافئ}$$

5 - تَأطِير تعبير

مثال

نعتبر العددين x و y بحيث $\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ و $2 \leq y \leq 2\sqrt{2}$. أطر التعبير $\frac{x+2y}{x^2+y^2}$.

الحل

يكافئ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq x^2 \leq (\sqrt{2})^2$ و $2^2 \leq y^2 \leq (2\sqrt{2})^2$

يكافئ $\frac{1}{4} \leq x^2 \leq 2$ و $4 \leq y^2 \leq 4 \times 2$

أي $\frac{1}{4} \leq x^2 \leq 2$ و $4 \leq y^2 \leq 8$

إذن $\frac{1}{4} + 4 \leq x^2 + y^2 \leq 2 + 8$

يكافئ $\frac{17}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 10$

يكافئ (2) $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{4}{17}$

نضرب أطراف التأطيرين 1 و 2 طرف بطرف

نحصل على

$$\frac{1}{10} \times \frac{9}{2} \leq \frac{x+2y}{x^2+y^2} \leq \frac{4}{17} \times 5\sqrt{2}$$

$$\frac{9}{20} \leq \frac{x+2y}{x^2+y^2} \leq \frac{20\sqrt{2}}{17}$$

ومنه

لنؤطر التعبير $\frac{x+2y}{x^2+y^2}$

1- لنؤطر $x+2y$

لدينا $2 \leq y \leq 2\sqrt{2}$

يكافئ $2 \times 2 \leq 2 \times y \leq 2 \times 2\sqrt{2}$

يكافئ $4 \leq 2y \leq 4\sqrt{2}$

وسمان $\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

فإن $\frac{1}{2} + 4 \leq x + 2y \leq \sqrt{2} + 4\sqrt{2}$

يكافئ (1) $\frac{9}{2} \leq x + 2y \leq 5\sqrt{2}$

2- لنؤطر $\frac{1}{x^2+y^2}$

لدينا $2 \leq y \leq 2\sqrt{2}$ و $\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

IV. المحسبة و القيمة المطلقة

مثال: باستعمال المحسبة نتوصل إلى أن $\sqrt{15} \approx 3.872982.....$

القيمة 3.872982 تسمى قيمة مقربة للعدد $\sqrt{15}$.

و يمكن كذلك تأطير العدد $\sqrt{15}$ بواسطة عددين عشريين.

مثال 1: $3.87 \leq \sqrt{15} \leq 3.88$ يسمى تأطيرا للعدد $\sqrt{15}$ سعته 0.01.

- القيمة 3.88 تسمى قيمة مقربة بإفراط للعدد $\sqrt{15}$ إلى 10^{-2} .

- القيمة 3.87 تسمى قيمة مقربة بتفريط للعدد $\sqrt{15}$ إلى 10^{-2} .

مثال 2: $3.872 \leq \sqrt{15} \leq 3.873$ يسمى تأطيرا للعدد $\sqrt{15}$ سعته 0.001.

- القيمة 3.873 تسمى قيمة مقربة بإفراط للعدد $\sqrt{15}$ إلى 10^{-3} .

- القيمة 3.872 تسمى قيمة مقربة بتفريط للعدد $\sqrt{15}$ إلى 10^{-3} .