

## الجزء الأول : الميكانيك – Mécanique

### الوحدة 9 : توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت

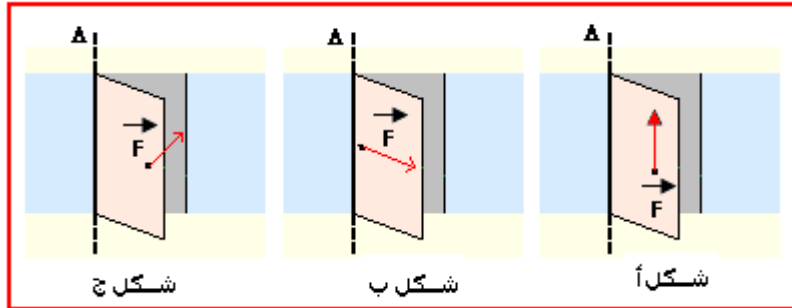
#### 1. أمثلة لأجسام قابلة للدوران حول محور ثابت :

هناك أمثلة متعددة في حياتنا اليومية لأجسام قابلة للدوران حول محور ثابت :



لجعل هذه الأجسام تدور حول محور ثابت ينبغي تطبيق قوة أو قوتين، غير أن كل القوى لا يمكنها أن تؤدي بالضرورة إلى دوران هذه الأجسام حول هذا المحور. كذلك معرفة شدة القوة غير كاف للتنبؤ بمفعولها الدوراني.

#### 2. مفعول القوة على دوران جسم صلب



- ◆ كل قوة موازية لمحور الدوران ( $\Delta$ ) ( الشكل أ ) ليس لها مفعول دوراني على الجسم.
- ◆ كل قوة خط تأثيرها يتقاطع مع محور الدوران ( $\Delta$ ) ( الشكل ب ) ليس لها مقدرة على دوران الجسم.
- ◆ كل قوة غير موازية لمحور الدوران ( $\Delta$ ) ( الشكل ج ) ولا تقطعه لها مفعول دوراني على الجسم .
- ◆ كلما ابتعدنا عن محور الدوران ( $\Delta$ ) ( للباب كلما كان مفعول نفس القوة أكبر. أي أن هناك علاقة بين شدة القوة F والمسافة الفاصلة بين خط تأثيرها ومحور الدوران.

#### 3. عزم قوة بالنسبة لمحور الدوران :

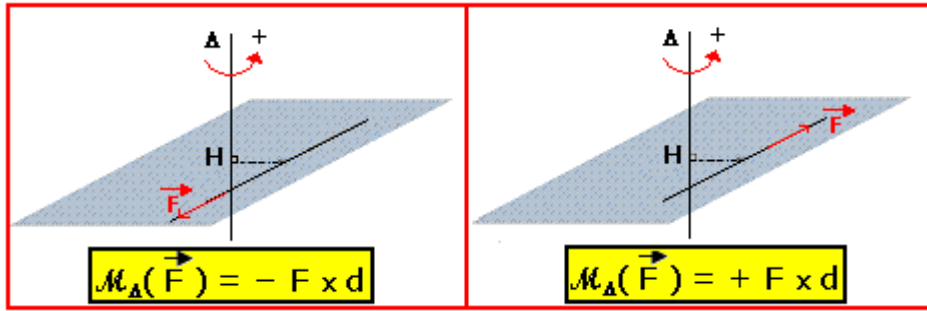
##### 3.1. تعريف عزم القوة بالنسبة لمحور الدوران ( $\Delta$ ) :

نسمي عزم قوة بالنسبة لمحور الدوران ( $\Delta$ ) المقدار الفيزيائي الذي يعبر عن مقدرة القوة على دوران الجسم حول هذا المحور نرسم له بـ  $M_{\Delta}(\vec{F})$  وهو يساوي جداء الشدة F والمسافة d الفاصلة بين المحور ( $\Delta$ ) وخط تأثيرها.

$$N \times m \rightarrow M_{\Delta}(\vec{F}) = \pm F \times d$$

### 3. 2. عزم قوة مقدار حبري :

يتعلق مقدار عزم قوة بالمنحى الموجب الاعباطي الذي تم اختياره كمنحى موجب للدوران



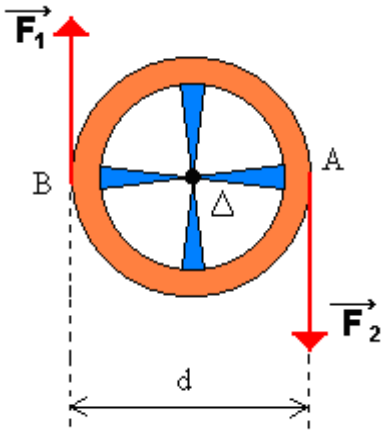
إذا كان بإمكان القوة إدارة الجسم في المنحى الموجب الذي تم اختياره فإن عزمها يكون موجبا.

إذا كان بإمكان القوة إدارة الجسم في المنحى المعاكس للمنجى الموجب الذي تم اختياره فإن عزمها يكون

سالبا.

### 4. عزم مزدوجة قوتين

#### 1. تعريف مزدوجة قوتين :



مثال : مقود السيارة.  
عندما يسלט السائق القوتان  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$   
يدور المقود حول محور دورانه.  
القوتان  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  تكونان مزدوجة قوتين إذ  
تتوفر فيهما الشروط التالية :

- القوتان متوازيتان منفصلتان تفصل بينهما المسافة d.
- القوتان ذا منحيان متعاكسان.
- القوتان لهما نفس الشدة F تسمى الشدة المشتركة لمزدوجة قوتين (  $F = F_1 = F_2$  ).

يمكن التعبير عن هذه الشروط كما يلي :

#### الشرط الأول :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

#### الشرط الثاني :

القوتان  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  متوازيتان منفصلتان

### 4. 2. صيغة عزم مزدوجة قوتين :

#### تعريف 1 :

إن عزم مزدوجة القوتين  $\vec{C} = ( \vec{F}_1 , \vec{F}_2 )$  بالنسبة لمحور الدوران يساوي مجموع عزوم هاتين القوتين.

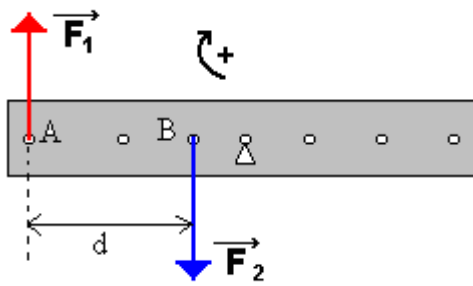
$$M_{\Delta} ( \vec{C} ) = M_{\Delta} ( \vec{F}_1 ) + M_{\Delta} ( \vec{F}_2 )$$

#### تعريف 2 :

إن عزم مزدوجة القوتين  $\vec{C} = ( \vec{F}_1 , \vec{F}_2 )$  على إحداث دوران جسم مستقل عن محور لدوران □ مستقل عن موضعه.

$$M_{\Delta} ( \vec{C} ) = M ( \vec{C} )$$

## مثال :



$$M_{\Delta}(\vec{F}_1) > 0, M_{\Delta}(\vec{F}_2) < 0$$

$M_{\Delta}(\vec{C}) > 0$  تتبع القوة التي تبعد أكثر عن محور الدوران

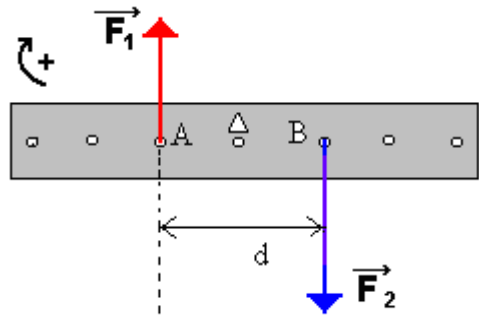
$$M_{\Delta}(\vec{C}) = M_{\Delta}(\vec{F}_1) + M_{\Delta}(\vec{F}_2)$$

$$= F_1 \times AG + (-F_2 \times BG)$$

لدينا :  $F = F_1 = F_2$

$$M_{\Delta}(\vec{C}) = F \times (AG - BG)$$

$$= F \times AB = F \times d$$



$$M_{\Delta}(\vec{F}_1) > 0, M_{\Delta}(\vec{F}_2) > 0$$

$$\Rightarrow M_{\Delta}(\vec{C}) > 0$$

$$M_{\Delta}(\vec{C}) = F \times d$$

من هنا نستنتج أن عزم مزدوجة قوتين مستقل عن المحور ( $\Delta$ ).

### تعريف 3 :

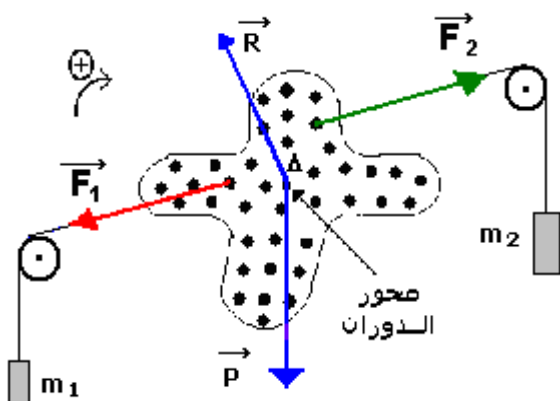
إن عزم مزدوجة القوتين ( $\vec{C}$ ) مقدار جبري يعبر عنه بالعلاقة :

$$M(\vec{C}) = \pm F \times d$$

### 5. توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت - مبرهنة العزم

#### 5.1. تجربة :

لإنجاز هذه الدراسة نستعمل جسما صلبا قابلا للدوران حول المحور ( $\Delta$ ) بدون احتكاك حيث ( $\Delta$ ) يمر من مركز ثقله.



### 5.2. دراسة توازن الجسم

جهد القوى المطبقة على الجسم ( $S$ ).

$\vec{P}$  : وزن الجسم

$\vec{F}_1$  : القوة المطبقة من طرف الكتلة  $m_1$

$\vec{F}_2$  : القوة المطبقة من طرف الكتلة  $m_2$

$\vec{R}$  : القوة المطبقة من المحور

بما أن الجسم في توازن يمكن أن نكتب :

$$\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R} = \vec{0}$$

**ملحوظة :** اتجاه ومنحى القوة المطبقة من طرف المحور غير معروف لكن نستنتجه تقريبا وذلك بإنشاء خط مضلعي مغلق.

انطلاقاً من قيم عزم القوى المطبقة على الجسم القابل للدوران يمكن أن نبين أن :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{F}_1) + M_{\Delta}(\vec{F}_2) + M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

### 5.2. نص مبرهنة العزوم :

عندما يكون جسم صلب في توازن قابل للدوران حول محور ثابت ( □ ) أيًا كان، فإن مجموع عزوم القوى المطبقة على الجسم بالنسبة لهذا المحور مجموع منعدم.

$$\Sigma M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$

### 6. الشروط العامة لتوازن جسم صلب :

عندما يكون جسم صلب في توازن وهو خاضع لعدة قوى فإنه يتحقق الشرطين العامين التاليين :

**الشرط الأول :** مجموع متجهات القوى مجموع منعدم

$$\Sigma(\vec{F}) = \vec{0}$$

**الشرط الثاني :** مجموع عزوم القوى بالنسبة للمحور  $\Delta$  أي كان مجموع منعدم

$$\Sigma M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$

### 7. تطبيق :

نعتبر قضيباً متجانساً طوله  $AB = 80 \text{ cm}$  كتلته  $m = 4 \text{ kg}$  في توازن أفقي قابل للدوران بدون احتكاك حول محور  $\Delta$  يمر من  $O$  بحيث  $OA = 20 \text{ cm}$ .

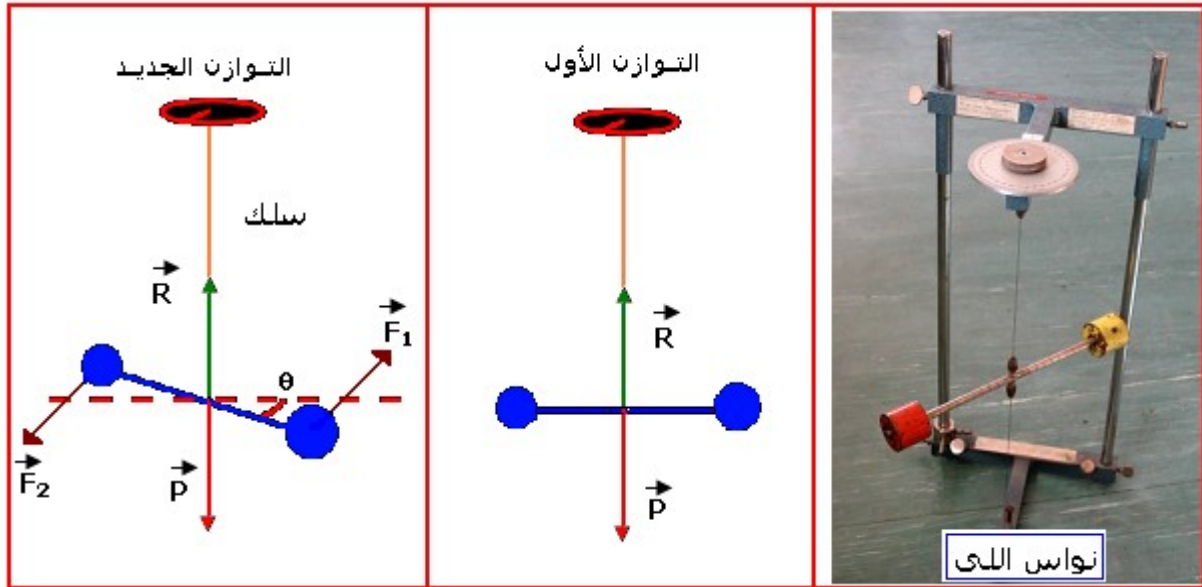
نثبت عند النقطة  $B$  خيطاً يمر بمجرى بكرة ويحمل في طرفه الآخر كتلة  $m$ .

حدد قيمة  $m$  علماً أن اتجاه جزء الخيط المشدود إلى القضيب يكون زاوية  $\alpha = 30^\circ$  مع المستقيم المار من  $O$  و  $G$ . ( الجواب  $m = 2,67 \text{ kg}$  ).

### 8. مزدوجة اللي Couple de Torsion

#### 8.1. تعريف مزدوجة اللي :

ندرس توازن قضيب معلق بسلك فولاذي ( سلك اللي )، الجهاز المستعمل يحمل اسم نواس اللي.



## التوازن الأول :

جهد القوى المطبقة على القضيب :  
وزن القضيب :  $\vec{P}$   
القوة المطبقة من طرف السلك :  $\vec{R}$

### شروط توازن القضيب :

#### الشرط الأول :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

#### الشرط الثاني :

القوتان لهما نفس خط التأثير

## التوازن الجديد :

جهد القوى المطبقة على القضيب :  
وزن القضيب :  $\vec{P}$   
القوة المطبقة من طرف السلك :  $\vec{R}$   
مزدوجة قوتين :  $\vec{C}$   
قوة الارتداد المسلطة من طرف جميع مولدات السلك :  $\Sigma \vec{f}_i$

### شروط التوازن :

#### الشرط الأول :

$$\vec{P} + \vec{R} + \Sigma \vec{f}_i + \vec{C} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \Sigma \vec{f}_i = \vec{0}$$

وبما أن  $\Sigma \vec{f}_i$  تدير القضيب فإن لها خاصيات مزدوجة قوتين تسمى مزدوجة اللي

#### الشرط الثاني :

$$\Sigma M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$

$$M(\vec{C}) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\Sigma \vec{f}_i) = 0$$

$$\Rightarrow M(\vec{C}) + M_{\Delta}(\Sigma \vec{f}_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow M(\vec{C}) = -M_{\Delta}(\Sigma \vec{f}_i)$$

تبين هذه العلاقة أن عزم مزدوجة اللي مستقل عن محور الدوران ( $\Delta$ )

$$M_{\Delta}(\Sigma \vec{f}_i) = M(\Sigma \vec{f}_i)$$

## 8.2. صيغة عزم مزدوجة اللي :

عندما يلتوي القضيب بزواية  $\theta$  فإن السلك يلتوي بنفس الزاوية و بالتالي يطبق مزدوجة اللي  $\Sigma \vec{f}_i$  بحيث عزمها يتناسب إطرادا مع الزاوية  $\theta$  وهي زا يعبر عنه بالعلاقة

$$M(\Sigma \vec{f}_i) = M_{(C)} = -C \times \theta$$

- : يعني أن مزدوجة اللي قوة ارتداد أي تحاول إعادة السلك إلى موضعه البدئي.

$C$  : ثابتة موجبة تسمى ثابتة لي السلك. بحيث لكل سلك ثابتة لي تتميزه ( قيمة  $C$  تتعلق بنوع، طول وسمك السلك ).

$\theta$  . زاوية الدوران أو زاوية الالتواء وحدتها في النظام العالمي للوحدات هي الراديان.