المظاهر الطاقية

I ـ شغل قوة

1 ـ شغل قوة ثابتة (تذكير)

نعبر عن شغل قوة ثابتة $\vec{F}$ عند انتقال نقطة تأثيرها من A إلى نقطة A بالعلاقة التالية :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)=\vec{F}.\overrightarrow{AB}=F.AB.\cos\alpha$$

بحيث أن α الزاوية بين $\vec{F}$ و $\overrightarrow{AB}$

AB المسافة الفاصلة بين النقطة A و النقطة B تسمى بالانتقال ونعبر عنها بالمتر (m)

F شدة القوة ب (N)

$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)$ شغل القوة $\vec{F}$ ونعبر عنه بالجول (J)

* لا يتعلق شغل قوة ثابتة بالمسار المتبع من طرف نقطة التأثير بل يتعلق بموضعيها البدئي والنهائي .

2 ـ الشغل الجزئي لقوة غير ثابتة

نعتبر قوة $\vec{F}$ غير ثابتة ونقطة تأثيرها تنتقل من A إلى B .

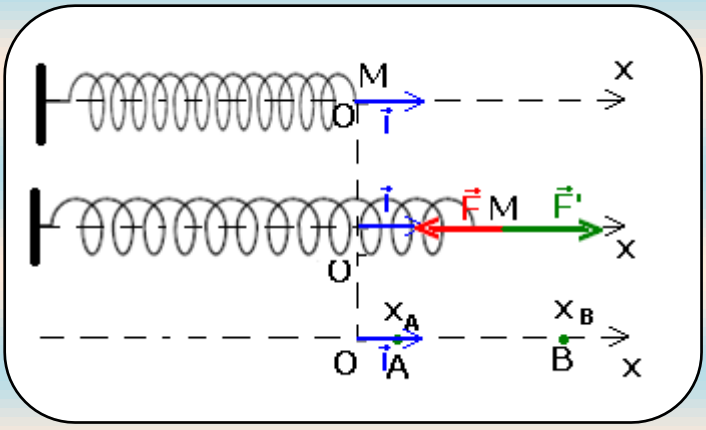
لحساب شغل غير ثابتة نجزئ المسار إلى مسارات جزئية $\overrightarrow{\delta\ell}$ متناهية في الصغر تسمح باعتبار $\vec{F}$ ثابتة في كل منها .

تعبير الشغل الجزئي للقوة $\vec{F}$ خلال الانتقال الجزئي $\overrightarrow{\delta\ell}$ هو : $\delta W\left(\vec{F}\right)=\vec{F}.\overrightarrow{\delta\ell}$

الشغل الكلي للقوة المتغيرة $\vec{F}$ هو مجموع الأشغال الجزئية :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)=\sum_A^B\delta W\left(\vec{F}\right)=\sum_A^B\vec{F}.\overrightarrow{\delta\ell}$$

3 ـ شغل القوة الخارجية المطبقة من طرف نابض



نعتبر نابضا $\mathcal{R}$ ذا لفات غير متصلة صلابته k وكتلته مهملة ، في وضع أفقي على مستوى أفقي . نثبت أحد طرفيه بحامل ثابت .

نطبق على النابض عند طرفه الحر M قوة $\vec{F}'$ ، فيطال النابض بحيث تنتقل النقطة M بالمقدار $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}$.

تمثل النقطة O موضع M في الحالة البدئية للنابض .

حسب القانون الثالث لنيوتن ، قانون التأثيرات المتبادلة ، فإن النابض يطبق قوة $\vec{F}$ على المجرب وهي قوة ارتداد $\vec{F}=-\vec{F}'$ بحيث أن $\vec{F}=-kx\vec{i}$ أي أن $\vec{F}'=kx\vec{i}$ أي أن $\vec{F}'$ تتعلق بالأفصول x إذن فهي غير ثابتة .

تعبير شغل القوة $\vec{F}'$ عندما ينتقل طرف النابض من A إلى B

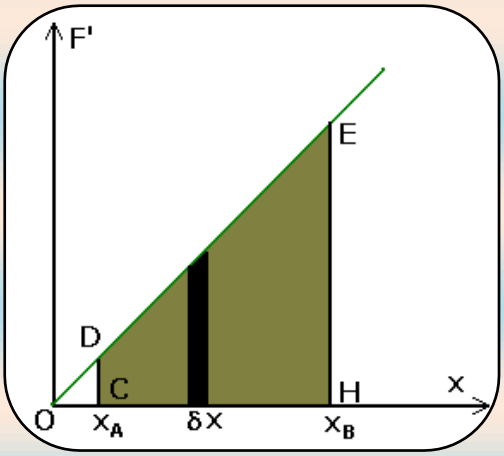
$$W_{A\to B}\left(\vec{F}'\right)=\sum_A^B\delta W\left(\vec{F}'\right)=\sum_A^B\vec{F}'.\overrightarrow{\delta\ell}=\sum_A^B kx\vec{i}.\delta x.\vec{i}$$

يمكن استعمال طريقتين لتحديد هذا المجموع :

أ ـ الطريقة الميانية :

في نظمة محورين نمثل تغيرات F بدلالة الأفصول x وهي إطالة النابض . $F=kx$ أي أنها دالة خطية تمر من أصل النظمة . يوافق الشغل الجزئي $\delta W\left(\vec{F}'\right)=k.x.\delta x$ مساحة المستطيل الجزئي بالأسود المبين في الشكل أسفله .

Moutamadris.ma



عند انتقال النقطة M من A أفصولها x_A إلى B أفصولها x_B ،
فإن الشغل الكلي للقوة $\vec{F}'$ يوافقه مجموع مساحات
المستطيلات الجزئية ويساوي مساحة شبه المنحرف CDEF

$$W_{A\to B}(\vec{F}') = a_{CDEF} = a_{OEH} - a_{OCD}$$

$$W_{A\to B}(\vec{F}') = \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2$$

ب ـ الطريقة التحليلية

نعوض في العلاقة السابقة المجموع $\sum$ بالتكامل $\int$ ولانتقال الجزئي $\delta\ell$ ب المقدار التفاضلي dx فنحصل على العلاقة التالية :

$$W_{A\to B}(\vec{F}') = \int_{x_A}^{x_B} kxdx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_A}^{x_B}$$

$$W_{A\to B}(\vec{F}') = \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2$$

خلاصة :

تعبير شغل قوة المطبقة من طرف مجرب على الطرف الحر لنابض يجعله ينتقل من موضع A إلى موضع B أفصولهما على التوالي x_A و x_B هو : $W_{A\to B}(\vec{F}') = \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2$.

وبما أن $\vec{F} = -\vec{F}'$ فإن شغل قوة الارتداد المطبقة من طرف النابض هو : $W_{A\to B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$

يتعلق شغل قوة الارتداد $\vec{F}$ بالموضع البدئي والموضع النهائي لمركز قصور الجسم .

التمرين 1

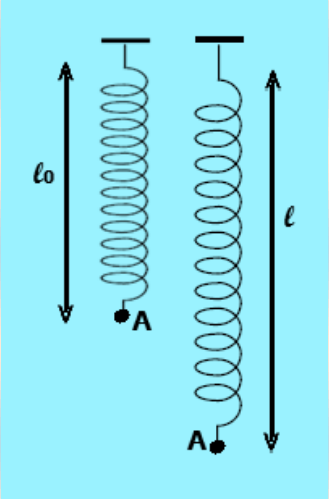
أحسب شغل القوة المطبقة على A الطرف الحر لنابض صلابته $K = 50,0N/m$
عندما يتغير طوله بالمقدار x انطلاقا من طوله البدئي ℓ_0 في الحالتين التاليتين :

1 ـ إطالة النابض من $x_0 = 0cm$ إلى $x_1 = 5cm$

2 ـ انضغاط النابض من $x_0 = 0cm$ إلى $x_2 = -5cm$

3 ـ عندما تتغير x من x_2 إلى x_1

4 ـ استنتج قيمة شغل القوة المطبقة من طرف النابض على يد المجرب



الجواب :

$\vec{F}'$: القوة المطبقة على A ، الطرف الحر للنابض :

لدينا :

1 ـ $W_{A_0\to A_1}(\vec{F}') = \int_{x_0}^{x_1} Kxdx = \frac{1}{2}K\left(x_1^2 - x_0^2\right) = K\frac{x_1^2}{2} = 6,5\times10^{-2}J$

Moutamadris.ma

2 ـ $W_{A_0\to A_2}(\vec{F}') = \int_{x_0}^{x_2} Kxdx = \frac{1}{2}K\left(x_2^2 - x_0^2\right) = K\frac{x_2^2}{2} = 6,5\times10^{-2}\,J$

3 ـ $W_{A_2\to A_1}(\vec{F}') = \int_{x_2}^{x_1} Kxdx = \frac{1}{2}K\left(x_1^2 - x_2^2\right) = 0J$

4 ـ

$$W_{A_0\to A_1}(\vec{F}) = -W_{A_0\to A_1}(\vec{F}') = -6,5\times10^{-2}\,J$$
$$W_{A_0\to A_2}(\vec{F}) = -W_{A_0\to A_2}(\vec{F}') = -6,5\times10^{-2}\,J$$
$$W_{A_2\to A_1}(\vec{F}) = -W_{A_2\to A_1}(\vec{F}') = 0J$$

II ـ طاقة الوضع المرنة

عندما يكون النابض مضغوطا أو مطالا فإنه يختزن يختزن طاقة ترتبط بحالة تشوهه تسمى طاقة الوضع المرنة . في الحالة التي يكون فيها النابض لا مطالا ولا مضغوطا فإن طاقة الوضع المرنة تكون منعدمة .

عندما يطبق المجرب قوة $\vec{F}'$ على الطرف الحر للنابض لجعل نقطة تأثيره تنتقل من النقطة A أفصولها x_A في حالة سكون إلى النقطة B أفصولها x_B حيث توجد كذلك في حالة سكون ، فإنه حسب مبرهنة الطاقة الحركية لدينا :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{A\to B}(\vec{F}) + W_{A\to B}(\vec{F}') = 0 \Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}) = -W_{A\to B}(\vec{F}')$$
$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

أي أن الشغل المطبق من طرف المجرب على طرف النابض يساوي تغير شكل من أشكال الطاقة للمجموعة { المجرب ، النابض } وهي طاقة وضع مرنة .

نضع أن $W_{A\to B}(\vec{F}) = E_{Pe}(A) - E_{Pe}(B)$

نعرف طاقة الوضع المرنة لمجموعة مكونة من { جسم ـ نابض } في وضع أفقي هي الطاقة التي تختزنها هذه المجموعة من جراء تشويه الجسم وتعبيرها هو : $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + C$.

C ثابتة تحدد انطلاقا من الحالة المرجعية لطاقة الوضع المرنة .

وبصفة عامة نختار طاقة الوضع المرنة منعدمة في الموضع الموافق للأفصول $x = 0$ أي عندما يكون النابض لا مطال ولا مضغوط ، حيث $(C = 0)$ فيكون تعبير طاقة الوضع المرنة هو : $E_{pe} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$ وحدتها في النظام العالمي للوحدات هي الجول . و $\Delta\ell = x$ إطالة النابض في حالة نابض أفقي و k صلابته .

ملحوظة : $\Delta E_{pe}^{B}{}_{A} = -W_{A\to B}(\vec{F})$

تابع التمرين 1 :

5 ـ استنتج الوضع المرنة في كل حالة باعتبار أن طاقة الوضع المرنة منعدمة عندما يكون النابض غير مشوه .

الجواب :

$E_{pe} = \frac{1}{2}K\Delta\ell^2 + Cte$ ، **حسب الحالة المرجعية لدينا** $x = \Delta\ell = 0$ **أي أن** $Cte = 0$ **وبالتالي فإن** $E_{pe} = \frac{1}{2}K\Delta\ell^2$

أو بطريقة أخرى : $\Delta E_{pe}^{B}{}_{A} = -W_{A\to B}(\vec{F})$

أي أن

Moutamadris.ma

$$\Delta E_{pe}^{A_1/A_0} = -W_{A_0\to A_1}(\vec{F}) = 6,5\times10^{-2}\,J$$

$$\Delta E_{pe}^{A_2/A_0} = -W_{A_0\to A_2}(\vec{F}) = 6,5\times10^{-2}\,J$$

$$\Delta E_{pe}^{A_1/A_2} = -W_{A_2\to A_1}(\vec{F}) = 0J$$

III ـ الدراسة الطاقية للمجموعة { جسم صلب ، نابض } في وضع أفقي .

1 ـ الطاقة الحركية للمجموعة .

يتوفر الجسم الصلب غير قابل للتشويه كتلته m وسرعته v في إزاحة بالنسبة لمرجع معين ، على طاقة حركية E_C بحيث $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ وحدة E_C في النظام العالمي للوحدات هي الجول .

بما أن الجسم في حركة إزاحة ، فإن سرعة الجسم الصلب هي سرعة مركز قصوره .

بالنسبة لمتذبذب مرن ، الطاقة الحركية لهذا المتذبذب هي الطاقة الحركية للجسم الصلب .

$x = x_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$ بحيث أن $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

2 ـ الطاقة الميكانيكية للمجموعة .

تعريف بالطاقة الميكانيكية :

في مرجع معين الطاقة الميكانيكية لمجموعة ما في لحظة t هي مجموع الطاقة الحركية وطاقة الوضع لهذه المجموعة .

طاقة الوضع لمتذبذب مرن أفقي هي مجموع طاقة وضعه الثقالية وطاقة وضعه المرنة $E_P = E_{pp} + E_{Pe}$

نختار الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية منطبقة مع المستوى الأفقي المار من G مركز قصور المتذبذب $(E_{PP}=0)$ نحصل على $E_P = E_{Pe}$ أي أن تعبير الطاقة الميكانيكية لمجموعة مكونة من جسم صلب ونابض أفقي هو : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + C$

باختيار حالة مرجعية لطاقة الوضع المرنة وهي : $E_{pe}=0$ عند التوازن أي ان $x=0$ نحصل على التعبير التالي :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

أ ـ حالة إهمال الاحتكاكات

في هذه الحالة يبقى وسع التذبذبات x_m ثابتا ، فنحصل على نظام دوري دوره الخاص T_0 ، فيكون عندنا انحفاظ الطاقة الميكانيكية للمجموعة . $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ مهما كانت قيم x و v

ـ عندما تأخذ الاستطالة قيمتها القصوية x_m فإن الطاقة الميكانيكية $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2$

ـ عنما تكون الاستطالة منعدمة $x=0$ فإن $E_m = \frac{1}{2}mv_m^2$ وبالتالي فإن $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$ ومنه نستنتج العلاقة :

$$v_m = x_m\sqrt{\frac{k}{m}}$$

كذلك يمكن أن نحصل على المعادلة التفاضلية للمتذبذب انطلاقا من الطاقة الميكانيكية أي بعملية اشتقاقها بالنسبة للزمن :

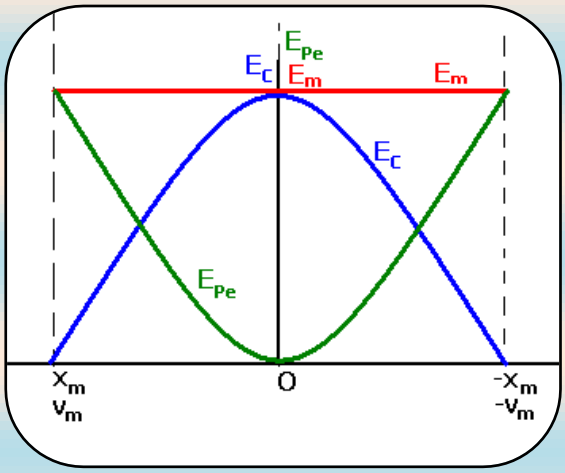
$$\frac{dE_m}{dt} = kx\frac{dx}{dt} + m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Moutamadris.ma

مخططات الطاقة للنواس المرن الأفقي :

تمثيل على نفس النظمة E_{Pe} و E_C و E

خلاصة : في غياب الاحتكاكات تنحفظ الطاقة الميكانيكية لنواس مرن أفقي وحر .

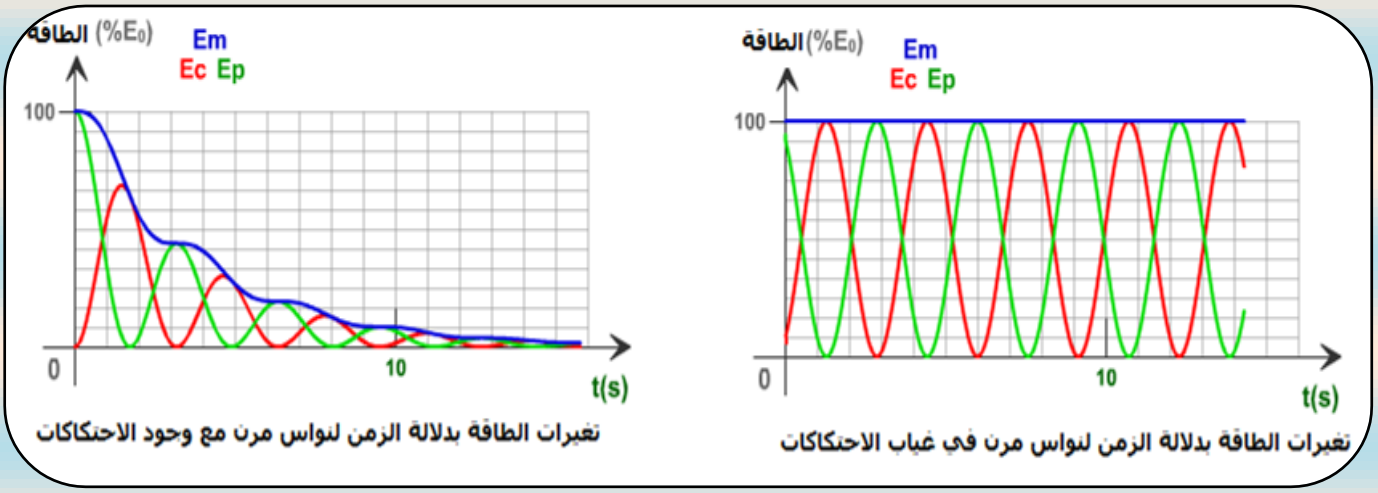


ب ـ حالة احتكاكات غير مهملة .

في هذه الحالة يتناقص وسع الذبذبات تدريجيا مع الزمن t ، فنحصل على نظام شبه دوري أو لا دوري في حالة احتكاكات مهمة .

يعزى تناقص الطاقة الميكانيكية للمجموعة مع الزمن t إلى الانتقال الحراري (وجود الاحتكاكات)

شكل منحنى تغيرات E_{Pe} و E_C و E بدلالة الزمن :



IV ـ الدراسة الطاقية لنواس اللي .

1 ـ الطاقة الحركية للمجموعة .

المجموعة المتذبذبة هي { القضيب ـ السلك }

بما أن السلك كتلته مهملة فإن الطاقة الحركية لنواس اللي تنحصر في الطاقة الحركية للقضيب ، وبما أنه في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) سيكون تعبير الطاقة الحركية على الشكل التالي : $E_C = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2$ حيث J_Δ عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور (Δ) المجسد من طرف السلك و $\frac{d\theta}{dt}$ السرعة الزاوية لدوران القضيب .

2 ـ طاقة الوضع للي المجموعة .

نعتبر نواس لي ثابتة ليه C في حركة تذبذبية حول محور (Δ) يجسده السلك ، عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور (Δ) هو J_Δ .

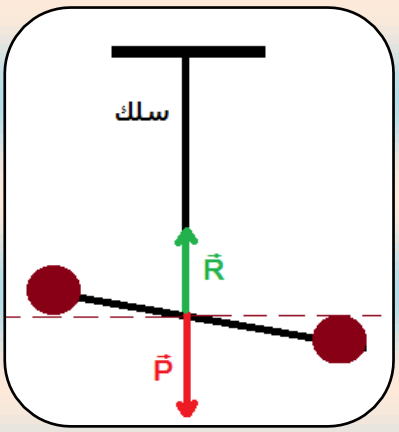
نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على هذه المجموعة بين موضعين أفصولهما الزاوي تباعا : θ_1 و θ_2 .

جرد القوى المطبقة على القضيب أثناء حركته : $\vec{P}$ وزن القضيب وتأثير السلك على القضيب $\vec{R}$ وإلى مزدوجة اللي عزمها $\mathcal{M}_C = -C.\theta$ ،

نطبق المبرهنة : $\frac{1}{2}J_\Delta\theta_2^2 - \frac{1}{2}J_\Delta\theta_1^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W_C$ بما أن خط تأثير القوتين $\vec{P}$ و $\vec{R}$ يتقاطعان مع المحور (Δ) فإن شغلهما منعدم أي أن $\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}J_\Delta\theta_1^2 = W_C$

Moutamadris.ma

نعلم أن المعادلة الزمنية لحركة المجموعة المتذبذبة هي على الشكل التالي : $\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ نأخذ $\varphi = 0$ لتبسيط العمليات الحسابية .



أي أن $\theta_1 = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t_1\right)$ و $\theta_2 = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t_2\right)$

وبتعويض $\dot{\theta}_1 = -\theta_m \frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t_1\right)$ و $\dot{\theta}_2 = -\theta_m \frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t_2\right)$

هذه التعابير في العلاقة (1) $W_C = \frac{1}{2}C\theta_1^2 - \frac{1}{2}C\theta_2^2$

هذه العلاقة تمثل شغل مزدوجة اللي عندما يتغير الأفصول الزاوي من θ_1 إلى θ_2 . أي أن شغل مزدوجة اللي يساوي تغير شكل من أشكال الطاقة للمجموعة { القضيب ـ السلك } وهي طاقة الوضع لي . $W_C = E_{pt}(1) - E_{pt}(2)$ بحيث أن $E_{pt}(1) = \frac{1}{2}C\theta_1^2$ و $E_{pt}(2) = \frac{1}{2}C\theta_2^2$ وبالتالي نعرف طاقة الوضع لي بالمقدار التالي :

$E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$ ، Cte ثابتة تتعلق بالحالة المرجعية وتحدده الشروط البدئية

3 ـ الطاقة الميكانيكية للمجموعة .

تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس اللي هو : $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$.

أ ـ في حالة احتكاكات مهملة .

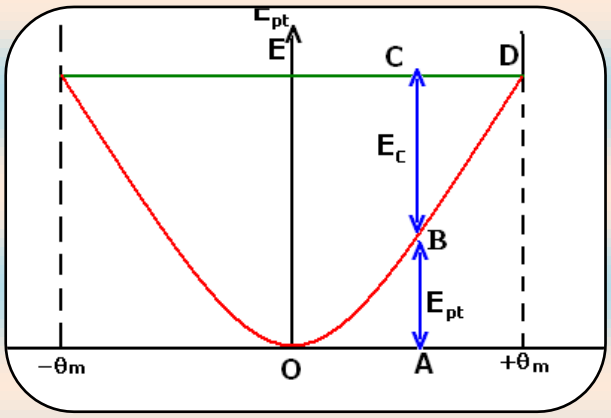
نعتبر أن التذبذبات الأولى لنواس لي حر غير مخمدة معادلته التفاضلية $J_\Delta\ddot{\theta} + C\theta = 0$.

انطلاقا من تعبير الطاقة الميكانيكية يمكن أن نبين أن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية للمجموعة وذلك باشتقاق تعبير E_m بالنسبة للزمن : $\frac{dE_m}{dt} = J_\Delta\ddot{\theta}\dot{\theta} + C\dot{\theta}\theta = \dot{\theta}\left(J_\Delta\ddot{\theta} + C\theta\right) = 0 \Rightarrow E_m = cte$

أي أن الطاقة الميكانيكية تنحفظ .

ويمكن أن نبين كذلك انطلاقا من المعادلة الزمنية $\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

أن هذه الثابتة هي : $E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2 = cte$



خلاصة : تنحفظ الطاقة الميكانيكية لنوس لي حر وغير مخمد :

$$E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2 = cte$$

مخططات الطاقة هي على الشكل التالي :

من خلال مخططات الطاقة يتبين أنه خلال الذبذبات الحرة في المخمدة لنواس لي تتحول الطاقة الحركية إلى طاقة وضع والعكس صحيح .

ب ـ في حالة وجود الاحتكاك

تتناقص الطاقة الميكانيكة للنواس اللي بحيث تتحول إلى طاقة حرارية .

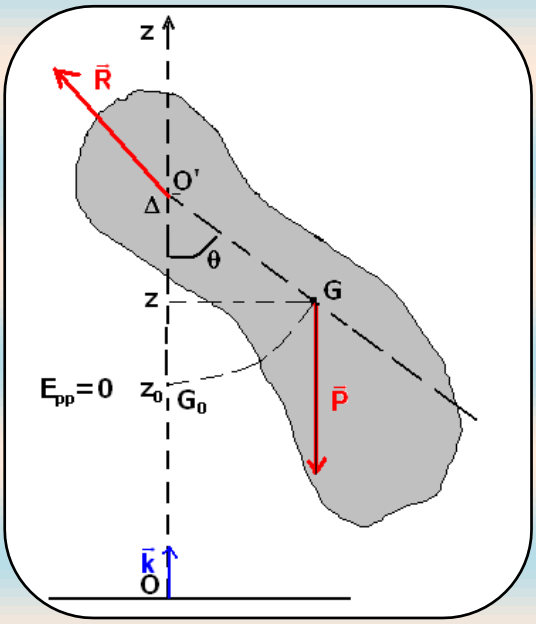
Moutamadris.ma

V ـ الدراسة الطاقية للنواس الوازن

نعتبر المجموعة النواس الوازن {الحامل ـ الجسم S } بحيث أن J_Δ عزم قصور الجسم S ونمعلم حركة مركز قصوره بالأفصول الزاوي θ عند كل لحظة t بالنسبة لمعلم مرتبط بمرجع أرضي .

- **الطاقة الحركية للمجموعة** : يتوفر النواس الوازن على طاقة حركية في المرجع المرتبط بالأرض : $E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$

- **طاقة الوضع الثقالية للمجموعة**



تعبير طاقة الوضع الثقالية لنواس وازن في مجال الثقالة هو :

$E_{pp} = mgz + cte$ حيث m كتلة الجسم S و z أنسوب مركز قصوره في المعلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ متعامد وممنظم محوره $(O,\vec{k})$ رأسي وموجه نحو الأعلى ، و g شدة الثقالة .

الثابتة cte تحدد انطلاقا من الحالة المرجعية .

- **الطاقة الميكانيكية للنواس الوازن**.

$$E_m = E_C + E_{pp}$$

تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس وازن في معلم مرتبط بمرجع أرضي هو :

$$E_m = mgz + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + cte$$

مثال :

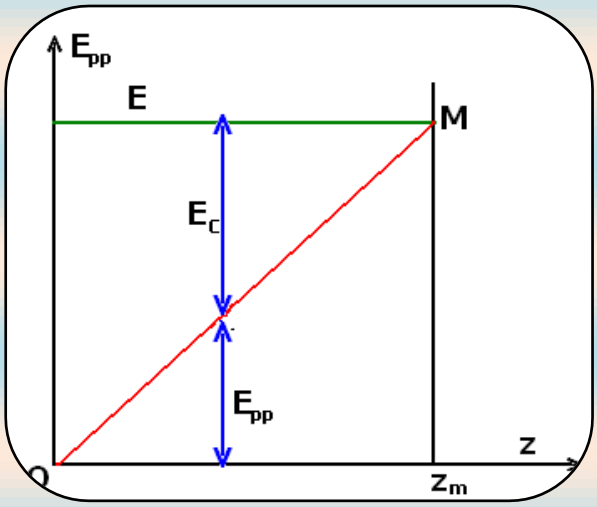
حسب الشكل : $z = z_0 + h$

بحيث أن $h = O'G - O'G\cos\theta$ نضع $O'G = d$

$$z = z_0 + d(1-\cos\theta)$$

يمكن تحديد الثابتة cte انطلاقا من الحالة المرجعية :

$E_{pp} = 0$ عند $z = z_0$ أي أن $cte = -mgz_0$



- $E_m = mgd(1-\cos\theta) + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$

$$\frac{dE_m}{dt} = mg\dot{\theta}\sin\theta + J_\Delta \dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$= \dot{\theta}\left(mgd\sin\theta + J_\Delta \ddot{\theta}\right) = 0$$

$$E_m = cte$$

في غياب للاحتكاكات تبقى الطاقة الميكانيكية للنواس الوازن في مجال الثقالة ثابتة . **إذن النواس الوازن مجموعة محافظة**

ـ مخططات الطاقة

أ ـ الحالة العامة

* التمثيل المبياني لتغيرات طاقة الوضع الثقالية بدلالة الأنسوب z .

$$E_{pp} = mgz$$

$$E_m = g(z) = cte$$

$$E_m - E_{pp} = E_c$$

الطاقة الحركية إما موجبة أو منعدمة.

في النقطة M $E_{pp} = mgz_M$ و $E_C = 0$

Moutamadris.ma

$E_m = E_{pp} = mgz_M$

أي أن z لايمكنها أن تتجاوز z_M يعني أن $z < z_M$

في النقطة O : $E_{pp} = 0$ و $E_C = E_m = \frac{1}{2}mv_{max}^2$

عندما تزداد z تنقص الطاقة الحركية E_C تزداد طاقة الوضع E_{pp} إلى أن تصبح $z = z_m$ فيتوقف الجسم أي أن $E_C = 0$

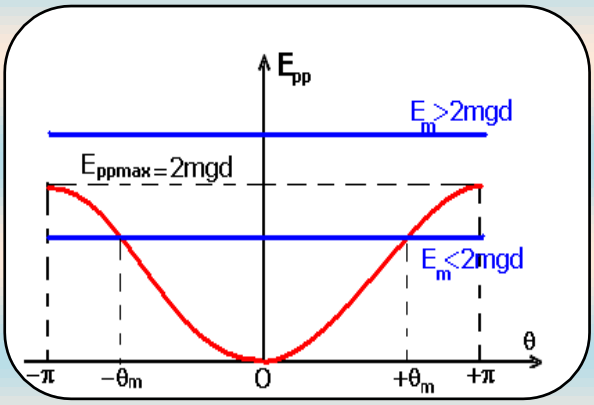
ب ـ حالة النواس الوازن

ـ طاقة الوضع الثقالية للنواس الوازن نختار كحالة مرجعية $E_{pp} = 0$ بالنسبة $z=z_0$ في هذه الحالة $E_{pp} = mgd(1-\cos\theta)$

ـ مخططات الطاقة

$E_m = E_{pp} + E_C$ الطاقة الميكانيكية وهي ثابتة بالنسبة للنواس الوازن

$E_{pp}(\theta)$ حساب تغيرات $E_{pp} = f(\theta)$ طاقة الوضع الثقالية $E_{pp} = mgd(1-\cos\theta)$



$\frac{dE}{d\theta} = mgd\dot{\theta}\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0$

$\theta = \pi$ أو $\theta = -\pi$

$-\pi \le \theta \le \pi$ .....

$0 \le E_{pp} \le 2mgd$

ـ الحالة الأولى:

$E_m > 2mgd$ و $E_m = E_{pp} + E_C$ أي أن $E_C > 0$

وبالتالي فالنواس الوازن لايتوقف ويمكنه ان يدور حول المحور (Δ)

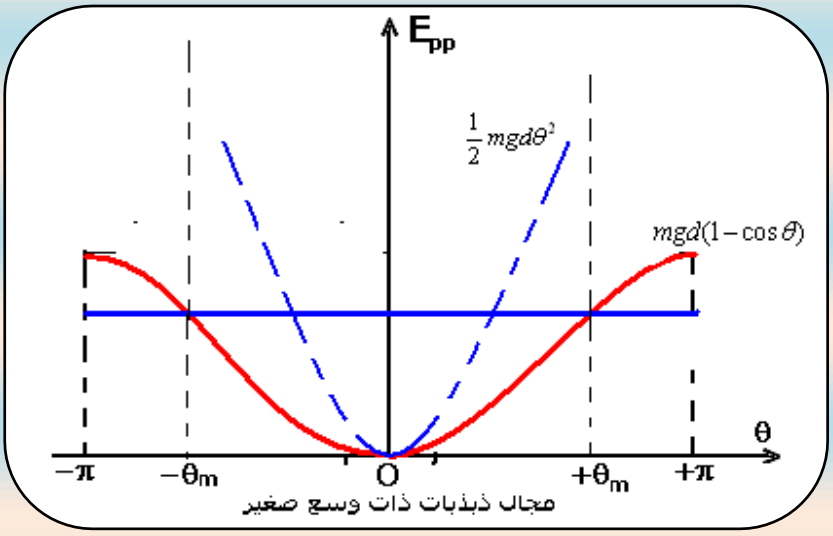
ـ الحالة الثانية :

$E_m < 2mgd$ أي أن $E_C = E_m - E_{pp}$ وبما أن $E_C \ge 0$ في هذه الحالة

تتعدم الطاقة الحركية للنواس الوازن بالنسبة لقيمتين θ_m و $-\theta_m$ في هذه الحالة للمجموعة حركة تذبذبية حرة وغير مغمدة تتحول خلالها الطاقة الحركية إلى طاقة وضع ثقالية $\Delta E_C = -\Delta E_{pp}$.

في حالة ذبذبات ذات وسع صغير $\sin\theta \approx \theta$ و $\sin\cdots \cong \cdots$ و $\cos\theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$E_P = mgd\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) = mgd\frac{\theta^2}{2}$



Moutamadris.ma

المظاهر الطاقية : تمارين

التمرين 1

نقذف كرة بلبار كهربائي كتلتها $m = 55g$ بواسطة نابض ذي لفات غير متصلة وكتلة مهملة وصلابة $k = 14N/m$ وطول أولي $\ell_0 = 12cm$.

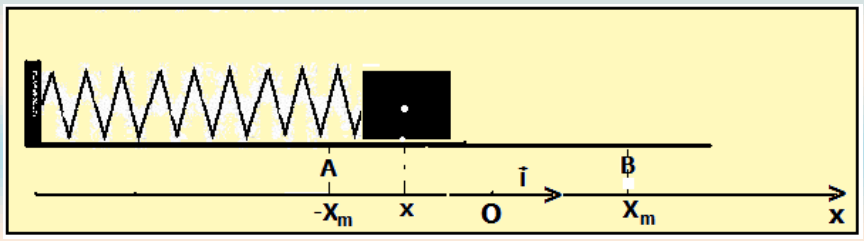
1 ــ قبل قذف الكرة ، يكون النابض مضغوطا حيث طوله يساوي $\ell_0 / 2$. أحسب في هذه الحالة E_{Pe} طاقة الوضع المرنة المخزونة في النابض عند انضغاطه .

2 ــ أثناء قذف الكرة يمنح النابض طاقته المخزونة كليا . ما شكل الطاقة التي اكتسبتها الكرة ؟

3 ــ استنتج السرعة القصوى لإرسال الكرة .

التمرين 2

نعتبر المجموعة الميكانيكية { جسم ــ نابض } الممثلة في الشكل جانبه . حيث k صلابة النابض و m كتلة الجسم الصلب .
يتذبذب الجسم بين الموضعين A و B أفصولهما $-X_m$ و $+X_m$ أنظر الشكل



المعادلة الزمنية للحركة هي : $x = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \Phi\right)$

1 ــ أكتب تعبير السرعة $v(t)$

2 ــ حدد أفاصيل مواضع النقط عندما تكون السرعة $v(t)$ قصوية و عندما تكون منعدمة .

3 ــ 1 أكتب تعبير الطاقة الحركية $E_C(t)$ للجسم الصلب خلال حركته .

3 ــ 2 بين أن الطاقة الحركية تكتب على الشكل التالي : $E_C = \frac{1}{2}kX_m^2\left(1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \Phi\right)\right)$

4 ــ 1 استنتج تعبير الطاقة الحركية بدلالة k و X_m و x

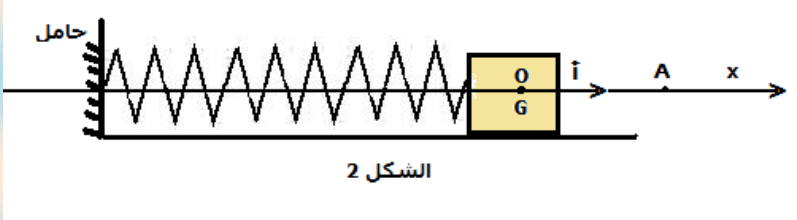
4 ــ 2 أفاصيل مواضع النقط عندما تكون الطاقة الحركية $E_C(t)$ قصوية و عندما تكون منعدمة . هل هذه النتيجة تتوافق مع نتائج السوال 2 ؟

5 ــ التعبير المحصل عليه في السؤال (4 ــ 1) هو الفرق بين مقدارين أي طاقتين ، طاقة تتعلق ب x وطاقة ثابتة .
باعتماد قانون انحفاظ الطاقة ، اعط اسم كل من هاتين الطاقتين .

التمرين 3 : تغيير الشروط البدئية لحركة متذبذب غير مخمد

المجموعة الميكانيكية المتدبدبة هي مجموعة ميكانيكية تنجز حركة دورية ذهابا وإيابا حول موضع توازنها المستقر .
يتكون نواس مرن أفقي من جسم صلب **(S)** كتلته **m** ، مثبت بطرف نابض لفاته غير متصلة وكتلته مهملة وصلابته **K** .
الطرف الآخر للنابض مثبت في حامل ثابت كما يبين الشكل **(2)** .

Moutamadris.ma



الشكل 2

عند التوازن ، ينطبق مركز القصور G للجسم (S) مع الأصل O لمعلم الفضاء $(O,\vec{i})$.

نزيح الجسم (S) عن موضع توازنه في المنحى الموجب إلى أن ينطبق مركز فصوره G مع النقطة A تبعد عن O بمسافة d

نعتبر الحالتين التاليتين :

ـ الحالة الأولى : نحرر الجسم (S) عند النقطة A ، بدون سرعة بدئية ، عند اللحظة $t=0$.

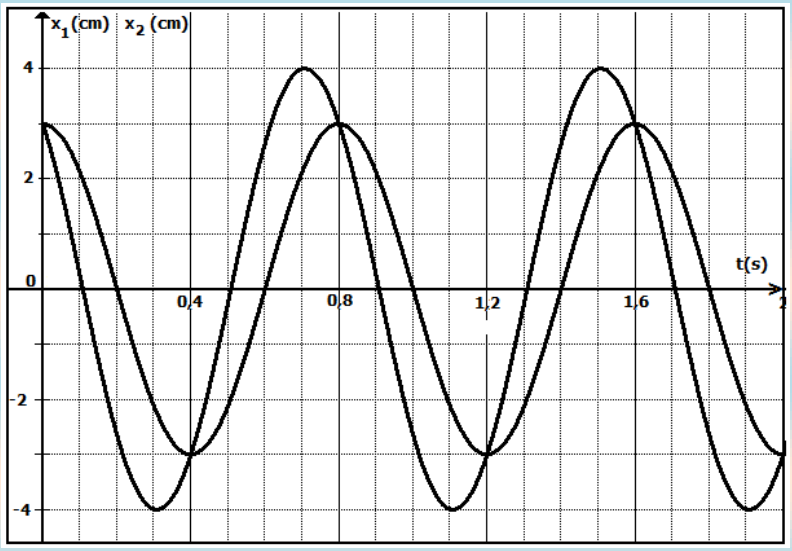
ـ الحالة الثانية : نرسل الجسم (S) انطلاقا من النقطة A في المنحى السالب ، بسرعة $\vec{v}_A$ ، عند اللحظة $t=0$.

في الحالتين ينجز الجسم (S) حركة تذبذبية حول موضع توازنه O .

1 ـ أثبت المعادلة التفاضلية التي يحققها الأفصول x لمركز القصور G .

2 ـ أوجد التعبير الحرفي للدور الخاص T_0 للمتذبذب ليكون حل المعادلة التفاضلية هو : $x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

3 ـ نحصل ، بواسطة جهاز ملائم ، على منحنى تطور الأفصولين x_1 و x_2 لمركز قصور الجسم (S) ، تباعا ، في الحالتين الأولى والثانية ، كما يبين الشكل (3) .



عين معللا جوابك ، المنحنى الموافق لحركة المتذبذب في الحالة الأولى .

4 ـ نعتبر المتذبذب في الحالة الثانية ،

ونرمز لوسع حركته ب x_{m2} وللطور عند أصل التواريخ ب φ_2 .

4 ـ 1 حدد نمن المبيان الممثل في الشكل (3) قيمة المسافة d وقيمة الوسع x_{m2} .

4 ـ 2 بتطبيق انحفاظ الطاقة الميكانيكية ،

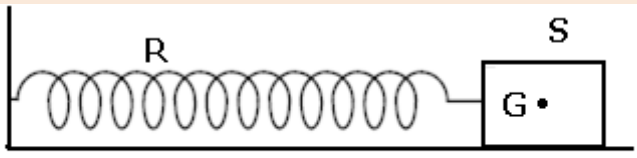
بين أنه يمكن التعبير عن الوسع x_{2m} بالعلاقة :

$$x_{m2} = \sqrt{\frac{mv_A^2}{K}+d^2}$$

4 ـ 3 أوجد تعبير $\tan\varphi_2$ بدلالة d و x_{m2}

التمرين 4

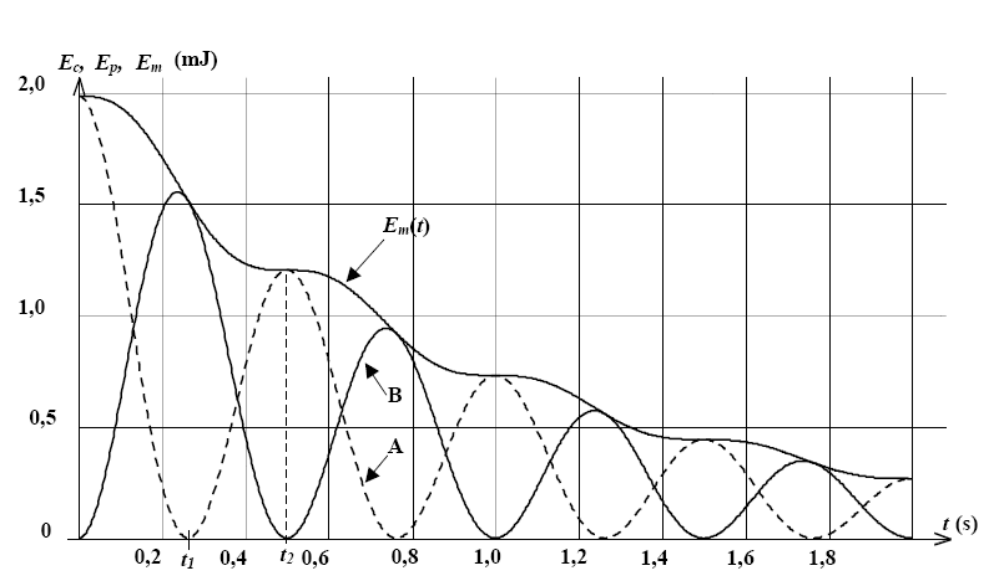
يتكون متذبذب مرن من جسم صلب ذي كتلة $m=250g$ مشدود بطرف نابض لفاته غير متصلة ، وكتلته مهملة ، وصلابته $k=10N/m$.



يمكن للجسم أن يتذبذب أفقيا فوق ساق . ندرس حركة G مركز قصور تاجسم على المحور الأفقي $(O,\vec{i})$ لمعلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ متعامد وممنظم ومرتبط بمرجع أرضي ، ونمعلم موضعه بالأفصول x . تنطبق النقطة O مع G_0 موضع G عند التوازن .

الاحتكاكات غير مهملة ، إذ نعتبر أن قوى الاحتكاك مكافئة لقوة وحيدة $\vec{f}=-\mu\vec{v}$ حيث $\vec{v}$ متجهة سرعة G و μ معامل موجب

Moutamadris.ma



1 ــ باستعمال الوثيقة (1) عين شبه الدور T للذبذبات وقارنه مع T_0 الدور الخاص للنواس .

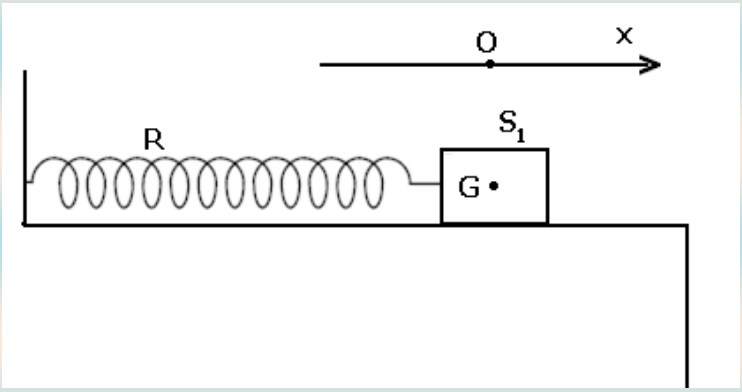
2 ــ ماذا يمثل المنحنيان (أ) و (ب) في الوثيقة الأولى ؟

3 ــ كيف تفسر تناقص الطاقة الميكانيكية E_m للمتذبذب .

4 ــ أ ــ ما سرعة G عند اللحظتين t_1 و t_2 ؟ علل جوابك .

ب ــ استنتج قيمة الشدة f عند هاتين اللحظتين .

ج ــ علل شكل المنحنى E_m .



التمرين 5

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g = 10 m/s^2$

I ــ نعتبر التركيب التجريبي الممثل في الشكل أسفله والمتكون من :

ــ نابض R لفاته غير متصلة ، ومتلته مهملة وصلابته k

ــ جسم صلب S_1 كتلته m_1 .

نزيح الجسم S_1 عن موضع توازنه ، في المنحى الموجب ، بمسافة x_0 ثم نحرره بدون سرعة بدئية في اللحظة $t = 0$

نختار كمرجع لطاقة الوضع المرنة ، الموضع الذي يكون فيه النابض غير مشوه ومرجعا لطاقة الوضع الثقالية المستوى الأفقي المار من G .

1 ــ أعط تعبير الطاقة الحركية للمجموعة {الجسم S_1 ، النابض } .

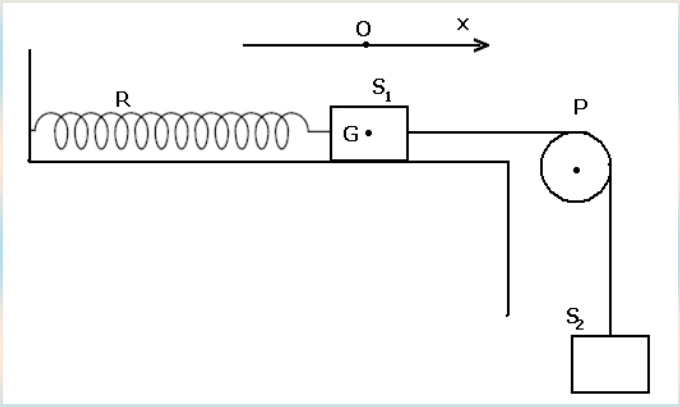
2 أعط تعبير طاقة الوضع للمجموعة {الجسم S_1 ، النابض } . واستنتج تعبير طاقتها الميكانيكية في لحظة t بدلالة k و x و $\frac{dx}{dt}$.

3 ــ أثبت المعادلة التفاضلية لحركة المتذبذب المرن اعتمادا على هذه الدراسة الطاقية .

II ــ نثبت المتذبذب المرن الأفقي السابق ، بطرف خيط غير قابل الامتداد وكتلته مهملة يمر دون انزلاق بمجرى بكرة (P) شعاعها r وكتلتها M ، ونعلق بالطرف

Moutamadris.ma

الآخر جسما صلبا (S_2) كتلته $m_2 = m_1 = m$. أنظر الشكل



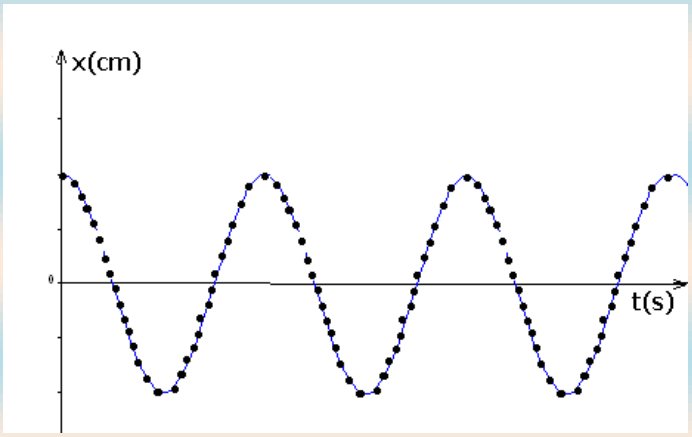
عزم قصور البكرة J_Δ بالنسبة للمحور الأفقي المار من مركزها هو $J_\Delta = \frac{1}{2}Mr^2$ حيث $M = 2m$.

1 ـ حدد بدلالة المقادير اللازمة إطالة النابض عند التوازن .

2 ـ نزيح الجسم (S_2) نحو الأسفل بمسافة z_m ثم نحرره بدون سرعة بدئية عند اللحظة $t = 0$. يمثل الشكل أسفله تسجيل حركة نقطة من S_1 بالسلم الحقيقي ، خلال مدد زمنية متساوية ومتتالية $\tau = 40ms$.

2 ـ 1 عين الدور T_0 للمتذبذب .

2 ـ 2 عين الوسع x_m لحركة S_1 .



3 ـ باعتمادك على العلاقة الأساسية للتحريك بين أن المعادلة التفاضلية لحركة الجسم S_1 تكتب على الشكل التالي : $\ddot{x} + \frac{1}{3}\frac{k}{m}x = 0$

(x أفصول مركز قصور الجسم S_1 عند اللحظة t)

4 ـ أكتب المعادلة الزمنية لحركة S_1 .

5 ـ حدد صلابة النابض k علما أن $m = 200g$

التمرين 6 . الدراسة الطاقية لنواس وازن

نعتبر نواسا وازنا ينجز تذبذبات حرة باحتكاكات مهملة.

النواس المدروس عبارة عن ساق متجانس AB، كتلتها m وطولها $AB = \ell = 60,0cm$ ، يمكنها الدوران في مستوى رأسي حول محور أفقي (Δ) ثابت يمر من طرفها A (الشكل 2).

عزم قصور الساق بالنسبة للمحور (Δ) هو : $J_\Delta = \frac{1}{3}m.\ell^2$ ، ندرس حركة النواس في معلم مرتبط بمرجع أرضي نعتبره غاليليا.

نعلم في كل لحظة موضع النواس بأفصوله الزاوي θ وهو الزاوية التي تكونها الساق مع الخط الرأسي المار من النقطة G_0 موضع مركز القصور G للساق AB، عند التوازن المستقر ، مرجعا لطاقة الوضع الثقالية ($E_P=0$) .

نقبل في حالة التذبذبات الصغيرة أن : $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ (θ بالراديان) ونأخذ $g = 9,80m.s^{-2}$.

1 ـ المعادلة التفاضلية لحركة النواس

1 ـ 1 بين أن تعبير طاقة الوضع الثقالية E_p للساق AB يكتب على الشكل التالي : $E_p = m.g.\frac{\ell}{2}(1-\cos\theta)$.

1 ـ 2 اكتب، في حالة التذبذبات الصغيرة، تعبير الطاقة الميكانيكية E_m للساق، عند لحظة t ، بدلالة m و ℓ و g و θ و $\frac{d\theta}{dt}$.

1 ـ 3 استنتج المعادلة التفاضلية للحركة التي يحققها الأفصول الزاوي θ في حالة التذبذبات الصغيرة.

2 ـ الدراسة الطاقية

نعطي للساق AB ، انطلاقا من موضع توازنها المستقر ، سرعة بدئية تمكنها من اكتساب طاقة ميكانيكية E_m . يعطي الشكل 3 مخطط تطور كل من طاقة الوضع الثقالية E_p والطاقة الميكانيكية E_p للساق AB في تجربتين مختلفتين حيث يتم إرسال العارضة انطلاقا من موضع توازنها المستقر في كل مرة بسرعة بدئية معينة فتكتسب بذلك طاقتين ميكانيكيتين مختلفتين:

ـ في التجربة 1 : $E_m = E_{m1}$ ؛

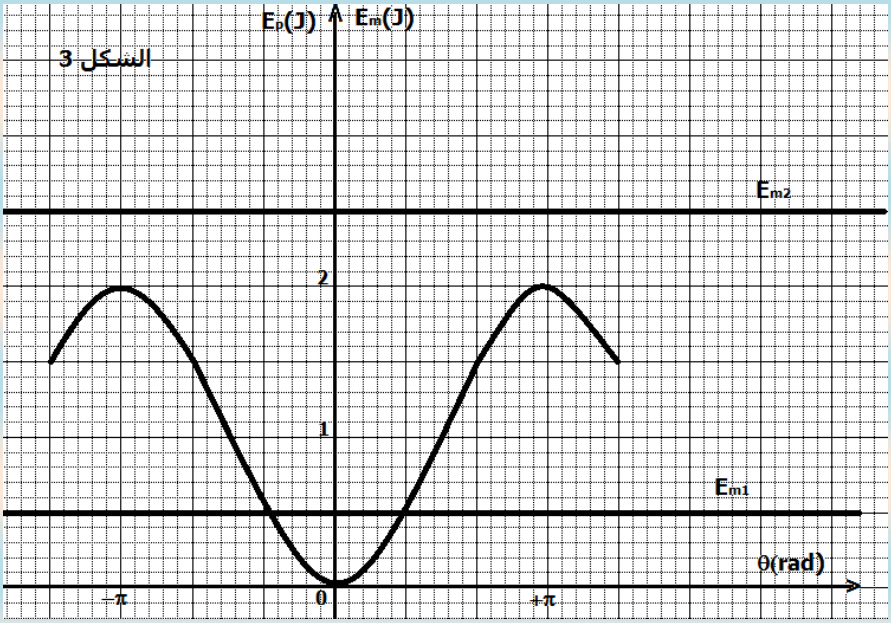
Moutamadris.ma

- في التجربة 2 : $E_m = E_{m2}$.

2 ـ 1 اعتمادا على المبيان الشكل 3 حدد طبيعة حركة الساق AB خلال كل تجربة.

2 ـ 2 عين، مبيانيا، القيمة القصوى للأفصول الزاوي θ للنواس خلال التجربة 1 . استنتج الكتلة m للساق.

2-3- خلال التجربة 2 تتغير الطاقة الحركية للساق بين قيمة دنيا $E_C(min)$ وقيمة قصوى $E_C(max)$ أوجد قيمة كل من $E_C(min)$ و $E_C(max)$



التمرين7

نثبت في أحد طرفي قضيب طوله $\ell = 40cm$ جسما صلبا (A) كتلته $m = 10g$ بحيث يمكن اعتباره نقطة مادية.

يمكن للقضيب أن يدور في مستوى رأسي بدون احتكاك، حول محور أفقي وثابت يمر من النقطة O .

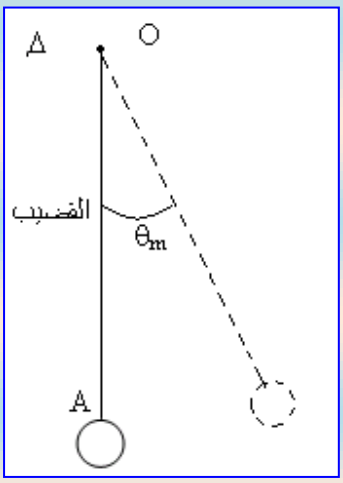
نهمل كتلة القضيب بالنسبة لكتلة الجسم (A) فنحصل على نواس عزم قصوره بالنسبة للمحور (Δ) : $J_\Delta = m\ell^2$

1 ـ نزيح القضيب عن موضع توازنه الرأسي بزاوية θ_m ثم نطلقه بدون سرعة بدئية .

أ ـ بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك , أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها الأفصول الزاوي θ .

برهن على أن حركة الجسم (A) دائرية جيبية في حالة التذبذبات ذات الوسع الضعيف .

ب ـ يكتب حل المعادلة التفاضلية على الشكل : $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$



ـ انطلاقا من الشروط البدئية حدد φ .

ـ باستعمال المعادلة التفاضلية وحلها ، أوجد تعبير الدور الخاص T_0 لهذا النواس .

واحسب قيمة T_0 .

2 ـ نعتبر المجموعة {الجسم (A) ـ القضيب، الأرض}.

أ ـ برهن على أن الطاقة الحركية للمجموعة تساوي الطاقة الحركية للجسم (A).

ب ـ أعط تعبير هذه الطاقة بدلالة m, l والسرعة الزاوية $\dot{\theta}$ للقضيب .

ج ـ أوجد تعبر طاقة الوضع الثقالية للمجموعة بدلالة m وا و g و .

θ : زاوية انحراف القضيب مع وضعه الرأسي.

Moutamadris.ma

نختار كمرجع لطاقة الوضع المستوى الأفقي المار من (A) في حالة توازن القضيب.

د ـ عين تعبير الطاقة الميكانيكية للمجموعة بدلالة m وا gg وm ٠ .

3 ــ نعتبر من جديد القضيب في وضعه الرأسي (التوازن المستقر), نعطي

للجسم (A) سرعة بدئية أفقية A ٠ منظمها 2m/s.

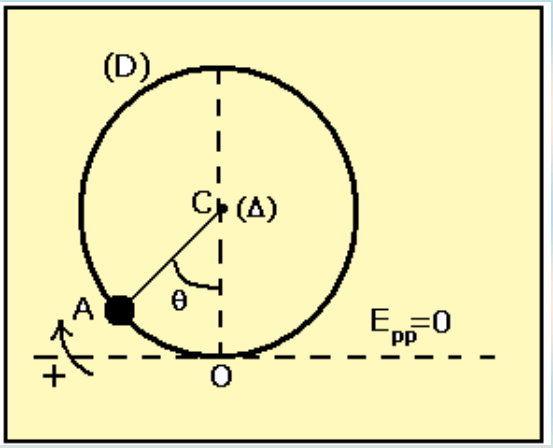
أ ـ بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية أوجد الزاوية القصوية لانحراف القضيب بالنسبة لوضعه الرأسي.

ـ ما السرعة الدنوية التي يجب اعطاؤها للجسم (A) لكي يصل القضيب إلى وضع توازنه غير المستقر .

ـ صف حركة المتذبذب إذا فاقت السرعة V_A قيمة هذه السرعة الدنوية . نعطي : $g=10m/s^2$

التمرين 8

نعتبر قرصا (D) متجانسا كتلته $M=0,4kg$ وشعاعه $R=0,1m$ ، قابلا للدوران بدون احتكاك حول محور (Δ) أفقي ومتعامد مع المستوى الرأسي للقرص والمار من مركزه C .عزم القصور للقرص بالنسبة لمحور الدوران (Δ) هو $J_\Delta=\frac{1}{2}MR^2$. نثبت في نقطة A من محيط القرص جسما صلب (B) أبعاده مهملة وكتلته $m=\frac{M}{4}$.



نعتبر المجموعة $\{S_1\}$ المتكونة من القرص (D) من الجسم (B) ، عزم قصورها بالنسبة للمحور (Δ) هو $J=J_\Delta+mR^2$.

1 ــ ندير المجموعة $\{S_1\}$ انطلاقا من موضع توازنها المستقر بزاوية θ_1 جد صغيرة في المنحى الموجب ، ونحررها بدون سرعة بدئية في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ

في كل لحظة ، نمعلم موضع الجسم (B) بالزاوية θ التي يكونها CA مع الخط الرأسي المار من النقطة O . أنظر الشكل .

1 ــ 1 بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك ، بين أن المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة $\{S_1\}$ تكتب على الشكل التالي :

$\ddot{\theta}+\frac{g}{3R}\theta=0$ حيث g شدة الثقالة .

1 ــ 2 هذه المعادلة التفاضلية تقبل حلا لها على الشكل التالي : $\theta(t)=\theta_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

استنتج تعبير الدور الخاص T_0 واحسب قيمته . نعطي $g=10m/s^2$

1 ــ 3 أكتب المعادلة الزمنية لهذه الحركة بدلالة θ_1 و t .

2 ــ نعتبر المستوى الأفقي المار من O مرجعا لطاقة الوضع الثقالية لهذه المجموعة .

2 ــ 1 أوجد تعبير طاقة الوضع الثقالية للمجموعة $\{S_1\}$ بدلالة m,R,θ_1,g,T_0,t . نعطي $1-\cos\theta\simeq\frac{\theta^2}{2}$

2 ــ 2 بين أن تعبير الطاقة الحركية E_C للمجموعة $\{S_1\}$ يكتب على الشكل التالي : $E_C=\frac{3}{2}mv^2$ حيث v السرعة الخطية للجسم (B) في اللحظة t .

2 ــ 3 أوجد تعبير الطاقة الميكانيكية للمجموعة $\{S_1\}$ بدلالة m,R,θ_1,g .

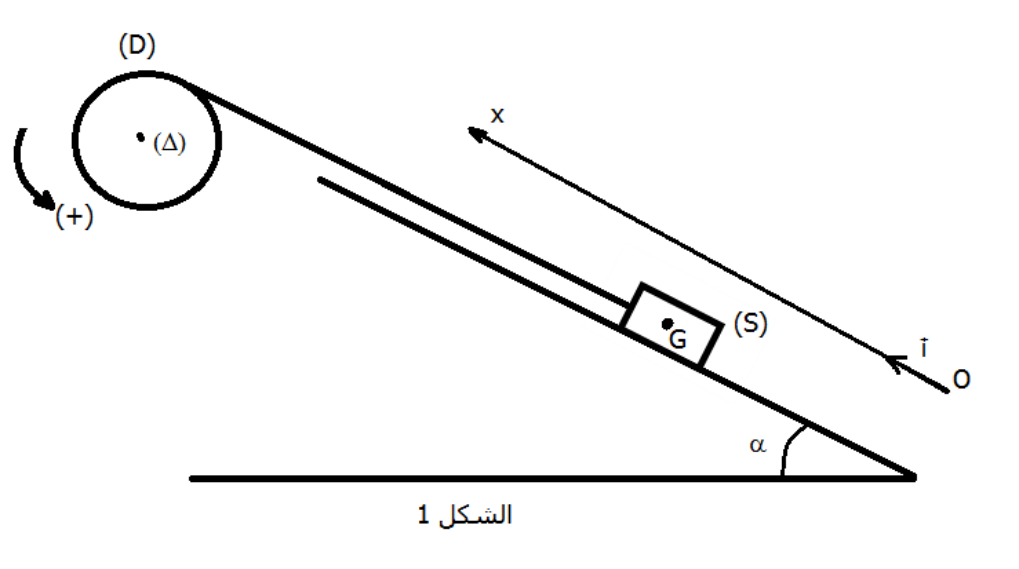
2 ــ 4 استنتج قيمة الزاوية θ_1 علما أن القيمة القصوية للطاقة الحركية E_C للمجموعة $\{S_1\}$ هي $E_{Cmax}=1,23.10^{-3}J$

Moutamadris.ma

التمرين 10 بكالوريا 2007 علوم تجريبية

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g=10m/s^2$

I ــ نعتبر قرصا متجانسا (D) ، شعاعه $r=10cm$ ، قابلا للدوران حول محور أفقي ثابت (Δ) منطبق مع محور تماثله . نلف حول القرص خيطا ، غير قابل الامتداد ، كتلته مهملة ولا ينزلق على القرص ، نثبت بطرفه الحر جسما صلبا (S) كتلته $m=0,5kg$. الجسم (S) قابل الانزلاق على سطح مائل بالزاوية $\alpha=30°$ بالنسبة للمستوى الأفقي (الشكل 1) ، نطبق ، بواسطة محرك ، على القرص (D) مزدوجة محركة عزمها $\mathcal{M}$ ثابت ، فينطلق مركز القصور G للجسم S بدون سرعة بدئية من الموضع O لينتقل وفق المحور $(O,\vec{i})$ بتسارع ثابت $a=2m/s^2$.



الشكل 1

1 ــ 1 حدد طبيعة حركة كل من الجسم (S) والقرص (D) .

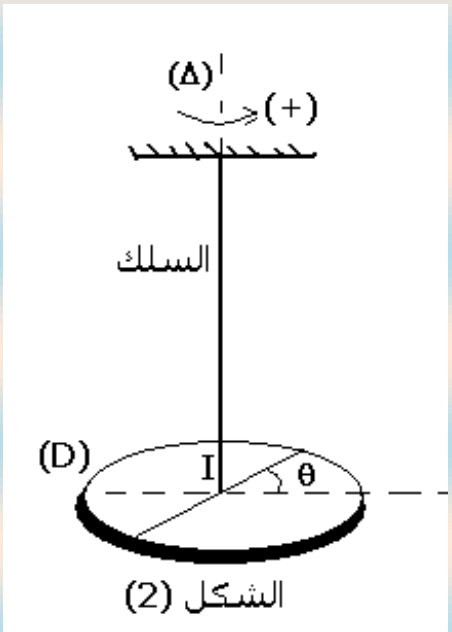
1 ــ 2 أكتب المعادلة x(t) لحركة G باتخاذ الموضع O أصلا للأفاصيل واللحظة التي تأخذ فيها سرعة (S) القيمة 1m/s أصلا للتواريخ .

1 ــ 3 أحسب عند اللحظة t=0,5s التسارع المماسي a_T والتسارع المنظمي a_N لنقطة من محيط القرص .

1 ــ 4 أوجد قيمة العزم $\mathcal{M}$ للمزدوجة المحركة .

نأخذ $J_\Delta=9\times10^{-3}kg.m^2$

II ــ نأخذ القرص (D) ونثبت في مركزه I سلك لي رأسي ، كتلته مهملة وثابتة ليه C فنحصل على متذبذب الشكل (2)



الشكل (2)

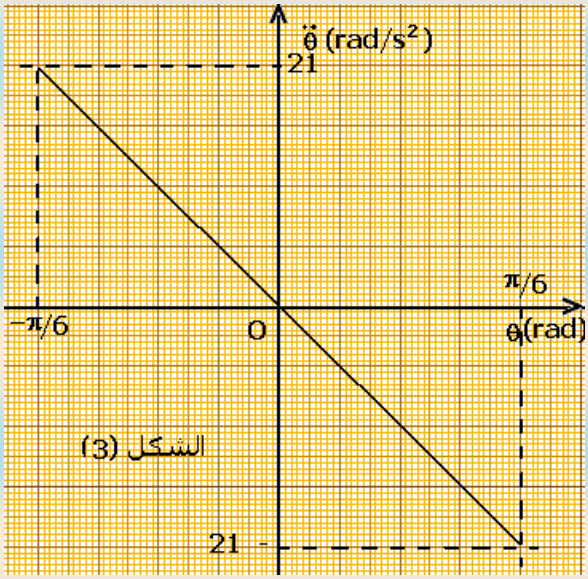
ندير القرص (D) بزاوية θ_m ، انطلاقا من موضع التوازن $(\theta=0)$ حيث السلك غير ملتو ، ثم نحرر القرص بدون سرعة بدئية ، فينجز حركة تذبذبية حول محور رأسي (Δ') منطبق مع محور السلك . عزم قصور القرص بالنسبة للمحور (Δ') هو $J_{\Delta'}=9.10^{-3}kg.m^2$. نعتبر موضع التوازن حالة مرجعية لطاقة الوضع اللي $(E_{pt}=0)$,

Moutamadris.ma

1 ـ اعتمادا على الدراسة الطاقية ، أثبت المعادلة التفاضلية لحركة القرص (D) .

2 ـ يمثل منحنى الشكل (3) تغيرات التسارع الزاوي للقرص بدلالة الأفصول الزاوي θ . أوجد اعتمادا على المبيان ، قيمة كل من الوسع θ_m والدور الخاص T_0 لحركة المتذبذب واستنتج ثابتة اللي للسلك C .

3 ـ أحسب الطاقة الميكانيكية للمتذبذب . نأخذ $\pi^2 = 10$



الشكل (3)

التمرين 11 (بكالوريا 2009 العلوم الفيزيائية)

تستعمل المتذبذبات الميكانيكية في مجالات صناعية مختلفة وبعض الأجهزة الرياضية واللّعَب وغيرها . ومن بين هذه المتذبذبات الأرجوحة التي نعتبرها كنواس .

يتأرجح طفل بواسطة أرجوحة مكونة من عارضة يستعملها كمقعد ، معلقة بواسطة حبلين مشدودين إلى حامل ثابت .

ننمذج المجموعة { الطفل + الأرجوحة } بنواس بسيط يتكون من حبل ، غير مدود كتلته مهملة وطوله ℓ ، وجسم صلب (S) كتلته m .

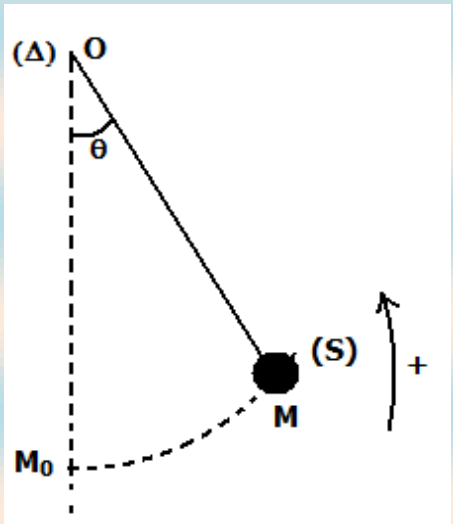
النواس قابل للدوران حول محور أفقي (Δ) ثابت ومتعامد مع المستوى الرأسي . عزم قصور النواس بالنسبة لمحور الدوران (Δ) هو : $J_\Delta = m\ell^2$.

المعطيات : شدة الثقالة $g = 9{,}8 m/s^2$ ، طول الحبل $\ell = 3m$ ؛ كتلة الجسم (S) : $m = 18kg$ ؛

نأخذ في حالة التذبذبات الصغيرة : $\sin\theta \simeq \theta(rad)$ و $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ (rad)

نهمل أبعاد (S) بالنسبة لطول الحبل وجميع الاحتكاكات .

1 ـ الدراسة التحريكية :



نزيح النواس عن موضع توازنه المستقر بزاوية $\theta_m = \frac{\pi}{20} rad$ في المنحى الموجب ونحرره بدون سرعة بدئية عند اللحظة $t = 0$.

نعلم موضع النواس عند اللحظة t بالأفصول الزاوي θ الذي يكوّنه النواس مع الخط الرأسي المار من النقطة O حيث $\theta = \left(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM}\right)$ (أنظر الشكل)

1 ـ 1 بين ، بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك في حالة الدوران حول محور ثابت ، أن المعادلة التفاضلية لحركة النواس ، في معلم غاليلي مرتبط بالأرض ، تكتب على الشكل : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$

1 ـ 2 أحسب الدور الخاص T_0 للنواس .

1 ـ 3 أكتب المعادلة الزمنية لحركة النواس .

1 ـ 4 بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في أساس فريني ، أوجد تعبير الشدة T لتوتر الحبل عند اللحظة t بدلالة m و g و θ و ℓ و v السرعة الخطية . احسب قيمة T عند اللحظة $t = T_0/4$.

2 ـ الدراسة الطاقية

نزود ، عند اللحظة $t = 0$ ، النواس السابق الذي يوجد في حالة سكون في موضع توازنه المستقر بطاقة حركية قيمتها $E_C = 264{,}6J$ فيدور في المنحى الموجب .

2 ـ 1 نختار المستوى الأفقي الطي تنتمي إليه النقطة M_0 مرجعا لطاقة الوضع الثقالية (أنظر الشكل)

أكتب تعبير طاقة الوضع الثقالية E_p للنواس عند لحظة t بدلالة m و g و θ و ℓ .

2 ـ 2 باعتماد الدراسة الطاقية ، حدد القيمة القصوية θ_{max} للأفصول الزاوي .

Moutamadris.ma