I. المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$

01. تذكير:

- f دالة عددية نرمز لها ب : y.
- f' الدالة المشتقة ل f نرمز ل f' ب : y'.
- الكتابة $f'(x) = af(x) + b$ نكتبها على الشكل الآتي $y' = ay + b$ و تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات ثابتة .
- كل دالة عددية g قابلة للاشتقاق و تحقق المعادلة السابقة (أي $g'(x) = ag(x) + b$) تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

02. حل المعادلة: $y' = ay + b$

المعادلة التفاضلية على شكل	حلول المعادلة هي الدوال $f(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي هي على شكل	مثال	الحلول هي
$y' = b; b \neq 0$	$f(x) = bx + c$ (مع $c \in \mathbb{R}$)	$y' = 7$	$f(x) = 7x + c$ مع $c \in \mathbb{R}$
حالة خاصة $y' = 0$	$f(x) = c$ (مع $c \in \mathbb{R}$)	$y' = 0$	$f(x) = c$ مع $c \in \mathbb{R}$
$y' = ay; a \neq 0$	$f(x) = c \times e^{ax}$ (مع $c \in \mathbb{R}$)	$y' = 2y$	$f(x) = c \times e^{2x}$ مع $c \in \mathbb{R}$
$y' = ay + b$ و a و b من $\mathbb{R}^*$	$f(x) = c \times e^{ax} - \frac{b}{a}$ (مع $c \in \mathbb{R}$)	$y' = 4y + 5$	$f(x) = c \times e^{4x} - \frac{5}{4}$ مع $c \in \mathbb{R}$

03. برهان ل : $a=0$; $y' = ay + b = b$

$y' = b; b \neq 0$) الدالة المشتقة ثابتة إذن : $y = f(x) = bx + c$ مع $c \in \mathbb{R}$.

04. برهان ل $a \neq 0$; $y' = ay$ (1) :

نعتبر دالة f حل للمعادلة التفاضلية (1) حيث f معرفة على مجال I . ومنه : $\forall x \in I : f'(x) = af(x)$.

حالة : $\forall x \in I , f(x) = 0$. الدالة المنعدمة هي حل لهذه المعادلة التفاضلية (1) مع $c = 0$.

حالة : $\forall x \in I , f(x) \neq 0$

إذن : $a = \frac{f'(x)}{f(x)}$ و بالتالي : $\ln|f(x)| = ax + c'$ مع c' من $\mathbb{R}$. (درس الدوال الأصلية) .

ومنه : $|f(x)| = e^{ax+c'} = e^{ax} \times e^{c'} = \lambda e^{ax}$ مع $\lambda = e^{c'} > 0$ من $\mathbb{R}$.

ومنه : $f(x) = \lambda e^{ax} > 0$ أو $f(x) = -\lambda e^{ax} < 0$ $\forall x \in I ,$ مع $\lambda = e^{c'} > 0$ من $\mathbb{R}$.

إذن : يوجد x_1 و x_2 من I حيث : $f(x_1) = \lambda e^{ax_1} > 0$ و $f(x_2) = -\lambda e^{ax_2} < 0$ ؛ حسب مبرهنة التزايدات المنتهية T.V.I

نستنتج أن : يوجد c_0 من I حيث $f(c_0) = 0$. هذا غير ممكن لأن $\forall x \in I , f(x) \neq 0$)

إذن : $\forall x \in I , f(x) = \lambda e^{ax}$ أو $\forall x \in I , f(x) = -\lambda e^{ax}$

باختصار : $\forall x \in I , f(x) = -ce^{ax}$ مع $c \in \mathbb{R}$.

05. برهان ل $y' = ay + b \; ; a \neq 0$: (2)

لدينا :

$$y' = ay + b \Leftrightarrow y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow y' = az \;,\; z = y + \frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow z' = az \;,\; z = y + \frac{b}{a} \;, z' = \left(y + \frac{b}{a}\right)' = y'$$

حسب البرهان السابق نحصل على : حلول المعادلة التفاضلية : $z' = az$ هي الدوال التي على شكل : $z = ce^{ax}$ مع c من $\mathbb{R}$.

إذن : $z = ce^{ax} \Leftrightarrow z = y + \frac{b}{a} = ce^{ax} \Leftrightarrow y = ce^{ax} - \frac{b}{a}$

خلاصة الحل العام ل $y' = ay + b$ و a و b من $\mathbb{R}^*$: هي الدوال التي على شكل $f(x) = c \times e^{ax} - \frac{b}{a}$ (مع $c \in \mathbb{R}$)

06. خاصية :

> المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$ تقبل حلا وحيدا f يحقق الشرط البدئي $f(x_0) = y_0$ مع x_0 و y_0 من $\mathbb{R}$

II. المعادلة التفاضلية: $y'' + ay' + by = 0$

01. تعاريف:

> a و b من $\mathbb{R}$.
> - المعادلة $(E): y'' + ay' + by = 0$ حيث المجهول هو دالة y مع y' مشتقتها الأولى مع y'' مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة .
> - كل دالة عددية f قابلة للاشتقاق مرتين و تحقق المعادلة التفاضلية (E) تسمى حل خاص للمعادلة التفاضلية (E)
> - المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ حيث r هو المجهول تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $(E): y'' + ay' + by = 0$.

02. حل المعادلة التفاضلية: $y'' + ay' + by = 0$

مبرهنة مقبولة :

> لتكن المعادلة التفاضلية: $(E): y'' + ay' + by = 0$ و معادلتها المميزة $r^2 + ar + b = 0$ حيث: a و b من $\mathbb{R}$
> و $\Delta = a^2 - 4b$ المميز للمعادلة المميزة
> - ❖ $\Delta = a^2 - 4b > 0$ إذن المعادلة المميزة $r^2 + ar + b = 0$ لها حلين حقيقيين r_1 و r_2 فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي :
> الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $y = f(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.
> - ❖ $\Delta = a^2 - 4b = 0$ إذن المعادلة المميزة $r^2 + ar + b = 0$ لها حل حقيقي مزدوج r_1 فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي :
> الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $y = f(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_1 x}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.
> - ❖ $\Delta = a^2 - 4b < 0$ إذن المعادلة المميزة $r^2 + ar + b = 0$ لها حلين عقديين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$ فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي : الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $y = f(x) = (\alpha\cos(qx) + \beta\sin(qx))e^{px}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

03. ملحوظة:

المعادلة التفاضلية: $y''+\omega^2 y=0$ حلولها هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})\ ;\ y=f(x)=\alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)$

04. أمثلة

مثال 1 :

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : $(E):\ y''-5y'+6y=0$.

1. اعط المعادلة المميزة ل (E) .
2. أعط حلول المعادلة المميزة .
3. استنتج حلول المعادلة (E) .

جواب :

1. المعادلة المميزة ل (E) :

هي : $(C):\ r^2-5r+6=0$.

2. حلول المعادلة هي :

$r_2=3\ ,\ r_1=2\ ,\ \Delta=1$.

3. نستنتج حلول المعادلة :

الحل العام ل (E) هي الدوال التالي على شكل : $y=f(x)=\alpha e^{2x}+\beta e^{3x}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

مثال 2 :

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : $(E):\ y''+y'+y=0$.

1. اعط المعادلة المميزة ل (E) .
2. أعط حلول المعادلة المميزة .
3. استنتج حلول المعادلة (E) .

جواب :

1. المعادلة المميزة ل (E) :

هي : $(C):\ r^2+r+1=0$.

2. حلول المعادلة هي :

$$\Delta=-3\ ,\quad r_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j\ ,\quad r_2=\overline{r_1}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{j}\ .$$

3. نستنتج حلول المعادلة :

الحل العام ل (E) هي الدوال التالي على شكل : $f(x)=\left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{1}{2}x}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

05. تمرين :

1) حل المعادلة التفاضلية: $(E):y'+2y=0$
2) بين أن : $y_0=e^{-3x}$ حل للمعادلة التفاضلية $(E'):y'+2y=-e^{-3x}$
3) حدد الدالة g حل للمعادلة التفاضلية (E') التي تحقق $g(0)=2$