التكامـــل

I- تكامل دالة متصلة على مجال

1- تعريف و ترميز

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb عنصرين من I .

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فان F(b)-F(a)=G(b)-G(a).

أي أن العدد الحقيقي F(b)-F(a) غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية F.

تعريف

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb عنصرين من I.

العدد الحقيقيF(b)-F(a) حيث F دالة أصلية للدالة f علىI , يسمى تكامل الدالة f من a إلى b

ويكتب $\int_a^b f(x)dx$ ويقرأ مجموع $f(x)dx$ من a إلى b أو تكامل من a إلى b لـ $f(x)dx$.

a وb يسميا محدا التكامل $\int_a^b f(x)dx$

في الكتابة $\int_a^b f(x)dx$ يمكن تعويض x بأي حرف آخر ، بمعنى أن

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots\ldots$$

من أجل تبسيط الكتابة F(b)-F(a) نكتبها على الشكل $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$

أمثلة

* نحسب $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

الدالة $x \to \frac{1}{x}$ متصلة على $[1;2]$ و دالة أصلية لها هي $x \to \ln x$

اذن $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$

* أحسب $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx$; $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$

2- خاصيات

أ- خاصيات

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a وb وc عناصر منI

* $\int_a^a f(x)dx = 0$ * $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (علاقة شال)

أمثلة

أحسب $I = \int_{-1}^1 |x|dx$

$$\int_{-1}^1 |x|dx = \int_{-1}^1 |x|dx = \int_{-1}^0 -xdx + \int_0^1 xdx = \left[\frac{-1}{2}x^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1$$

ب)- لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$
$$x \to \int_a^x f(t)dt$$

لدينا $\varphi(x) = F(x) - F(a) \quad \forall x \in I$ حيث F دالة أصلية لـ f على I.

اذن φ قابلة للاشتقاق على I و $\varphi' = f \quad \varphi(a) = 0$ أي أن φ دالة الأصلية للدالة f على I التي تنعدم في a

خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I.

الدالة المعرفة على I بما يلي $x \to \int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية لـ f على I التي تنعدم في a

مثال نعلم أن الدالة $x \to \ln x$ هي الدالة الأصلية لـ $x \to \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في1 .

$$\forall x \in]0;+\infty[\qquad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

تمرين حدد الدالة الأصلية لـ f على $]0;+\infty[$ التي تنعدم في 2 حيث $f(x) = \frac{1}{x}\ln x \quad \forall x \in]0;+\infty[$

ج)- خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ و λ عدد حقيقي ثابت

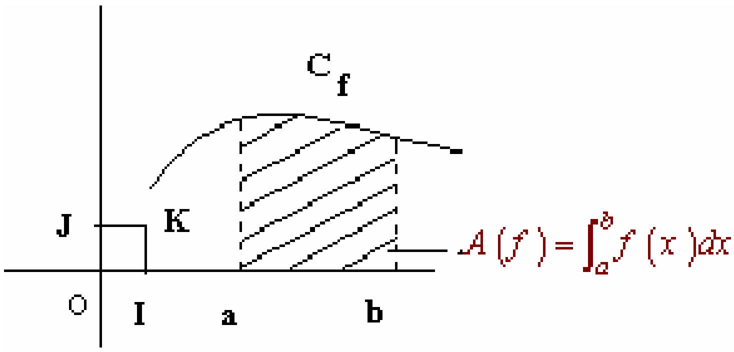
$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

تمرين حدد $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1)dx \quad ; \quad \int_0^\pi \cos^4 x dx$ (يمكن اخطاط $\cos^4 x$)

تمرين نعتبر $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$

أحسب $I + J$ و $I - J$ و استنتج $I \;;\; J$

د التأويل الهندسي للعدد $\int_a^b f(x)dx$



خاصية

إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على $[a;b]$ ($a \prec b$) فان مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفتين على التوالي بالمعادلتين $x = a$ و $x = b$ هي

$A(f) = \int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات

ملاحظة إذا كان المستوى منسوب إلى معلم متعامدين فان وحدة قياس المساحة هي مساحة المربع OIJK

تمرين

نعتبر $f(x)=\frac{1}{x^2}$

أنشئ C_f $\left(\|\vec{i}\|=1cm \quad \|\vec{j}\|=2cm\right)$

أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1 \quad ; \quad x=3$.

II- تقنيات حساب التكاملات

1- الاستعمال المباشر لدوال الأصلة

أمثلة

* أحسب $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ نلاحظ أن $\frac{(\ln x)^2}{x}$ على شكل $u'u^2$ حيث $u(x)=\ln x$

و نعلم أن الدالة الأصلية لـ $u'u^2$ هي $\frac{1}{3}u^3$ إذن $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx=\left[\frac{1}{3}u^3(x)\right]_1^e=\left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e=\frac{1}{3}$

* أحسب $\int_0^1 \frac{2}{e^x+1}dx$ لدينا $\frac{2}{e^x+1}=2\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ بهذا التحويل نلاحظ أن $\frac{2}{1+e^x}$ يكتب على شكل $-2\frac{u'}{u}$ حيث $u(x)=1+e^{-x}$ إذن $\int_0^1 \frac{2}{e^x+1}dx=\left[-2\ln|u(x)|\right]_0^1=\left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^1$

تمرين

1- حدد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx$

2- أ- أوجد a وb وc حيث $\frac{2x^4+x^2+x-1}{x^3+x}=ax+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2+1} \qquad \forall x\neq 0$

ب- استنتج قيمة $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^4+x^2+x-1}{x^3+x}dx$

3- بين أن التعبير $\frac{1}{x^2-2x+5}$ يكتب على شكل $\frac{1}{2}\frac{u'}{u^2+1}$ حيث u دالة يجيب تحديدها .

استنتج قيمة $\int_1^{1+2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2-2x+5}dx$

4- أحسب $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx \quad ; \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx \qquad \left(\frac{1}{x\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right)$

2- المكاملة بالأجزاء

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على $[a;b]$ بحيث f' و g' متصلتين على $[a;b]$

نعلم أن

$$\forall x\in[a;b] \qquad (fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\forall x\in[a;b] \qquad f'(x)g(x)=(fg)'(x)-f(x)g'(x)$$

خاصية

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=\left[(fg)(x)\right]_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

مثال أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ نضع $u'(x)=\cos x \quad ; \quad v(x)=x$

ومنه $u(x)=\sin x \quad ; \quad v'(x)=1$

إذن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx=[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$

<u>تمرين</u> أحسب $I=\int_1^e \ln x dx \quad ; \quad J=\int_0^{\pi} x^2\sin x dx \quad ; \quad K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x dx$

<u>الحل</u>

$$K=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-K$$

$$K=\frac{1}{2}\left(\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\ldots\ldots\ldots$$

<u>تمرين</u> 1- أحسب $\int_1^2 x^2\ln x dx \qquad \int_0^3 (x-1)e^{2x}dx \qquad \int_0^1 x\sqrt{x+3}dx \qquad \int_0^1 \ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|dx$

2- باستعمال المكاملة بالأجزاء أوجد الدوال الأصلية لـ f على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $f(x)=\frac{x}{\cos^2 x}$

3- أحسب $I=\int_0^x e^t\cos^2 t dt$ (يمكن اعتبار $J=\int_0^x e^t\sin^2 t dt$)

<u>3- المكاملة بتغيير المتغير</u>

لتكن g دالة قابلة للاشتقاق على $[a;b]$ حيث g' متصلة على $[a;b]$. و f دالة متصلة على J حيث $g([a;b])=J$

إذا كانت F دالة أصلية لـ f على J فان $(F\circ g)'(x)=f(g(x))\times g'(x) \quad \forall x\in[a;b]$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\left[F\circ g(x)\right]_a^b=F(g(b))-F(g(a))=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

<u>خاصية</u>

لتكن g دالة قابلة للاشتقاق على $[a;b]$ حيث g' متصلة على $[a;b]$. و f دالة متصلة على J حيث $g([a;b])=J$.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

<u>ملاحظة</u>

إذا وضعنا $t=g(x)$ فان $\frac{dt}{dx}=g'(x)$ أي $dt=g'(x)dx$

إذا عوضنا في التعبير $f(g(x))g'(x)dx$ المتغير x بالمتغير t نحصل على $f(t)dt$

ولدينا إذا كان $\left.\begin{array}{l}x=a\\x=b\end{array}\right\}$ فان $\left.\begin{array}{l}t=g(a)\\t=g(b)\end{array}\right\}$

نقول إننا أجرينا تغييرا للمتغير بوضع $t=g(x)$

<u>أمثلة</u> أحسب $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx \quad \left(t=\frac{1}{x}\right) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} \quad \left(t=\tan\frac{x}{2}\right)$

ملاحظة $\left(\sin x=\frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$

تمرين أحسب

$$\int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{x}} \quad \left(t=2+\sqrt{x}\right) \quad ; \quad \int_1^{\ln 2}\sqrt{e^x+1} \quad \left(e^x=t\right)$$

$$\int_1^2 \frac{e^x-1}{e^x+1}dx \quad \left(t=e^x\right) \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx \quad \left(t=\tan x\right)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx \quad \left(x=\frac{1}{t} \quad ; \quad t=\frac{e^u-e^{-u}}{2}\right)$$

III- التكامل و الترتيب

1- مقارنة تكاملين

a) لتكن f دالة متصلة على [a;b] و F دالة أصلية لـ f على [a;b]

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \qquad \forall x\in[a;b] \quad F'(x)=f(x)$$

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان F تزايدية على $[a;b]$

وحيث أن $a\le b$ فان $F(a)\le F(b)$ ادن $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

خاصية

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a\le b)$

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

b) خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ $(a\le b)$

إذا كانت $f\le g$ على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

مثال

نؤ طر $I=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$

لدينا $\frac{x^2}{2}\le \frac{x^2}{1+x}\le x^2 \Leftrightarrow 1\le 1+x\le 2$ $\quad \forall x\in[0;1]$ ومنه $\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx \le I \le \int_0^1 x^2dx$

إذن $\frac{1}{6}\le I\le \frac{1}{3}$

c) خاصيات

أ- لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a\le b)$

إذا كانت f سالبة على $[a;b]$ فان $\int_a^b f(x)dx \le 0$

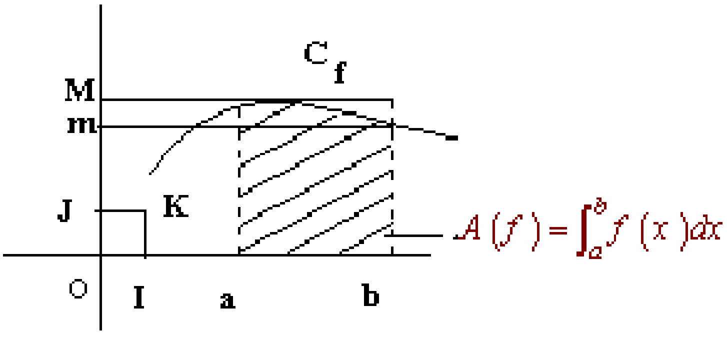
ب- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

ج- لتكن M القيمة القصوية و m القيمة الدنوية للدالة f على $[a;b]$

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان المساحة $A(f)=\int_a^b f(x)dx$ في معلم م.م محصورة بين مساحتي المستطيل الذي بعديه M و$(b-a)$ و المستطيل الذي بعديه m و $(b-a)$.



مثال

نعتبر $I=\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$ نبين أن $0\le I\le\sqrt{2}$

الدالة $x\to\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ موجبة و تناقصية على $]0;+\infty[$ ومنه $\sup_{x\in[1;3]} f(x)=f(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

اذن $0\le I\le(3-1)\frac{\sqrt{2}}{2}$

2- القيمة المتوسطة لدالة متصلة في قطعة

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a\prec b)$ و M القيمة القصوية و m القيمة الدنوية للدالة f على $[a;b]$

إذن $m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$ ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية يوجد على الأقل c في $[a;b]$

حيث $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

خاصية و تعريف

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ $(a\ne b)$

العدد الحقيقي $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على $[a;b]$.

يوجد على الأقل c في $[a;b]$ حيث $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان المساحة $A(f)=\int_a^b f(x)dx$ في معلم م.م هي مساحة المستطيل

الذي بعداه $(b-a)$ و $f(c)$.

تمرين 1- أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على I في الحالتين التاليتين

a) $f(x)=(x-1)e^x$ $I=[-1;0]$; b) $f(x)=\frac{x^3+5x^2+x+3}{x+1}$ $I=[0;1]$

2- أطر الدالة f على $[0;1]$ حيث $f(x)=\arctan x$

الجواب عن السؤال2 لدينا f قابلة للاشتقاق على$[0;1]$ و $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ $\forall x\in[0;1]$ و منه

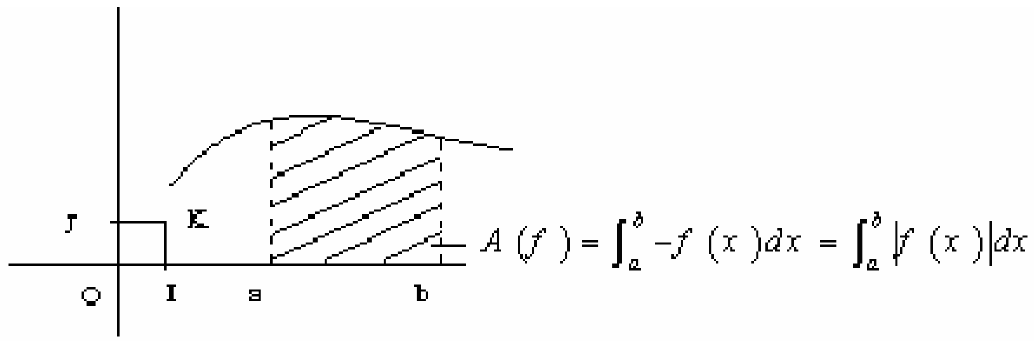
$\frac{1}{2}\le f'(x)\le 1$ $\forall x\in[0;1]$ ادن $\int_0^x \frac{1}{2}dt\le\int_0^x f'(t)dt\le\int_0^x dt$ $\forall x\in[0;1]$ $\frac{x}{2}\le f(x)\le x$

IV- حساب المساحات

1- حساب المساحات الهندسية

المستوى منسوب إلى م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $(\Delta_1): x = a$ $(\Delta_2): x = b$



*إذا كانت f موجبة على $[a;b]$ فان مساحة $\Delta(f)$ هي $\int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات

*إذا كان كانت f سالبة على $[a;b]$ مساحة هي مساحة $\Delta(-f)$

$$A(f) = \int_a^b -f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

* إذا كانت f تغير إشارتها على $[a;b]$ مثلا يوجد c من $[a;b]$ حيث f موجبة على $[a;c]$ و سالبة على $[c;b]$

الحيز $\Delta(f)$ على $[a;b]$ هو اتحاد $\Delta(f)$ على $[a;c]$ و $\Delta(f)$ على $[c;b]$

$$A(f) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx = \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

خاصية

المستوى منسوب الى م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين $(\Delta_1): x = a$ $(\Delta_2): x = b$

مساحة الحيز $\Delta(f)$ هو $\int_a^b |f(x)|dx$ بوحدة قياس المساحة

اصطلاحات

العدد الموجب $\int_a^b |f(x)|dx$ يسمى المساحة الهندسية للحيز $\Delta(f)$.

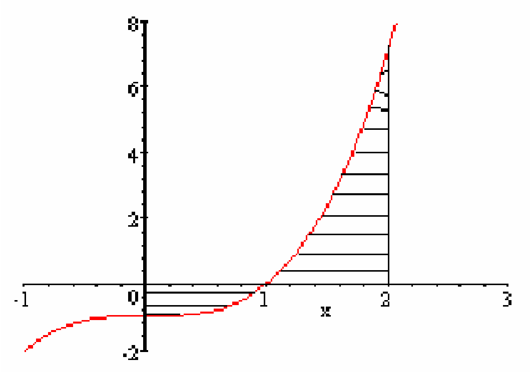
العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$ يسمى المساحة الجبرية للحيز $\Delta(f)$.

مثال

نعتبر $f(x) = x^3 - 1$

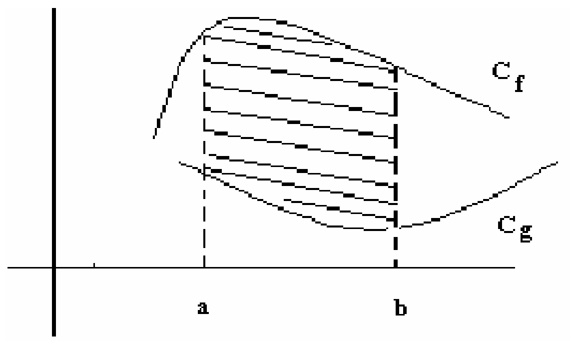
حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين ذا المعادلتين $x = 2 \quad ; \quad x = 0$

$$A = \int_0^2 |f(x)|dx = \int_0^1 (1 - x^3)dx + \int_1^2 (x^3 - 1)dx = \frac{7}{2}u \qquad \left(u = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|\right)$$



-2 مساحة حيز محصور بين منحنيين

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$ و Δ هو الحيز المحصور بين C_f و C_g و المستقيمين $(\Delta_1): x=a$ $\quad(\Delta_2): x=b$ في م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$



إذا كان $f \geq g \geq 0$ فان $A(\Delta)=A(f)-A(g)$

$$A(\Delta)=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b (f(x)-g(x))dx=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

إذا كانت $f \leq g$ و كيفما كانت إشارتي f و g و بإتباع نفس الطريقة نحصل على أن

$$A(\Delta)=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

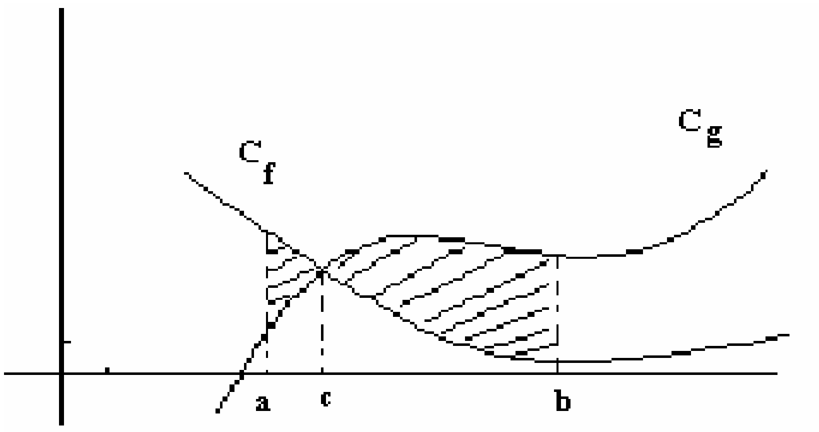
خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a;b]$

مساحة الحيز Δ المحصور بين C_f و C_g و المستقيمين $(\Delta_1): x=a$ $\quad(\Delta_2): x=b$

هي $A(\Delta)=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ وحدة قياس المساحات

ملاحظة



$$A(\Delta)=\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^b (g(x)-f(x))dx$$

V- حساب الحجوم في الفضاء

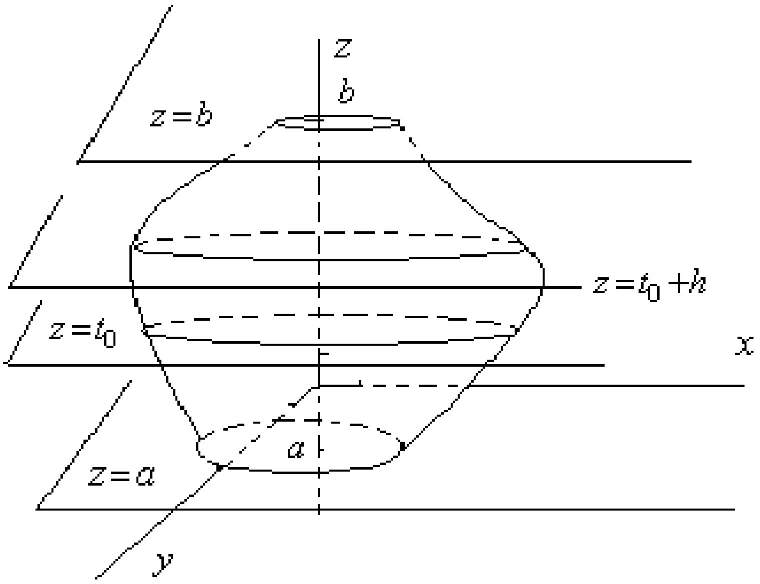
الفضاء منسوب إلى معلم م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نفترض أن وحدة قياس الحجم هي حجم المكعب الذي طول حرفه $\|\vec{i}\|$

1- حجم مجسم في الفضاء

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z=a$ و $z=b$

نرمز بـ $S(t)$ إلى مساحة مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S حيث $z=t$ و بالرمز $V(t)$ إلى حجم مجموعة النقط من S المحصور بين المستويين $z=a$; $z=t$

ليكن t_0 من $[a;b]$ و h عددا موجبا حيث $t_0+h\in[a;b]$



حجم مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S المحصورة بين $z=t_0$ و $z=t_0+h$ هو $V(t_0+h)-V(t_0)$

ومن جهة ثانية هذا الحجم محصور بين حجمي الأسطوانتين التي ارتفاعهما h و مساحتا قاعدتيهما على التوالي $S(t_0)$ و $S(t_0+h)$

إذا افترضنا أن $S(t_0)\le S(t_0+h)$ فان $h\cdot S(t_0)\le V(t_0+h)-V(t_0)\le h\cdot S(t_0+h)$

و منه $S(t_0)\le \dfrac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}\le S(t_0+h)$

و إذا افترضنا أن التطبيق $t\to S(t)$ متصل على $[a;b]$ فان $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{V(t_0+h)-V(t_0)}{h}=S(t_0)$

إذن الدالة $t\to V(t)$ قابلة للاشتقاق على $[a;b]$ و $V'(t)=S(t)\quad \forall t\in[a;b]$

أي أن الدالة $t\to V(t)$ دالة أصلية للدالة $t\to S(t)$ على $[a;b]$

و بما أن $V(a)=0$ فان $V(t)=\int_a^t S(x)dx \quad \forall t\in[a;b]$

إذن حجم المجسم S هو $V=V(b)=\int_a^b S(x)dx$ وحدة قياس الحجم .

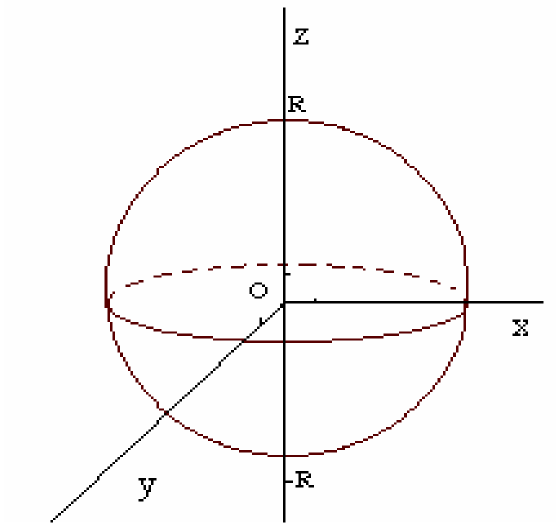
خاصية

الفضاء منسوب إلى معلم م.م

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z=a$ و $z=b$

نرمز بـ $S(t)$ الى مساحة مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من S حيث $z=t$

إذا كان أن التطبيق $t\to S(t)$ متصلا على $[a;b]$ فان حجم المجسم S هـو $V=\int_a^b S(z)dz$ وحدة قياس الحجم.



تمرين

أحسب حجم الفلكة التي مركزها O و شعاعها R

الحل : نفترض أن الفضاء منسوب م.م.م أصله O.

الفلكة محصورة بين المستويين المعرفين على التوالي

بالمعادلتين $z = R \quad ; \quad z = -R$

مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفلكة حيث $z = t$ $\quad -R \le t \le R$

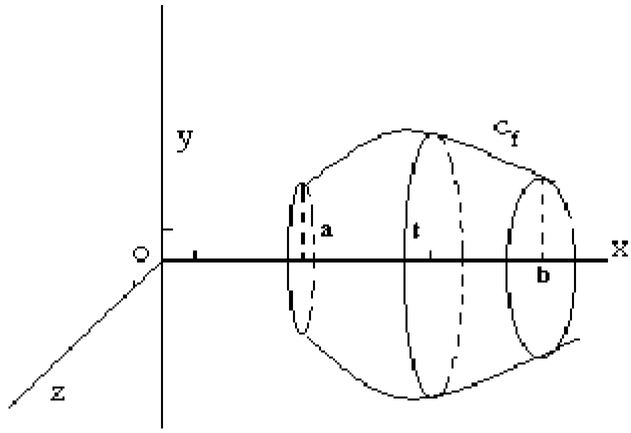
هي قرص شعاعه $\sqrt{R^2 - t^2}$ و مساحته $S(t) = \pi\left(R^2 - t^2\right)$

بما أن التطبيق $t \to \pi\left(R^2 - t^2\right)$ متصلة على $[-R;R]$ فان $= \dfrac{4}{3}\pi R^3$

2- حجم مجسم الدوران

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و C_f منحناها في م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$

إذا دار C_f حول المحور $(O;\vec{i})$ دورة كاملة فانه يولد مجسما يسمى مجسم الدوران



في هذه الحالة لدينا مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الجسم بحيث $x = t$ هي قرص مساحته

$S(t) = \pi f^2(t)$

التطبيق $t \to \pi f^2(t)$ متصلة على $[a;b]$

إذن حجم المجسم الدوراني هو $V = \int_a^b \pi f^2(t)dt$

خاصية

> الفضاء منسوب إلى م.م.م أصله o , و f دالة متصلة على $[a;b]$
>
> حجم مجسم الدوران المولد عن دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) هو $V = \int_a^b \pi f^2(t)dt$
>
> بوحدة قياس الحجم .

تمرين

نعتبر $f(x) = \dfrac{1}{2}x\ln x$

أنشئ C_f و حدد حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) في المجال $[1;e]$

IV- حساب بعض النهايات باستعمال التكامل

مبرهنة

لتكن f متصلة على $[a;b]$.

لكل عنصر n من $\mathbb{N}^*$ نضع $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$; $s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$

إذا كانت f رتيبة قطعا على $[a;b]$ أو قابلة للاشتقاق و f' محدودة على $[a;b]$ فان المتتاليتين (S_n) و (s_n)

متقاربتين و تقبلان التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ نهاية مشتركة لهما عندما يؤول n إلى $+\infty$

مثال

نعتبر $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

حدد $\lim u_n$

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + ... + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)$

حيث $f(x) = \frac{1}{x}$

لدينا f متصلة وتناقصية على $[1;2]$ ومنه المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln 2$

حالة خاصة

المتوسط الحسابي $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ يؤول الى القيمة المتوسطة $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

تمرين

أحسب النهايات $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$; $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}$; $\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+k^2}$