ملحوظة:

في جميع الفقرات من هذا الدرس f دالة عددية للمتغير الحقيقي x و $\left(C_f\right)$ منحناها في (م . م . م) معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

I. الاشتقاق وتطبيقاته:

01. المشتقة الأولى

A) رتابة دالة عددية:

1. خاصية :

f قابلة للاشتقاق على مجال I .

- إذا كانت $f'>0$ على I فإن f تزايدية قطعا على I (يمكن للدالة f' أن تنعدم في بعض النقط المنعزلة من I وهذا لا يؤثر على رتابة f) .
- إذا كانت $f'<0$ على I فإن f تناقصية قطعا على I .(نفس الشيء يمكن للدالة f' أن تنعدم في بعض النقط المنعزلة من I)
- إذا كانت $f'=0$ منعدمة على I (بكامله) فإن f ثابتة على I

2. مثال : أدرس تغيرات f على $\mathbb{R}$ مع $f(x)=(2x+4)^2$.

1) حساب f': لدينا: $f'(x)=$ ....

$=$..................

2) إشارة f' : لدينا: $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow$ ....

إذن : f' موجبة على............ و سالبة على............... ومنه جدول تغيرات f:

02. الدالة المشتقة الثانية وتطبيقاتها:

A) الوضع النسبي للمنحنى $\left(C_f\right)$ والمماس ل $\left(C_f\right)$ في نقطة x_0

1. خاصية :

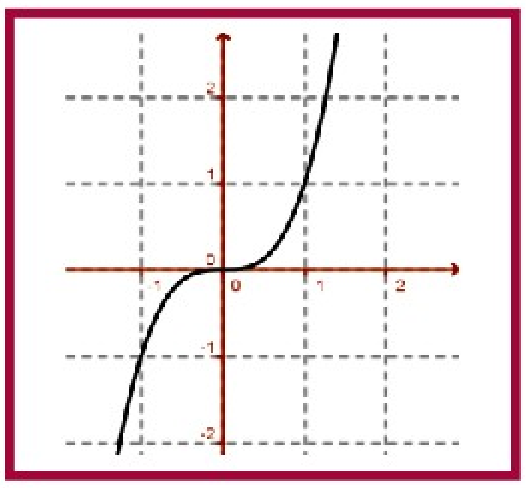
f قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح I و x_0 من I .

- إذا كان $f''(x_0)\geq 0$ فإن المنحنى $\left(C_f\right)$ يوجد فوق المماس ل $\left(C_f\right)$ في النقطة التي أفصولها x_0 .
- إذا كان $f''(x_0)\leq 0$ فإن المنحنى $\left(C_f\right)$ يوجد تحت المماس ل $\left(C_f\right)$ في النقطة التي أفصولها x_0 .

2. مثال: لنعتبر الدالة: $f(x)=x^3$

1) أحسب: $f''(x)$ ثم أعط إشارتها.

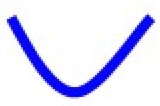
2) أنشئ بعض المماسات على المجال $[0,+\infty[$ ثم على $]-\infty,0]$.

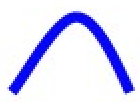


B) تقعر منحنى $\left(C_f\right)$ - نقط انعطاف $\left(C_f\right)$:

1. تعريف:

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I. $\left(C_f\right)$ منحنى f في معلم.

منحنى f محدب (convexe) على I إذا كان $\left(C_f\right)$ يوجد فوق جميع مماساته على I. ونرمز له ب 

منحنى f مقعر (concave) على I إذا كان $\left(C_f\right)$ يوجد تحت جميع مماساته على I. ونرمز له ب 

$M_0(x_0,y_0)$ نقطة من $\left(C_f\right)$. (T) المماس ل $\left(C_f\right)$ في M_0 . النقطة M_0 (أو النقطة x_0) هي نقطة انعطاف ل $\left(C_f\right)$ يعني أن المماس (T) يخترق (أو يقطع) $\left(C_f\right)$ في M_0

.2 خاصية :

f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I.

- إذا كان : $\forall x \in I / f''(x) \geq 0$ فإن (C_f) محدب (convexe) على I (أو أيضا (C_f) له تقعر موجه نحو الأراتيب الموجبة).
- إذا كان : $\forall x \in I / f''(x) \leq 0$ فإن (C_f) مقعر (concave) على I (أو أيضا (C_f) له تقعر موجه نحو الأراتيب السالبة).
- الدالة المشتقة الثانية " f تنعدم في x_0 من I و تتغير إشارتها بجوار x_0 النقطة التي أفصولها x_0 هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) (أو للدالة f).

.3 مثال: (أنظر ورقة الأنشطة المثال 2)

لنعتبر الدالة f حيث إشارة دالتها المشتقة الثانية "f هي بواسطة الجدول التالي:

أعط تقعر (C_f) منحنى الدالة f

x	$-\infty$	-5		-1		2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
تقعر (C_f)							

C) نقط انعطاف: POINTS D'INFLEXIONS

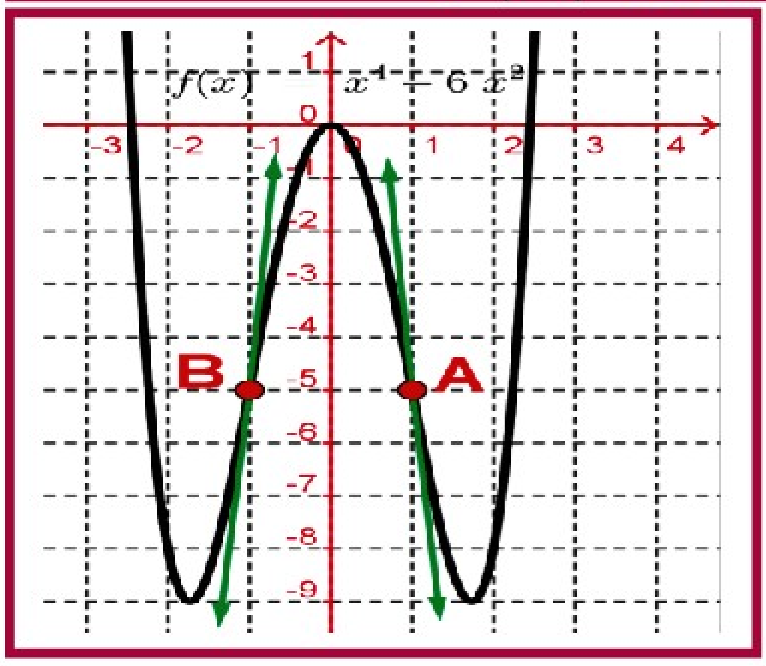
.1 تعريف:

(C_f) منحنى دالة عددية f في معلم و $M_0(x_0, y_0)$ نقطة من (C_f). (T) المماس ل (C_f) في M_0 .

النقطة M_0 (أو النقطة x_0) هي نقطة انعطاف ل (C_f) يعني أن المماس (T) يخترق (أو يقطع) (C_f) في M_0

.2 مثال: لنعتبر الدالة $f(x) = x^4 - 6x^2$

$A\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$ نقطتي انعطاف ل (C_f)



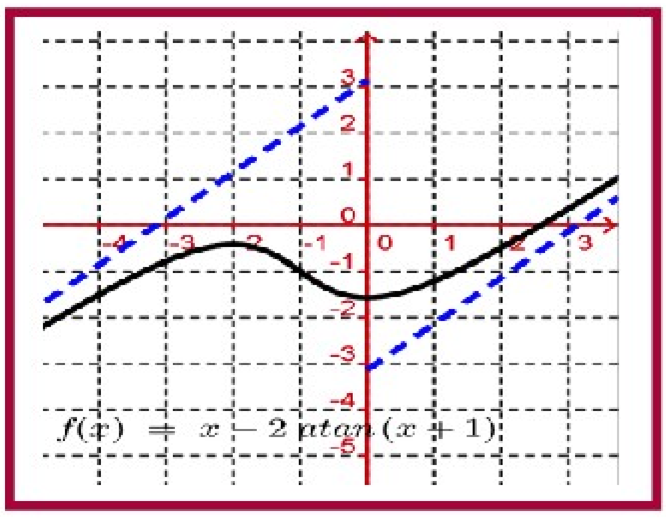
.3 خاصية:

f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I. x_0 من I.

الدالة المشتقة الثانية " f تنعدم في x_0 من I و تتغير إشارتها بجوار x_0 النقطة التي أفصولها x_0 هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) (أو للدالة f) .

مثال 1:

1. هل الدالة f تقبل نقط انعطاف حددها ؟
2. أنشئ نقط انعطاف (C_f). إذا كان ممكن.



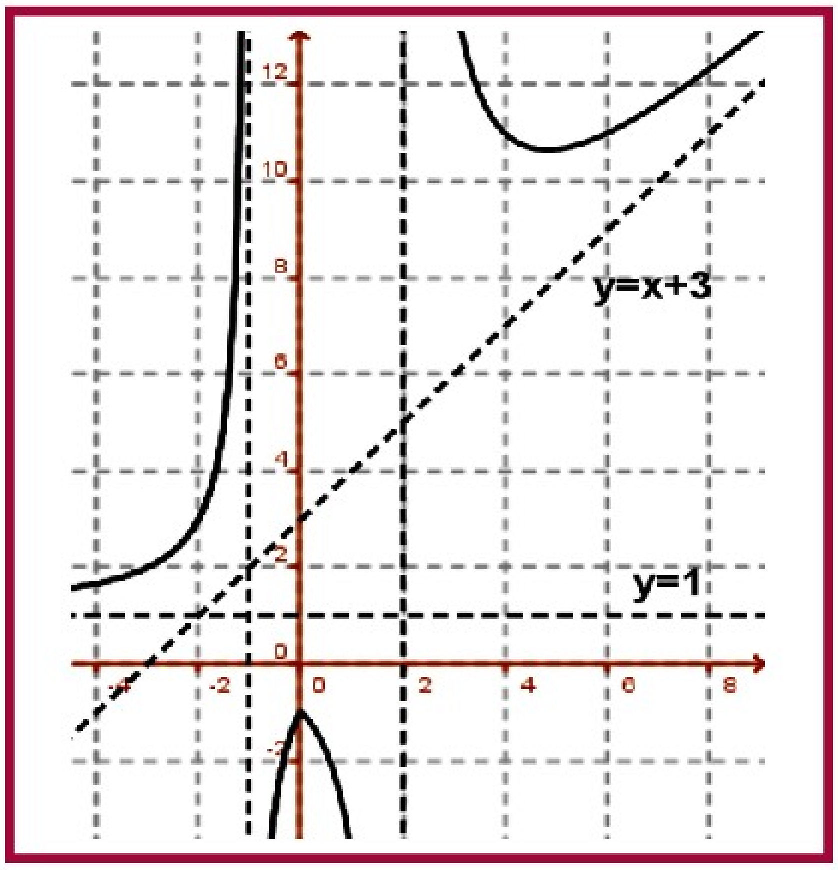
II. الفروع اللانهائية لمنحنى دالة f :

A) فرع اللانهائي :

.1 تعريف:

(C_f) منحنى دالة عددية f في معلم. إذا آلت إحدى إحداثيتي نقطة M من (C_f) إلى ما لا نهاية فإن (C_f) يقبل فرع اللانهائي.

2. نشاط:



1) حدد الفروع اللانهائية ل $\left(C_f\right)$.

2) أعط تعاريف لكل نوع من هذه الفروع اللانهائية.

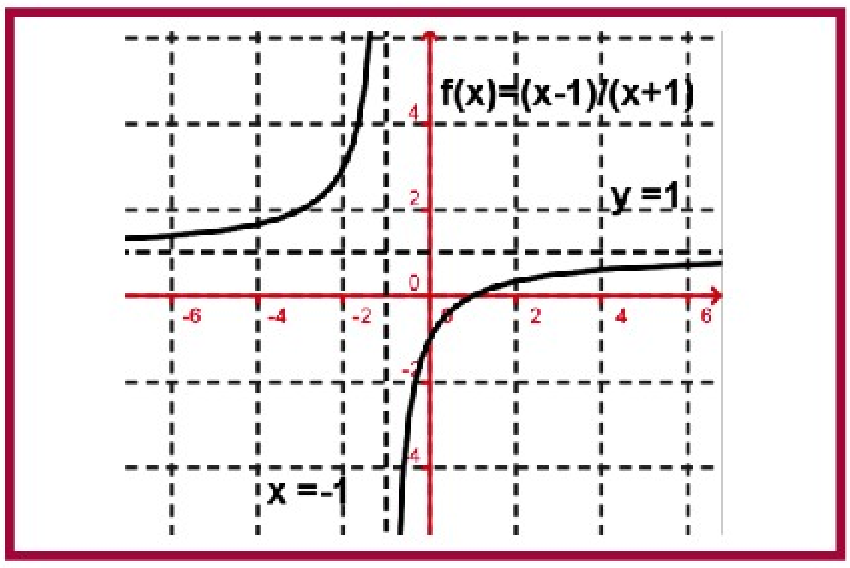
B) مقارب أفقي - ASYMPTOTE HORIZONTALE

1. تعريف:

f دالة عددية معرفة على $[a,+\infty[$ (أو $]-\infty,a[$).

إذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ (أو $\lim_{x\to-\infty} f(x)=c$) فإن المستقيم ذي المعادلة y=b (أو y=c) مقارب أفقي ل $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$).

2. مثال:



$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ إذن المستقيم ذي المعادلة $y=1$ مقارب أفقي ل $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$.

C) مقارب عمودي – ASYMPTOTE VERTICALE:

1. تعريف:

f دالة عددية معرفة $D\setminus\{x_0\}$ (أي f غير معرفة في x_0)

إذا كان $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ (أو $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$) فإن المستقيم ذي المعادلة $x=x_0$ مقارب عمودي ل $\left(C_f\right)$ عند x_0 (على اليمين) أو على اليسار).

2. مثال:

$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ لدينا: $\lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ إذن المستقيم ذي المعادلة $x=-1$ مقارب عمودي ل $\left(C_f\right)$.

D) مقارب مائل – ASYMPTOTE OBLIQUE :

- تعريف:

f دالة عددية معرفة على $[a,+\infty[$ (أو $]-\infty,a[$). $\left(C_f\right)$ منحنى دالة عددية f في معلم.

المستقيم ذي المعادلة $y=ax+b$ (أو $y=a'x+b'$) هو مقارب مائل ل $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$) يعني:

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty\\ \lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0\end{cases} \quad \text{أو} \quad \left(\begin{cases}\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty\\ \lim_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0\end{cases}\right)$$

- **مثال:** لنعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=x-2+\frac{1}{x-1}$

بين أن: (C_f) يقبل مقارب مائل بجوار $+\infty$. نحسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$

خلاصة: المستقيم ذي المعادلة $y=x-2$ يسمى مقارب مائل بجوار ∞ ل (C_f).

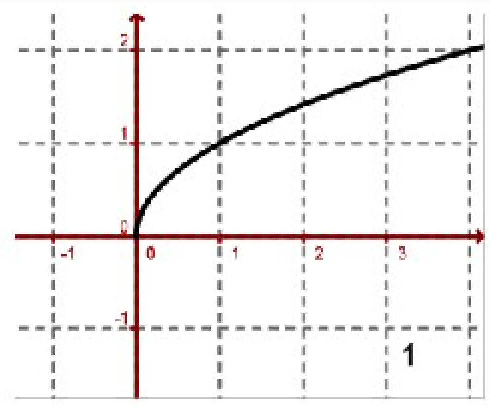
- **ملاحظات:**

> - إذا كان $f(x)-(ax+b)\geq 0$ فإن (C_f) يكون فوق المقارب المائل الذي معدلته $y=ax+b$.
> - إذا كان $f(x)-(ax+b)\leq 0$ فإن (C_f) يكون تحت المقارب المائل الذي معدلته $y=ax+b$.
> - إذا كان $f(x)-(ax+b)=0$ فإن (C_f) يقطع المقارب المائل الذي معدلته $y=ax+b$.

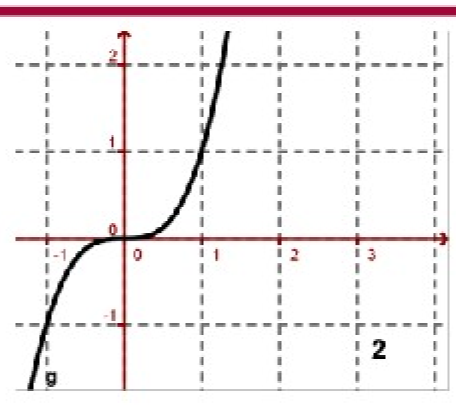
- **تحديد : a b**

تحديد a و b مع الحالات الخاصة:

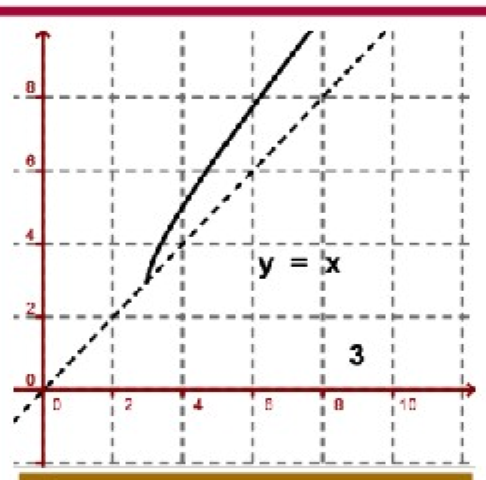
> لتحديد a نحسب: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$.
>
> - إذا كان : $a=0$ نقول أن : (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل. (أنظر الرسم 1).
> - إذا كان : $a=\infty$ نقول أن : (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب. (أنظر 7 الرسم 2)
> - $a\in\mathbb{R}^*$ (أي $a\neq 0$ و $a\neq\infty$) و $b=\infty$ في هذه الحالة نبحث عن b .
>
> لتحديد b نحسب : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=b$. بشرط $a\in\mathbb{R}^*$ (أي $a\neq 0$ و $a\neq\infty$).
>
> - $b=\infty$ هذه الحالة نقول أن : (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y=ax$ بجوار ∞. أو أيضا : (C_f) يقبل اتجاه مقاربي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y=ax$ بجوار ∞. (أنظر الرسم 3)
> - $b\in\mathbb{R}$ (حتى $b=0$) في هذه الحالة نقول أن : (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y=ax+b$. (أنظر الرسم 4)



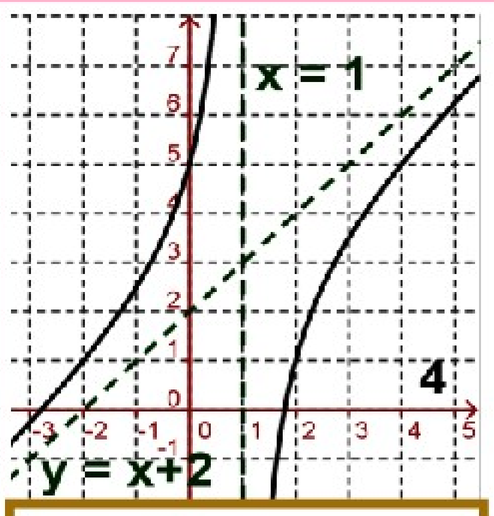
منحناها $f(x)=\sqrt{x}$ يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل



منحناها $f(x)=x^3$ يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب



$f(x)=x+\sqrt{x-3}$ منحناها يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم $D:y=x$



$f(x)=x+3-\frac{(x+2)}{(x-1)}$ منحناها يقبل مقارب مائل معادلته $D:y=x+2$

2. ملحوظة:

> إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(ax+b)=c$ فإن (C_f) يقبل مقارب مائل الذي معادلته $y=ax+b+c$ بجوار ∞.

3. مثال: $f(x)=x+3-\frac{(x+2)}{(x-1)}$.

لدينا : $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-(x+3)=\lim_{|x|\to+\infty}-\frac{(x+2)}{(x-1)}=-1$ و منه المستقيم الذي معادلته $y=x+2$ مقار مائل ل (C_f) بجوار $\pm\infty$.

III. محور تماثل – مركز تماثل منحنى .

A) مركز تماثل منحنى :

- خاصية:

> f دالة عددية معرفة D_f . (C_f) منحنها على D_f في معلم. $I(a,b)$ نقطة من المستوى (P).
>
> النقطة $I(a,b)$ هي مركز تماثل ل (C_f) يكافئ : $\begin{cases}\forall x\in D_f\ ;\ 2a-x\in D_f\\ \forall x\in D_f\ ;\ f(2a-x)+f(x)=2b\end{cases}$.

B) محور تماثل ل (C_f):

- خاصية:

> f دالة عددية معرفة D_f . (C_f) منحنها على D_f في معلم م.م . $D: x=a$ مستقيم من المستوى (P).
>
> المستقيم الذي معادلته $D: x=a$ هو محور تماثل ل (C_f) يكافئ : $\begin{cases}\forall x\in D_f\ ;\ 2a-x\in D_f\\ \forall x\in D_f\ ;\ f(2a-x)=f(x)\end{cases}$.

- مثال: $f(x)=(x-1)^2+1$ حدد محور تماثل (C_f)

IV. مجموعة دراسة دالة

1. تعاريف:

> f دالة عددية معرفة على $D_f=I\cup I'$ حيث I و I' متماثلين بالنسبة ل 0 مع I يحتوي على الأعداد الموجبة و I' يحتوي على الأعداد السالبة.
>
> - إذا كانت f زوجية أو فردية يكفي دراسة على المجموعة $D_E=I$ أو $D_E=D_f\cap\mathbb{R}^+$.
>   - أ- تغيرات f على I' هي نفس تغيرات f على I إذا كانت f فردية.
>   - ب- تغيرات f على I' هي عكس تغيرات f على I إذا كانت f زوجية.
> - إذا كانت f دورية و دورها $P=T$ يكفي دراسة على $D_E=D_f\cap J$ مع J مجال طوله T . $D_E=D_f\cap[a,a+T]$ مع $a\in\mathbb{R}$

2. مثال:

$f(x)=\sin(x)$ هي معرفة على $\mathbb{R}$ ودورية ودورها 2π أي دراستها على مجال طوله $P=T$:

$D_E=\mathbb{R}\cap[0,2\pi[=[0,2\pi[$. أو $D_E=\mathbb{R}\cap[0,2\pi]=[0,2\pi]$. أو $D_E=\mathbb{R}\cap[-\pi,\pi[=[-\pi,\pi[$ أو ....

3. ملحوظة:

> إذا كانت f دورية و دورها $P=T$ و زوجية (أو فردية) على D_f يكفي دراستها على مجال طوله $\frac{T}{2}$ أي $D_E=D_f\cap\left[0,\frac{T}{2}\right]$ أو
>
> $D_E=\mathbb{R}\cap\left[-\frac{T}{4},\frac{T}{4}\right[$.

4. مثال:

- **مثال 1 :** $f(x)=\sin(x)$ هي معرفة و دورية و فردية على $\mathbb{R}$ ودورها $T=2\pi$. ندرس الدالة f على مجال طوله π .

خلاصة: مجموعة دراسة الدالة هي $D_E=\mathbb{R}\cap[0,\pi]=[0,\pi]$ أي $D_E=[0,\pi]$.

- **مثال 2 :** $f(x)=\cos(x)$ هي معرفة على $\mathbb{R}$. ودورية ودورها 2π و زوجية. ندرسها على مجال طوله π .

خلاصة: مجموعة دراسة الدالة هي $D_E=\mathbb{R}\cap[0,\pi]=[0,\pi]$ أي $D_E=[0,\pi]$.

V. تصميم دراسة دالة عددية :

1	مجموعة تعريف الدالة f: D_f	8	دراسة إشارة f' على D_f أو D_E
2	دراسة زوجية f أو دورية f (إذا كان ذلك ممكن)	9	إعطاء جدول تغيرات f على D_f أو D_E
3	استنتاج مجموعة دراسة f : D_E	10	إذا كان ذلك ممكن دراسة تقعر أو نقط انعطاف f
4	نهايات f عند محدات D_f أو D_E	11	إنشاء 1) المعلم - 2) المقاربات - 3) بعض المماسات (حيث $f'(x)=0$ أو نقط انعطاف f إذا كان ممكن..)– 4) إنشاء (C_f)
5	استنتاج الفروع اللانهائية ل f	12	هناك بعض الأسئلة الإضافية مثل حل مبيانيا المعادلة $x\in D_f / f(x)=m$ و $x\in D_f / f(x)=g(x)$ أو المتراجحة $x\in D_f / f(x)\leq 0$..
6	دراسة الوضع النسبي للمنحى f و المقارب المائل (إذا كان ذلك ممكن)	13	ثم دراسة الدالة $g(x)=\sqrt{f(x)}$ أو $g(x)=f(\|x\|)$
7	حساب الدالة المشتقة f' ل f على D_f أو D_E	14	أو أسئلة أخرى ربط هذه الدالة بالفيزياء أو ....

VI. مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب:

$f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$. وليكن (C_f) منحنى f في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2) أحسب النهايات عند محدات D_f.
3) حدد $a\ ;\ b\ ;\ c$ من $\mathbb{R}$: $\forall x\in D_f ; f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$
4) أدرس الفروع اللا نهائية للمنحنى (C_f).
5) أدرس الوضعية النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة لمقاربه المائل .
6) أحسب $f'(x)$ لكل x من D_f.
7) أدرس إشارة f' على D_f ثم أعط جدول تغيرات f .
8) أدرس تقعر المنحنى (C_f) على D_f .
9) بين أن النقطة $I(1,1)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) .