

الأعداد العقدية

مبرهنة

توجد مجموعة \mathbb{C} تتضمن \mathbb{R} و تحقق:

(i) يحتوي \mathbb{C} على عنصر غير حقيقي i و يحقق $i^2 = -1$

(ii) كل عنصر من \mathbb{C} يكتب بكيفية و حيدة على الشكل: $a + ib$ بحيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

(iii) المجموعة \mathbb{C} مزودة بعمليات الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في \mathbb{R} و لهما نفس

الخصائص

$$b = b' \text{ و } a = a' \Leftrightarrow a + ib = a' + ib'$$

ليكن $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ و $(a'; b') \in \mathbb{R}^2$

خاصية

ليكن عدد عقدي $z = a + ib$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

العدد a يسمى الجزء الحقيقي نكتب $\text{Re}(z) = a$ ، و العدد b يسمى الجزء التخيلي نكتب $\text{Im}(z) = b$

خاصية $(\mathbb{C}; +; \times)$ جسم تبادلي

1- التمثيل الهندسي لعدد عقدي

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

كل نقطة $M (a; b) \in (P)$ هي صورة عدد عقدي وحيد $z = a + ib$ وهذا الأخير يسمى لحق M ونكتب $M(z)$

أو $z = \text{aff}(M)$

العدد العقدي $z = a + ib$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ يسمى أيضا لحق المتجهة $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ نكتب $z = \text{aff}(\vec{u})$

* لحق \overline{AB} هو $z_B - z_A$ حيث $A(z_A)$ و $B(z_B)$

* تكون النقط المختلفة $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ مستقيمة إذا و فقط إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

* التطبيق $M(z) \rightarrow M'(z+a)$ من المستوى (P) نحو المستوى (P) هو الازاحة التي متجهتها

\vec{u} حيث $\text{aff}(\vec{u}) = a$

2- المرافق و المعيار

ليكن عدد عقدي $z = a + ib$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

* العدد العقدي $z = a - ib$ يسمى مرافق العدد العقدي $z = a + ib$ ونرمز له بـ $\bar{z} = a - ib$.

* العدد الحقيقي $\sqrt{z\bar{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي $z = a + ib$. نرسم له بـ $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

لتكن $(z; z') \in \mathbb{C}^2$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{Z}^*$

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) \quad ; \quad z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)i \quad *$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad z' \neq 0 \quad \overline{\alpha z} = \alpha \bar{z} \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}' \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad *$$

$$m \in \mathbb{N}^* \quad \left| \sum_{i=1}^{i=m} z_i \right| \leq \sum_{i=1}^{i=m} |z_i| \quad *$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z \quad *$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z \quad *$$

$$z' \neq 0 \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad |z^n| = |z|^n \quad |z \cdot z'| = |z| |z'| \quad *$$

$$\| \overline{AB} \| = AB = |z_B - z_A| \quad *$$

3- الشكل المثلثي لعدد عقدي والعمدة

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \bar{e}_1; \bar{e}_2)$

ليكن $z = a + ib \in \mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و النقطة M صورته , وليكن α قياسا

للزاوية $(\bar{e}_1, \overline{OM})$.

العدد α يسمى عمدة للعدد العقدي z و نكتب $[2\pi]$ $\arg z \equiv \alpha$.

*- ليكن $z = a + ib \in \mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و r عددا حقيقيا موجبا قطعاً و α

$$\text{عددا حقيقيا} \quad \text{نضع} \quad |z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{ومنه} \quad z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad \text{حيث} \quad \cos\alpha = \frac{a}{r} \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{b}{r} \quad \text{إذن} \quad [2\pi] \quad \arg z \equiv \alpha$$

الكتابة $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي z و نكتب $z = [r, \alpha]$

خاصات

$$z = [r, \alpha] \text{ و } z' = [r', \alpha'] \text{ فان } zz' = [rr', \alpha + \alpha'] \text{ و } \frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \alpha - \alpha' \right]$$

$$-z = [r, \alpha + \pi] \text{ و } \bar{z} = [r, -\alpha]$$

$$z^n = [r^n; n\alpha] \text{ و } \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}; -\alpha \right]$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^* \quad (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha \quad \text{صيغة موافر}$$

$$\text{إذا كان } A(z_A) \neq B(z_B) \text{ و } D(z_D) \neq C(z_C) \text{ فان } [2\pi] \quad \arg(z_B - z_A) = \overline{(\vec{e}_1; \overline{AB})}$$

$$\text{و } [2\pi] \quad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \overline{(\overline{AB}; \overline{AC})}$$

4- الكتابة الاسية

$$z = [r, \alpha] = re^{i\alpha} \quad \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

5- الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم

الجذور النونية $a = [r, \alpha]$ (جذور المعادلة $z^n = a$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$) هي

$$k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\} \quad z_k = \left[\sqrt[n]{r}; \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right]$$

الجذور النونية للوحدة أي الجذور النونية لـ 1 هي $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\} \quad z_k = \left[1; \frac{2k\pi}{n} \right]$

6- المعادلات من الدرجة الثانية

لتكن a و b و c أعدادا عقدية بحيث a غير منعدم .

$$\text{المعادلة } az^2 + bz + c = 0 \text{ تقبل حلين في } \mathbb{C} \text{ هما } z_1 = \frac{-b+d}{2a} \text{ ; } z_2 = \frac{-b-d}{2a} \text{ حيث } d \text{ جذر}$$

$$\text{مربع للمميز } b^2 - 4ac .$$

7- تطبيقات هندسية

خاصية

ليكن z_A و z_B عددين غير منعدمين صورتها على التوالي A و B .

$$\text{النقطة } M(z_A \times z_B) \text{ تحقق المثلث } OMB \text{ منشابه مباشرة مع المثلث } OAI \text{ حيث } \frac{OM}{OA} = \frac{BM}{IA} = OB$$

خاصية

كل دوران مركزه Ω ذات اللحق ω و قياس زاويته θ هو التطبيق في المستوى العقدي الذي يربط كل نقطة

$$z' = ze^{i\theta} + \omega(1 - e^{i\theta}) \quad \text{حيث} \quad M'(z')$$

خاصية

ليكن a و b عددين عقدين بحيث $|a|=1$; $a \neq 1$

التطبيق F في المستوى الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بنقطة $M'(z')$ حيث $z' = az + b$ هو الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ و زاويته $\arg(a)$