



## I. النهايات (تذكير)

نشاط 1 :

1 ذكر بتعريف :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ 2 ذكر بتعاريف التالية : أ -  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_g$  ب -  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$  ج -  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 

3 ذكر بالأشكال الغير المحددة .

4 ذكر ببعض خاصيات النهايات و الترتيب .

جواب :

1 نذكر بتعريف :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ 

## I. تعريف 1:

f دالة معرفة بجوار  $x_0$  . ( أي  $]x_0 - r, x_0 + r[ \setminus \{x_0\} \subset D_f$  مع  $r > 0$  .نقول إن  $f(x)$  يؤول إلى العدد الحقيقي  $\ell$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  لنعني أن :  $f(x) - \ell$  يؤول إلى 0 عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  .أو أيضا :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$  .نرمز لذلك ب :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  .

## 2 نذكر بالتعاريف التالية :

أ - تعريف ل :  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_g$  .

## 2. تعريف 2 :

f دالة عددية معرفة على يسار  $x_0$  . ( أي  $]x_0 - r, x_0[ \subset D_f$  مع  $r > 0$  .نقول إن  $f(x)$  يؤول إلى العدد الحقيقي  $\ell_g$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليسار لنعني أن.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, 0 < x_0 - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell_g| < \varepsilon$  .نرمز لذلك ب :  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_g$  أو أيضا  $\lim_{\substack{x \rightarrow x \\ x < x_0}} f(x) = \ell_g$  .ب - تعريف ل :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ 3. تعريف 3:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ f دالة معرفة بجوار  $-\infty$  . ( أي  $] -\infty, b] \subset D_f$  .نقول إن  $f(x)$  يؤول إلى العدد الحقيقي  $\ell$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  لنعني أن :  $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \alpha < -B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ نرمز لذلك ب :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ج - تعريف ل :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 4. تعريف 4:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ f دالة معرفة بجوار  $+\infty$  . ( أي  $]b, +\infty[ \subset D_f$  .نقول إن  $f(x)$  تؤول إلى  $+\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  لنعني أن :  $\forall A > 0, \exists B > 0, \alpha > B \Rightarrow f(x) > A$ نرمز لذلك ب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



(3) الأشكال الغير المحددة هي :

$$(1) (-\infty) + (+\infty) ; (+\infty) + (-\infty) (2) 0 \times (\pm\infty) (3) \frac{\pm\infty}{\pm\infty} (4) \frac{0}{0} (5) 0^0$$

(4) نذكر بعض خاصيات النهايات و الترتيب .

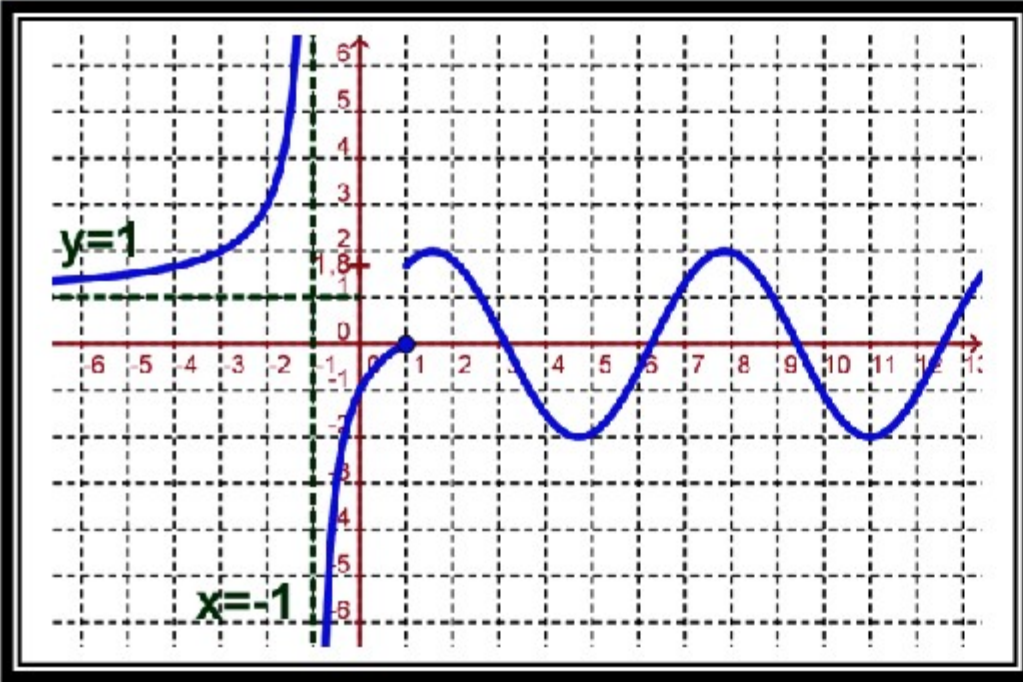
f و g و h دوال عددية حيث :

- إذا كان  $f(x) \leq g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow ?} g(x) = +\infty$
- إذا كان  $f(x) \leq g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow ?} g(x) = -\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = -\infty$
- إذا كان  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = \lim_{x \rightarrow ?} g(x) = \ell$  فإن  $\lim_{x \rightarrow ?} h(x) = \ell$

نشاط 2 :

1. تمرين 5 :

الرسم التالي يمثل منحنى دالة f .

أ- حدد مبيانيا  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة f .ب- استنتج مبيانيا نهايات f عند محددات  $D_f$  و كذلك في 1.

2. تمرين 1 :

أحسب النهايات التالية :  $\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^5 + 1)^3 (3x + 2)$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} x + |x + 2|$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{4-2x}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4x^2 - 8x}$ 

3. تمرين 2 :

حدد a علما أن f لها نهاية في 3 حيث f معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}} & ; x > 3 \\ f(x) = \frac{a}{x-1} & ; x \leq 3 \end{cases}$$

4. تمرين 3 :

أحسب :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \cos x}{1 + x^2}$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$ 

5. تمرين 4 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-|x-1|}$ أ- حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة f .ب- أحسب نهايات f عند محددات  $D_f$  .II. اتصال دالة عددية في نقطة  $x_0$  :

01. نشاط 1 :

المنحنيات التالية تمثل الدوال  $f_i$  مع  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  . نأخذ النقطة التي أفصولها  $x_0 = 1$  .



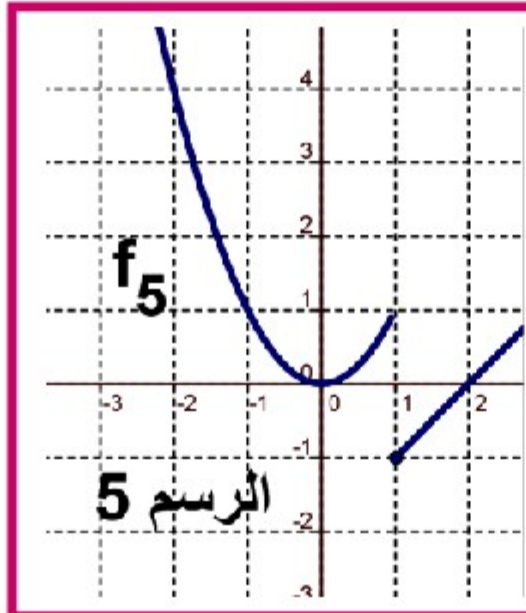
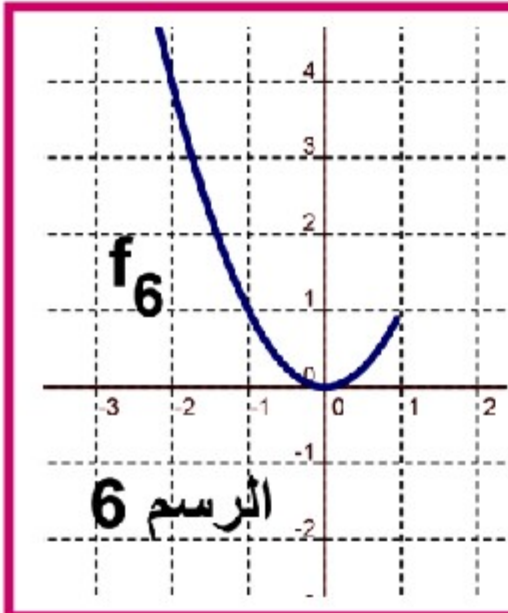
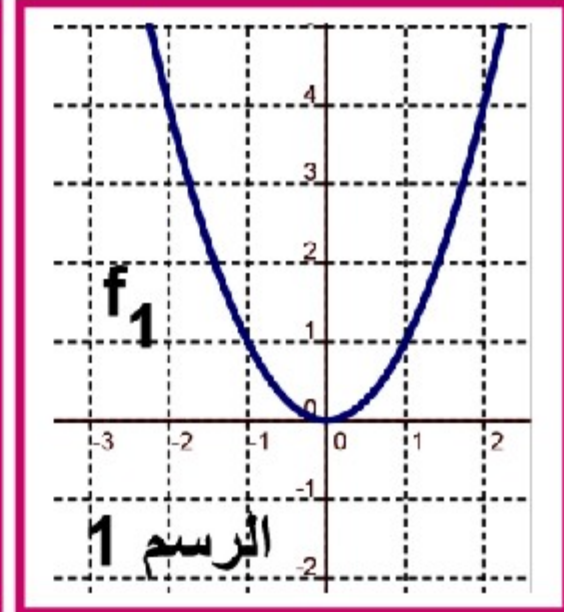
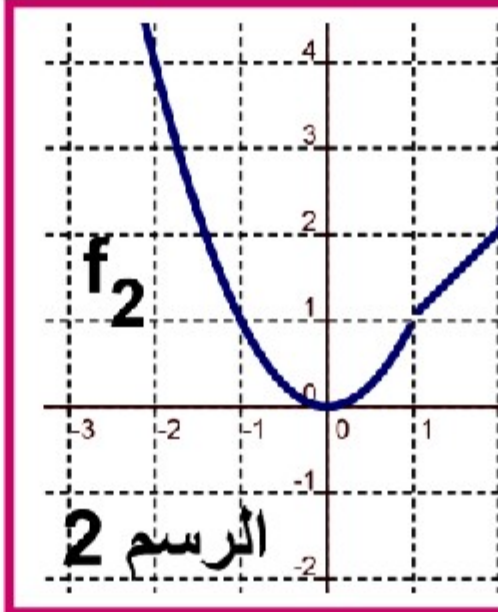
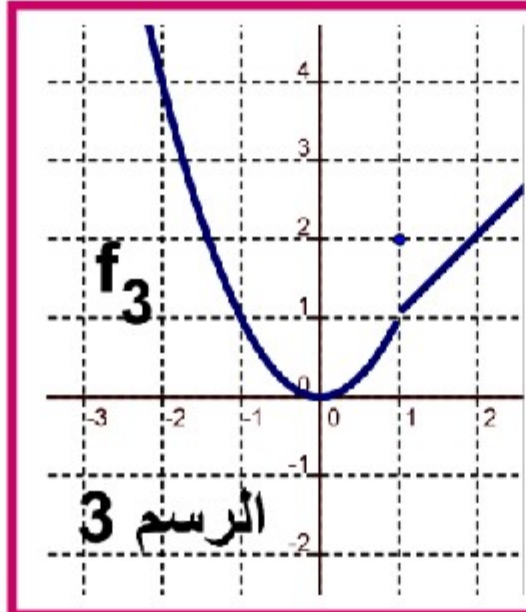
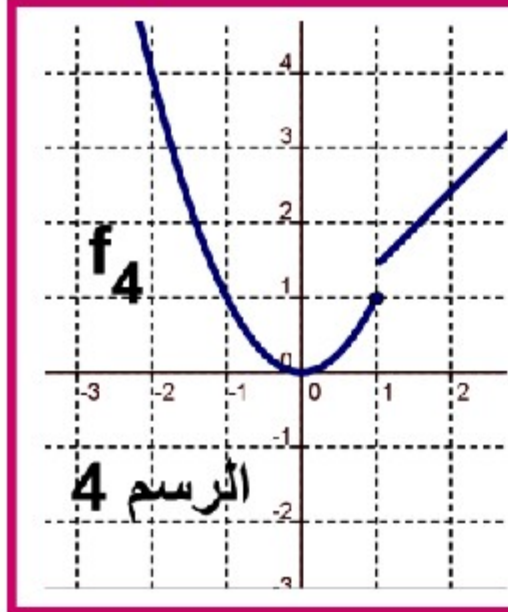


1) نأخذ النقطة التي أفصولها  $x_0 = 1$  ماذا تلاحظ ؟

2) استنتج مبيانيا  $\lim_{x \rightarrow 1} f_i(x)$  مع  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

3) الرسم 1 و 7 يمثلان دالتين متصلتين في النقطة  $x_0 = 1$  وفي الحالات الأخرى غير متصلة في النقطة  $x_0 = 1$ .

4) أعط تعريف لاتصال دالة في نقطة  $x_0$ .



## 02. تعريف 1 :

$f$  دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $I_{x_0} = ]x_0 - r, x_0 + r[$  ( $r > 0$ ) معرفة على **مجال مفتوح**  $I$  و  $x_0$  من  $I$ .  
 **$f$  متصلة في  $x_0$**  يكافئ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

## 03. تعريف 1 :

$f$  دالة عددية معرفة على **مجال مفتوح**  $I$  و  $x_0$  من  $I$ .  
 **$f$  متصلة في  $x_0$**  يكافئ :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

## III. الاتصال على اليمين والاتصال على اليسار في نقطة $x_0$

### 01. تعريف 1 - 2 :

- $f$  دالة عددية معرفة على  $I_d = [x_0, x_0 + r[$  حيث  $r > 0$ .  $f$  متصل على يمين في  $x_0$  يكافئ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$   $x > x_0$
- $f$  دالة عددية معرفة على  $I_g = ]x_0 - r, x_0]$  حيث  $r > 0$ .  $f$  متصل على يسار في  $x_0$  يكافئ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$   $x < x_0$

## 02. أمثلة :





نأخذ النشاط السابق أدرس مبيانيا اتصال بعض من  $f$  على يمين و يسار النقطة  $x_0 = 1$  مع  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

## 03. خاصية :

دالة  $f$  متصلة في  $x_0$  يكافئ  $f$  متصل على يسار و على يمين  $x_0$ .

IV. التمديد بالاتصال في النقطة  $x_0$  le prolongement par continuité

## 01. تذكير :

- $E$  و  $F$  و  $G$  ثلاث مجموعات  $f$  و  $g$  دالتان عدديتان حيث :  $f : E \rightarrow G$  و  $g : F \rightarrow G$ .
- إذا كان  $F \subset E$  و  $\forall x \in F : f(x) = g(x)$ .
- $f$  تسمى تمديد بالاتصال (prolongement) لـ  $g$ .
- $g$  تسمى قصور (restriction) لـ  $f$  على  $F$ . نكتب :  $g = f|_F$ .

## 02. تعريف و خاصية :

$f$  دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $I_{x_0}^* = ]x_0 - r, x_0 + r[ \setminus \{x_0\}$  مع  $r > 0$ . حيث :

- $f$  غير معرفة في  $x_0$ .
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ .
- الدالة  $g$  المعرفة بـ :  $\begin{cases} g(x) = f(x) ; x \in D_f, x \neq x_0 \\ g(x_0) = \ell \end{cases}$  هي متصلة في  $x_0$ .
- الدالة  $g$  تسمى تمديد بالاتصال للدالة  $f$  في النقطة  $x_0$ .

## 03. مثال :

$$f(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} \text{ لدينا : } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|(|x| - 1)}{|x| - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} |x| = 1$$

- و بالتالي الدالة  $g$  المعرفة بـ :  $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ g(1) = 1 \end{cases}$  هي تمديد بالاتصال للدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = 1$ .

- كذلك الدالة  $h$  المعرفة بـ :  $\begin{cases} h(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ h(-1) = 1 \end{cases}$  هي تمديد بالاتصال للدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = -1$ .



- كذلك الدالة  $k$  المعرفة ب:  $\begin{cases} k(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ k(-1) = k(1) = 1 \end{cases}$  هي تمديد بالاتصال للدالة  $f$  في النقطة  $x_0 = -1$  وفي  $x_0 = 1$ .

ملحوظة : يمكن كتابة الدالة  $k$  على الشكل التالي :  $k(x) = |x|$

## V. اتصال دالة على مجال

### 01. تعريف:

- دالة متصلة على مجال مفتوح  $I = ]a; b[$  يكافئ  $f$  متصلة في كل نقطة  $x_0$  من  $I$ .
- دالة متصلة على مجال  $I = [a, b]$  يكافئ  $f$  متصلة على  $]a, b[$  و متصلة على يمين  $a$  و متصلة على يسار  $b$ .
- دالة متصلة على مجال  $I = [a, +\infty[$  يكافئ  $f$  متصلة في كل نقطة  $x_0$  من  $]a, +\infty[$  و  $f$  متصلة على يمين في  $a$ .

### 02. مثال:

لنعتبر الدالة:  $f(x) = x^2 + 3x$ .

بين أن :  $f$  متصلة على المجال المفتوح  $I = ]1; 5[$ .

## VI. اتصال الدوال الاعتيادية:

### 01. خاصية:

- كل دالة حدودية فهي متصلة على مجموعة تعريفها  $D_f = \mathbb{R}$ .
- كل دالة جذرية فهي متصلة على مجموعة تعريفها  $D_f$ .
- $f(x) = \sin x$  و  $f(x) = \cos x$  متصلتين على  $D_f = \mathbb{R}$ .
- الدالة:  $f(x) = \tan x$  متصلة على  $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
- الدالة:  $f(x) = \sqrt{x}$  متصلة على مجموعة تعريفها  $D_f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ .

## VII. دالة الجزء الصحيح :

### 01. تعريف: ( تذكير )

الدالة  $f$  التي تربط كل عنصر  $x$  من  $\mathbb{R}$  بالعدد الصحيح النسبي الوحيد  $p$  الذي يحقق  $p \leq x < p+1$ . تسمى الدالة الجزء الصحيح ويرمز لها ب  $E$  أو أيضا  $[ ]$  نكتب  $f(x) = [x] = p$  أو  $f(x) = E(x) = p$ . تسمى الدالة الجزء الصحيح

### 02. نشاط:

(1) أنشئ منحنى الدالة  $f(x) = E(x)$ .

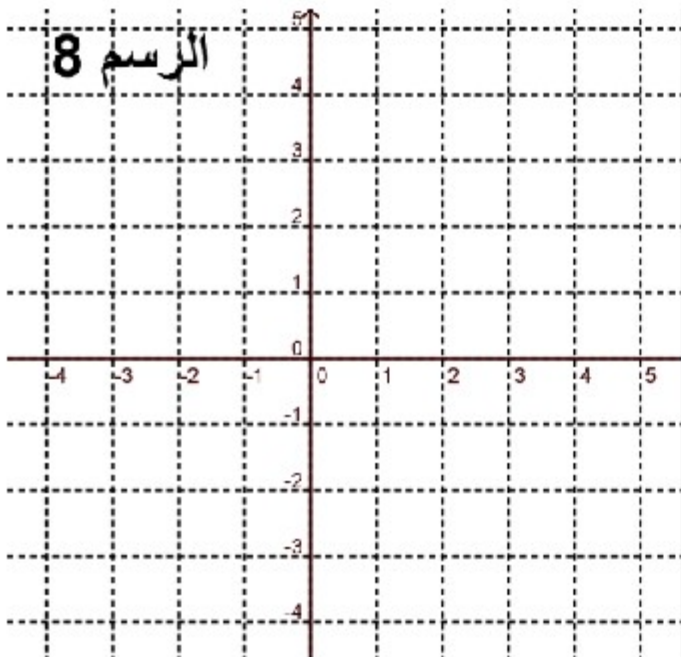
(2) هل  $f$  متصلة على يمين في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2 .

(3) هل  $f$  متصلة على يسار في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2 .

(4) هل  $f$  متصلة في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2 .....

(5) هل  $f$  متصلة على  $[0; 1[$  و  $[1; 2[$  و  $[2; 3[$  ....

(6) أعط الخاصية.







## 03. خاصية:

- دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين في  $p$  وغير متصلة على اليسار في  $p$  (إذن هي غير متصلة في  $p$ ).
- دالة الجزء الصحيح متصلة على كل المجالات التي هي على شكل:  $[p, p+1[$  (مع  $p \in \mathbb{Z}$ )

## VIII. صورة مجال بدالة متصلة:

## 01. نشاط:

نأخذ النشاط أول الدرس و الرسم رقم 1 الذي يمثل الدالة:  $f(x) = x^2$

- استنتج مبيانيا صور جميع الأعداد التي تنتمي إلى القطعة  $[0, 2]$
- استنتج مبيانيا:  $f([-1, 0])$  و  $f([-1, 2])$ . أعط الخاصية.

## 02. خاصية:

- صورة قطعة  $[a, b]$  بدالة متصلة  $f$  هي قطعة (تكون على شكل  $[m, M]$  مع  $m$  و  $M$  هي القيمة الدنيا والقيمة القصوى على التوالي ل  $f$  على المجال  $[a, b]$ ). (أو أيضا:  $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$  و  $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$ )
- صورة مجال  $I$  بدالة متصلة  $f$  هي مجال  $J = f(I)$ .
- ملاحظة:  $f([a, b]) = [m, M]$ .

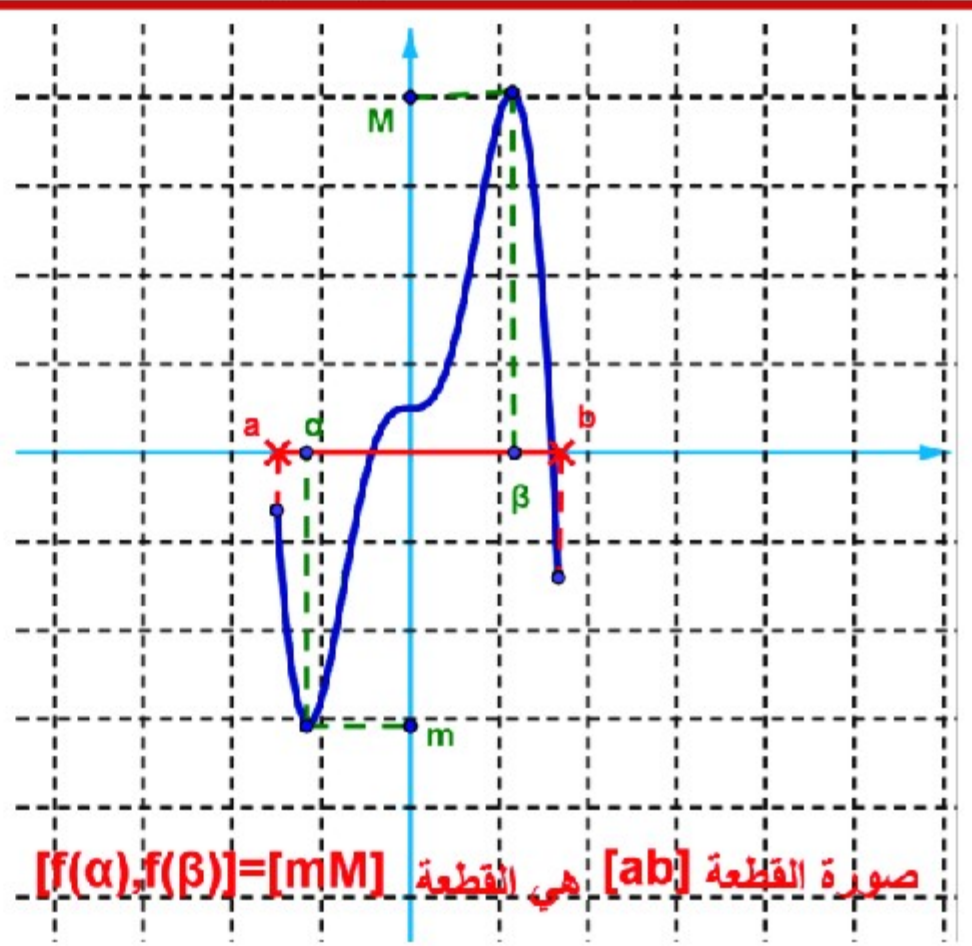
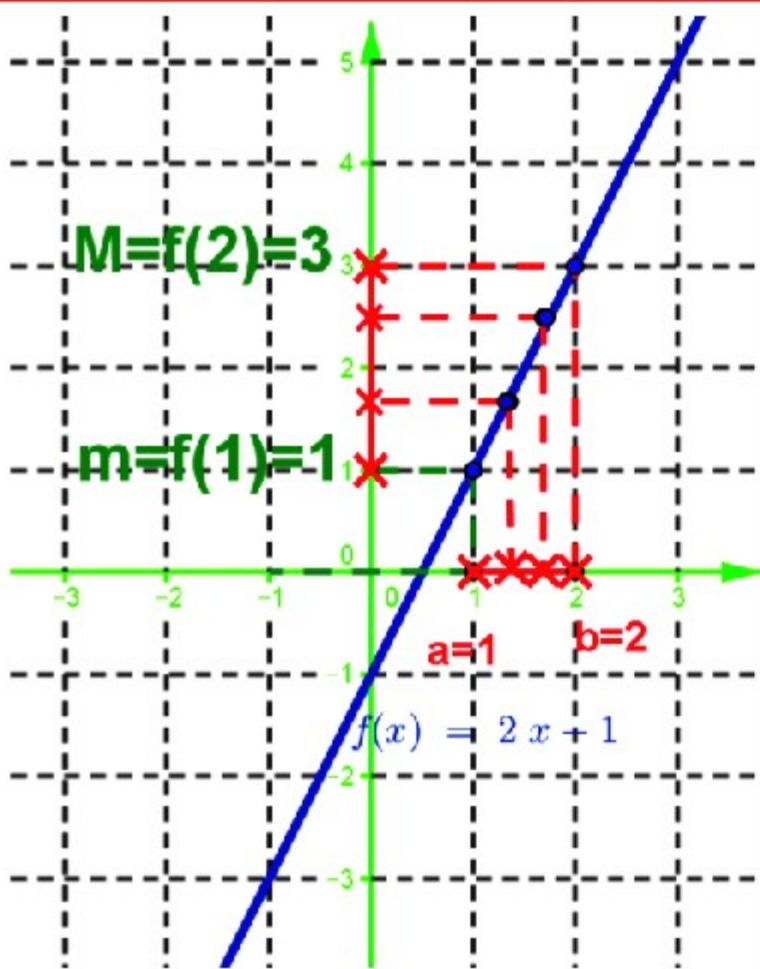
مثال 1:  $f(x) = 2x - 1$  لدينا مبيانيا:  $f([1, 2]) = [1, 3]$

$$f([1, 2]) = [1, 3]$$

## 03. مثال 1:

نضع:  $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$  و  $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$

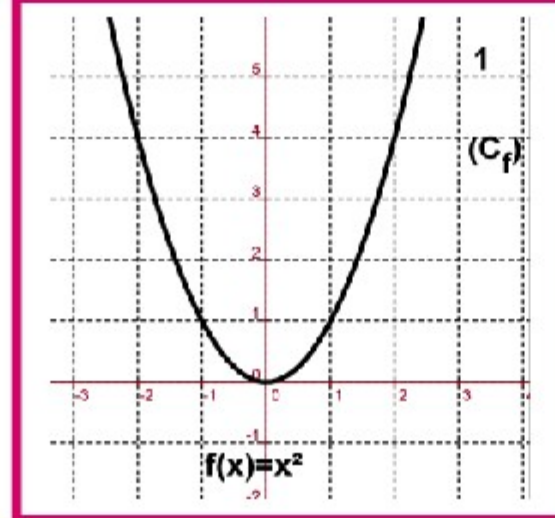
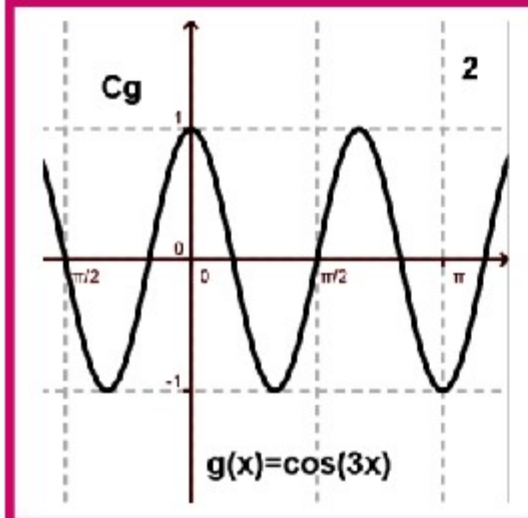
$$\exists (\alpha, \beta) \in I^2 / m = f(\alpha) \text{ و } M = f(\beta)$$



## IX. مبرهنة القيم الوسيطة: théorème des valeurs intermédiaires

## 01. نشاط:





نأخذ  $a = 1$  و  $b = -2$  في الرسم 1؛  $a = 0$  و  $b = \pi$  (الرسم 2)

(1) استنتج مبيانيا  $f(a)$  و  $f(b)$ . (الرسم 1)

(2) نأخذ عدد  $k$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  هل يوجد على الأقل

عنصر  $c$  من  $[a, b] = [-2, 1]$  حيث  $f(c) = k$ : (الرسم 1)

(3) أعط الخاصية:

## 02. خاصية:

$f$  دالة متصلة على القطعة  $[a, b]$ .

▪ لكل عدد حقيقي  $k$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  يوجد على الأقل عنصر  $c$  من  $[a, b]$  حيث  $f(c) = k$ .

## 03. برهان:

نضع  $f([a, b]) = [m, M]$  لأن  $f$  متصلة على  $[a, b]$ .

حالة 1:  $f(a) \leq f(b)$

▪  $k \in [m, M] = f([a, b])$  إذن  $k \in [f(a), f(b)] \subset [m, M]$

ومنه:  $\exists c \in [a, b] / k = f(c)$

إذن: كل عدد  $k$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  يوجد على الأقل عنصر  $c$  من  $[a, b]$  حيث  $f(c) = k$ .

## 04. نتائج:

▪ بما أن: صورة قطعة  $[a, b]$  بدالة متصلة هي القطعة:  $f([a, b]) = [m, M]$  إذن  $k \in f([a, b]) = [m, M]$ .

▪ إذا كان:  $f(a) \times f(b) < 0$  أي  $f(a)$  و  $f(b)$  (احدهما موجب و الآخر سالب) ومنه:  $k = 0 \in f([a, b]) = [m, M]$  ومنه يوجد

عنصر  $c$  من  $[a, b]$  حيث  $f(c) = k = 0$

▪ نتيجة ( $f(a) \times f(b) < 0$ ): المعادلة:  $x \in [a, b] / f(x) = 0$  تقبل على الأقل حل على  $[a, b]$ .

▪ إذا كانت  $f$  رتيبة قطعا على  $[a, b]$  فإن  $c$  وحيد. ومنه المعادلة:  $x \in [a, b] / f(x) = 0$  تقبل حل وحيد على  $[a, b]$ .

## X. دالة متصلة و رتيبة قطعا:

### 01. نشاط: $f$ دالة متصلة و رتيبة قطعا. لدينا صور المجالات الآتية

| المجال I | $f$ متصلة و تزايدية قطعا<br>نحدد: المجال $f(I)$ | $f$ متصلة و تناقصية قطعا<br>نحدد: المجال $f(I)$ | المجال I        | $f$ متصلة و تزايدية قطعا<br>نحدد: المجال $f(I)$                       | $f$ متصلة و تناقصية قطعا<br>نحدد: المجال $f(I)$                       |
|----------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $[a, b]$ | $[f(a), f(b)]$                                  | $[f(b), f(a)]$                                  | $]a, +\infty[$  | $] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$ | $] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$ |
| $]a, b[$ | $]f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$         | $] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)[$        | $] -\infty, a]$ | $] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a)[$                          | $] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a)[$                          |





|                                                                                       |                                                                                       |                       |                                                                               |                                                                               |                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| $\left] \lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$     | $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right[$     | $] -\infty, a[$       | $\left[ f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$                          | $\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b) \right]$                          | $] a, b]$       |
| $\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$ | $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$ | $] -\infty, +\infty[$ | $\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$ | $\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$ | $] a, b[$       |
|                                                                                       |                                                                                       |                       | $\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a) \right]$                      | $\left[ f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$                      | $] a, +\infty[$ |

## 02. نتيجة :

إذا كانت  $f$  دالة متصلة و رتيبة قطعاً على المجال  $[a, b]$

- فإنه لكل عدد محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$  يوجد عدد وحيد  $c$  من  $[a, b]$  حيث:  $f(c) = k$ .
- إذا كان  $f(a) \times f(b) < 0$  المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حل وحيد.

## XI. العمليات على الدوال المتصلة:

## 01. خاصية: (تقبل)

$I$  مجال ضمن المجموعة  $\mathbb{R}$  ( $I \subset \mathbb{R}$ ).

- إذا كانت  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على المجال  $I$  فإن الدوال:  $f+g$  و  $f \times g$  و  $\alpha f$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) متصلة على  $I$ .
- إذا كانت  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على المجال  $I$  و  $g$  لا تنعدم على المجال  $I$  فإن الدوال:  $\frac{f}{g}$  و  $\frac{1}{g}$  متصلة على  $I$ .

## 02. مثال:

لنعتبر الدوال التالية المعرفة ب: (1)  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} + \cos(x)$  (2)  $g(x) = (x^2 + 3x - 2) \times \sqrt{x}$

(1) حدد مجموعة تعريف واتصال كل دالة من الدوال السابقة.

جواب

(1) نحدد مجموعة تعريف:

الدالة  $x \rightarrow \cos x$  معرفة ومتصلة على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $x \rightarrow \frac{2x+1}{x-1}$  معرفة ومتصلة على  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

إذن الدالة  $x \rightarrow \frac{2x+1}{x-1} + \cos x$  معرفة ومتصلة على  $D_f = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

الدالة  $x \rightarrow x^2 + 3x - 2$  معرفة ومتصلة على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $x \rightarrow \sqrt{x}$  معرفة ومتصلة على  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ . إذن الدالة  $x \rightarrow (x^2 + 3x - 2) \sqrt{x}$  معرفة ومتصلة على

$D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$

## XII. اتصال مركبة دالتين متصلتين:

تذكير:  $I \xrightarrow{f} f(I) \subset J$  و  $J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$g \circ f: I \xrightarrow{f} f(I) \subset J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$





## 01. خاصية:

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين عديتين.  
إذا كانت  $f$  متصلة على مجال  $I$  و  $g$  متصلة على مجال  $J$  حيث:  $f(I) \subset J$  فإن الدالة  $g \circ f$  متصلة على  $I$ .

02. مثال: أدرس اتصال الدالة  $f(x) = \sin(2x+1)$ .

الدالة  $x \rightarrow 2x+1$  متصلة على  $\mathbb{R}$ .  
الدالة  $x \rightarrow \sin x$  متصلة على  $\mathbb{R}$  و  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ . إذن الدالة:  $x \rightarrow \sin(2x+1)$  متصلة على  $\mathbb{R}$ . (لأنها مركبة دالتين متصلتين)

## 03. نتائج:

- الدالة  $f(x) = \sin(ax+b)$  و  $g(x) = \cos(ax+b)$  دالتان متصلتان على  $\mathbb{R}$ .
- الدالة  $h(x) = \tan(ax+b)$  متصلة في كل  $x$  تحقق ما يلي  $ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .
- $f$  دالة موجبة و متصلة على المجال  $I$  فإن الدالة  $x \mapsto \sqrt{f(x)}$  متصلة على  $I$ .

## XIII. الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة على قطاعا على مجال:

01. نشاط:  $f(x) = x^2$  على  $I = [0; +\infty[$ 

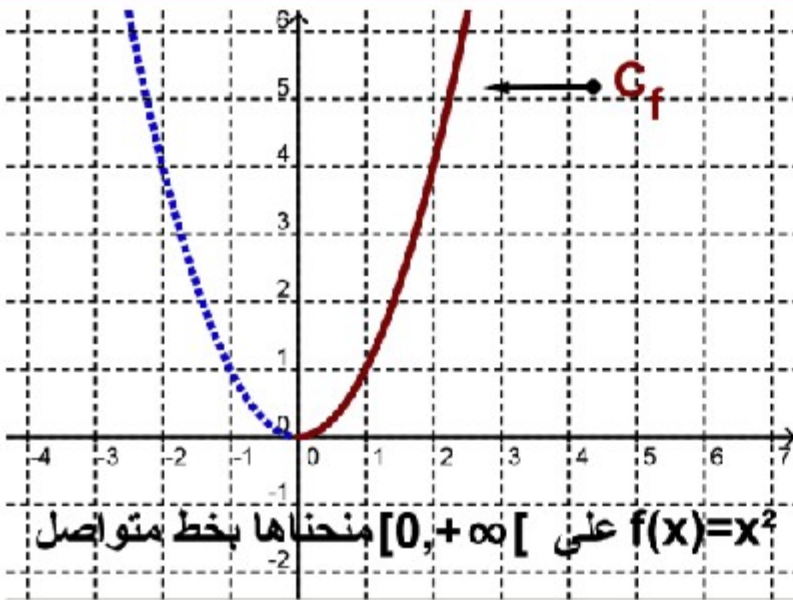
- مبيانيا هل الدالة  $f$  متصلة و رتيبة قطاعا على المجال  $I = [0; +\infty[$  ؟
- استنتج مبيانيا  $J = f(I)$  (أي صورة المجال  $I$  ب  $f$ ).
- هل لكل  $y$  من  $J = f(I)$  له سابق وحيد  $c$  من  $I$  ؟
- استنتج طبيعة التطبيق  $f$ .
- لنعتبر المعادلة:  $x \in I = [0; +\infty[ / f(x) = y$  :  
استنتج عدد حلول المعادلة  $(E)$ .

## 02. خاصية:

- $f$  دالة عديدية متصلة و رتيبة قطاعا على مجال  $I$  و  $y \in f(I)$ .
- الدالة  $f$  هي تقابل من  $I$  إلى  $f(I)$ .
  - المعادلة:  $x \in I / f(x) = y$  تقبل حل وحيد على  $I$ .

## 03. برهان:

- بما أن صورة مجال  $I$  بدالة متصلة  $f$  هو المجال  $f(I)$  إذن الدالة  $f$  شمولية من  $I$  نحو  $f(I)$ .
- نبين أن  $f$  تباينية من  $I$  نحو  $f(I)$ .
- ❖ نفترض أن  $f$  تزايدية قطاعا على  $I$ .
- أي نبين:  $\forall x, x' \in I : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$  أو أيضا:  $\forall x, x' \in I : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
- ليكن  $x$  و  $x'$  من  $I$  حيث  $x \neq x'$  (أي  $x < x'$  أو  $x > x'$ ).  
حالة 1:  $x < x'$   
إذن  $f(x) < f(x')$  (لأن  $f$  تزايدية قطاعا على  $I$ )  
إذن  $f(x) \neq f(x')$
- حالة 2:  $x > x'$   
إذن  $f(x) > f(x')$  (لأن  $f$  تزايدية قطاعا على  $I$ )  
إذن  $f(x) \neq f(x')$







**خلاصة:**  $\forall x, x' \in I : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$  أي  $f$  تباينية من  $I$  نحو  $f(I)$  حالة  $f$  تزايدية قطعاً على  $I$ .

❖ نفترض أن  $f$  تناقصية قطعاً على  $I$ . بنفس الطريقة نبين أن  $f$  تباينية من  $I$  نحو  $f(I)$ .

**خلاصة:** الدالة  $f$  هي تقابل من  $I$  إلى  $f(I)$ .

#### 04. تعريف:

$f$  تقابل من  $I$  إلى  $J$ . الدالة  $g$  المعرفة بما يلي:

$$g : J \rightarrow I$$

$$y \rightarrow g(y) = x$$

مع  $f(x) = y$  تسمى الدالة العكسية للدالة  $f$  ونرمز لها:  $g = f^{-1}$

#### 05. ملاحظة:

$$f : I \rightarrow J = f(I)$$

▪ الدالة  $f$  معرفة كما يلي:

$$x \rightarrow f(x) = y$$

$$f^{-1} : J = f(I) \rightarrow I$$

▪ الدالة  $f^{-1}$  معرفة كما يلي:

$$y \rightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = y \\ x \in I \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{array} \right.$$

$$\forall y \in J : f \circ f^{-1}(y) = y. \forall x \in I : f^{-1} \circ f(x) = x$$

▪ ويمكن كتابة  $\forall y \in J : f \circ f^{-1}(y) = y$  كذلك على الشكل التالي:  $\forall x \in J : f \circ f^{-1}(x) = x$

#### 06. خاصيات الدالة العكسية: (تقبل)

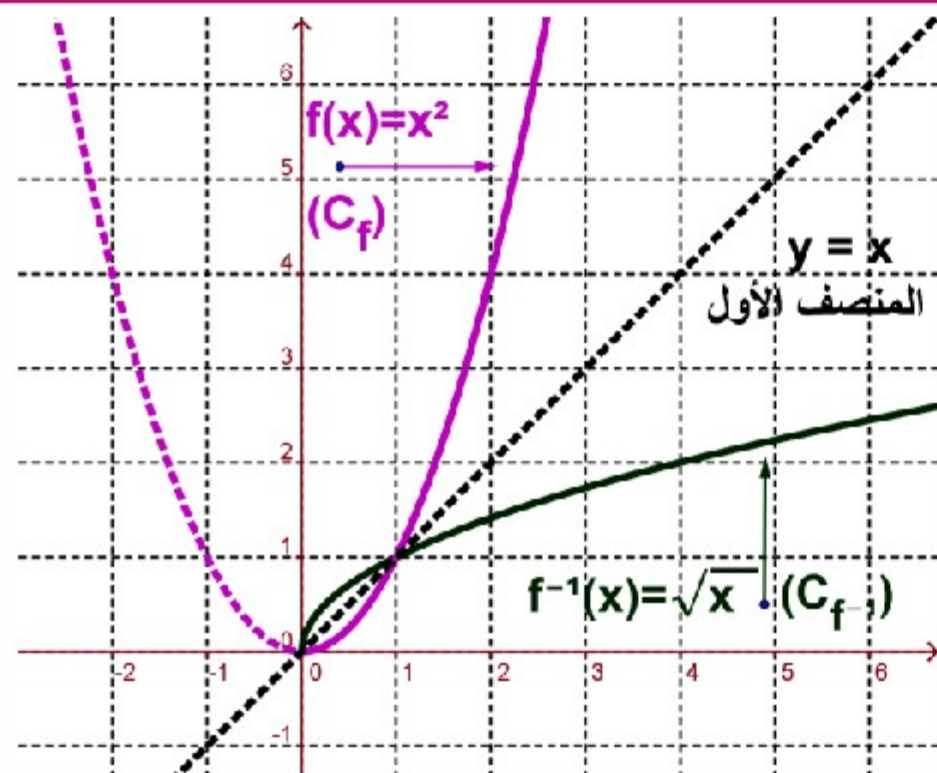
$f$  دالة عددية متصلة ورتيبة قطعاً على مجال  $I$  و  $J = f(I)$ .  $f^{-1}$  الدالة العكسية لـ  $f$ .

1. الدالة  $f^{-1}$  متصلة على المجال  $J = f(I)$ . (تقبل)

2. الدالة  $f^{-1}$  رتيبة قطعاً على المجال  $J$  ولها نفس رتبة  $f$  على  $I$

3.  $(C_{f^{-1}})$  منحنى الدالة  $f^{-1}$  و  $(C_f)$  منحنى الدالة  $f$  متماثلان بالنسبة للمستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = x$  في معلم متعامد

ممنظم (المستقيم  $(D)$  يسمى المنصف الأول)



#### 07. مثال: لنعتبر الدالة $f$ المعرفة بـ: $f(x) = x^2$

1 أ - مبيانيا هل  $f$  متصلة على  $I = [0; +\infty[$ .

ب - استنتج رتبة  $f$  على  $I$ .

ج - حدد:  $J = f(I)$ .

د - هل  $f$  تقبل دالة عكسية معرفة على مجال يجب تحديده.

2 حدد:  $f^{-1}$ .  $(C_f)$  منحنى الدالة  $f$ .  $(C_{f^{-1}})$  منحنى الدالة  $f^{-1}$ .





## 08. مفردات :

الدالة العكسية  $f^{-1}$  المحصل عليها تسمى كذلك الجذر من الرتبة 2. ونرمز لها ب:  $f^{-1} = \sqrt{\quad}$  أو باختصار :  $f^{-1} = \sqrt{\quad}$

## XIV. الدالة قوس الظل : la fonction arctangente

## 01. خاصية :

الدالة  $f(x) = \tan x$  تقابل من  $I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  إلى  $J = \mathbb{R}$ .

دالتها  $f^{-1}$  العكسية تسمى الدالة قوس الظل ونرمز لها ب :  $f^{-1} = \arctan$ .

لدينا :  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \arctan x$$

## 02. برهان :

لدينا الدالة  $f(x) = \tan x$  متصلة على  $I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  و تزايدية قطعاً على  $I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  لأن  $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$  إذن  $f$

تقابل من  $I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  إلى  $f(I) = \mathbb{R}$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ .

## 03. نتائج :

لدينا :  $f : \mathbb{R} \rightarrow I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$x \mapsto f(x) = \arctan x$$

مجموعة تعريف الدالة  $f(x) = \arctan x$  هي  $D_f = \mathbb{R}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R} ; -\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$$

الدالة  $f(x) = \arctan x$  متصلة و تزايدية على  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tan x = y \\ x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \arctan y = x \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \tan(\arctan x) = x$$

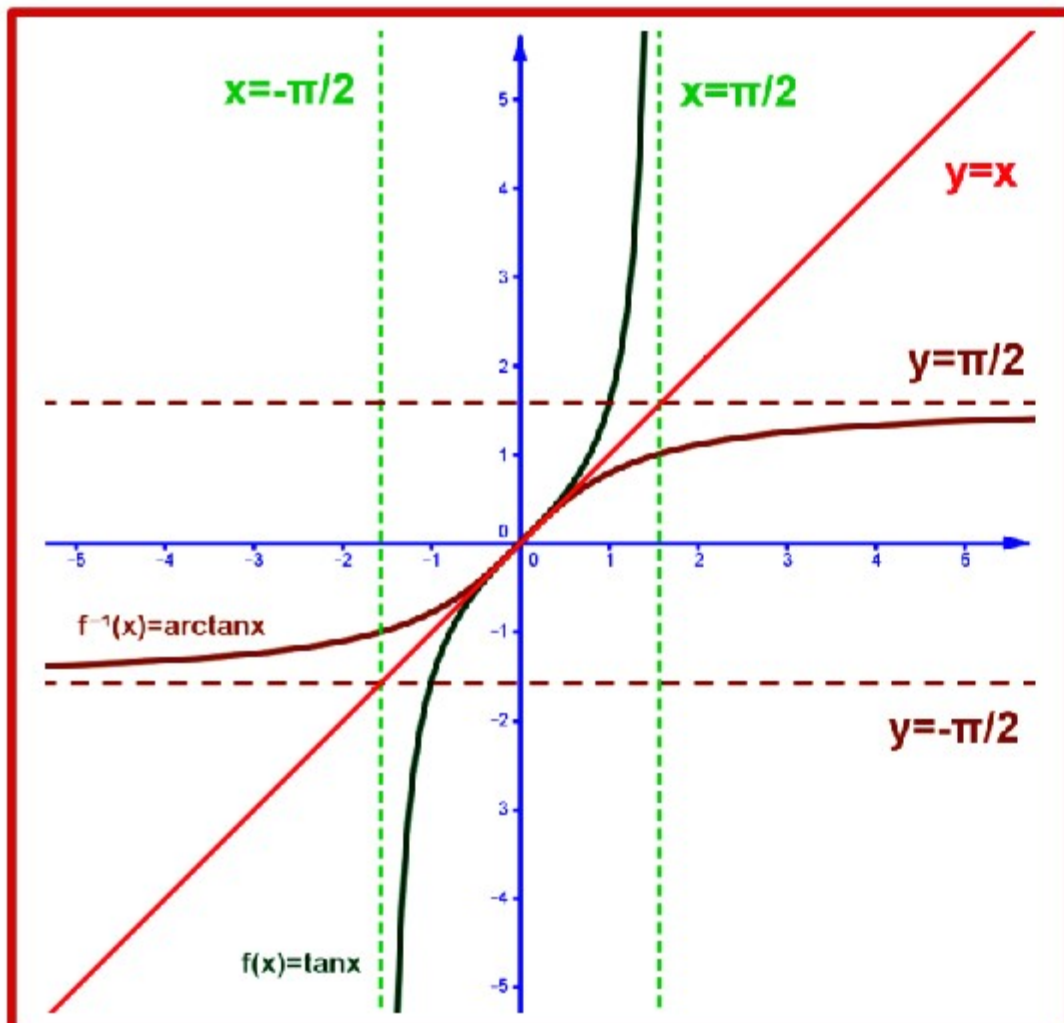
$$\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ ; \arctan(\tan x) = x$$

منحنى  $(C_{f^{-1}})$  للدالة  $f^{-1}(x) = \arctan x$  هو مماثل  $(C_f)$

منحنى الدالة  $f(x) = \tan x$  بالنسبة للمنصف الأول في

معلم متعامد ممنظم .

( المنصف الأول هو المستقيم (D) الذي معادلته  $y = x$  ) (D).







## 04. تمرين تطبيقي :

•  $f(x) = \arctan \frac{1}{x-1}$  حدد  $D_f$  مجموعة تعريف  $f$ .

• أحسب :  $f(0)$  و  $f(2)$  و  $f(1+\sqrt{3})$  و  $f\left(1+\frac{1}{\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)}\right)$ .

• أحسب :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

XV. دالة الجذر من الرتبة  $n$ 

## 01. نشاط:

$n \in \mathbb{N}^*$ . لنعتبر الدالة  $f(x) = x^n$  على المجال  $I = [0; +\infty[$ .  
بين أن الدالة  $f$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}$  على المجال  $J$  حدده.

## 02. مفردات:

- الدالة العكسية  $f^{-1}$  تسمى الدالة الجذر من الرتبة  $n$ .
- الدالة العكسية  $f^{-1}$  يرمز لها ب:  $f^{-1} = \sqrt[n]{\phantom{x}}$ .
- نكتب:  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$  أو أيضا  $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ .
- حالة:  $n = 1$  لدينا  $f^{-1}(x) = \sqrt[1]{x} = x$  (حالة غير مهمة).
- حالة:  $n = 2$  لدينا  $f^{-1}(x) = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$  (الدالة تسمى باختصار الجذر المربع).
- حالة:  $n = 3$  لدينا  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$  (الدالة تسمى باختصار الجذر المكعب أو الجذر الثالث).

## 03. تعريف وخاصية:

- $n$  عدد صحيح طبيعي غير منعدم.
- الدالة  $f(x) = x^n$  متصلة و تزايدية قطعا على  $I = [0; +\infty[$ .
- $f$  تقابل من  $I$  إلى  $J = f(I) = [0; +\infty[$  و دالتها العكسية  $f^{-1}$  تسمى الدالة الجذر من الرتبة  $n$  و نرمز لها:  $f^{-1} = \sqrt[n]{\phantom{x}}$ .
- نكتب:  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$  أو أيضا:  $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ .
- العدد:  $\sqrt[n]{a}$  يسمى الجذر من الرتبة  $n$  للعدد الحقيقي الموجب  $a$ .

## 04. خاصية:

- $\sqrt[n]{0} = 0$  ;  $\sqrt[n]{1} = 1$  .  $\sqrt[n]{x^n} = x$  و  $(\sqrt[n]{x})^n = x$  ;  $\forall x \geq 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ .
- منحنى  $(C_{f^{-1}})$  لدالة  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$  هو مماثل  $(C_f)$  منحنى الدالة  $f(x) = x^n$  بالنسبة للمنصف الأول في معلم متعامد ممنظم (المنصف الأول هو المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y = x$  :  $(D)$ ).





## 05. نتائج:

- $\forall a \in \mathbb{R}^+ ; \forall b \in \mathbb{R}^+ ; \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^+ ; \forall b \in \mathbb{R}^+ ; \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$

## XVI. العمليات على الجذور من الرتبة n.

## 01. خاصيات:

- $a \geq 0$  و  $b \geq 0$  و  $n$  و  $m$  من  $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
- $(b > 0) ; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  و  $(b > 0) ; \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$  و  $\sqrt[n \times m]{a^m} = \sqrt[n]{a}$

## 02. مثال:

بسط:  $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[15]{3^{11}}$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[15]{3^{11}} = \sqrt[3 \times 5]{81} \times \sqrt[15]{3^{11}}$$

لدينا:

$$= \sqrt[15]{3^4 \times 3^{11}} = \sqrt[15]{3^{15}} = 3$$

خلاصة:  $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[15]{3^{11}} = 3$

XVII. بعض خاصيات الدوال التي هي على شكل:  $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ .

## 01. خاصيات (تقبل)

- $f$  دالة عددية موجبة على مجال  $I$ .  $n$  من  $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
- إذا كانت  $f(x)$  متصلة على  $I$  فإن  $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$  متصلة على  $I$ .
- إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  و  $l \geq 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$
- إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$
- تبقى الخاصيات صحيحة إذا كان:  $x \rightarrow x_0^-$  ;  $x \rightarrow x_0^+$  ;  $x \rightarrow \infty$

## 02. تمرين تطبيقي:

لنعتبر الدالة  $f$  المعرفة ب:  $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$

(1) حدد  $D_f$  مجموعة تعريف  $f$ .

(2) أحسب:  $f(-1)$  ;  $f(15)$  ;  $f(0)$



(3) أحسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 

XVIII. القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً:

01. نشاط:

(1) بين أن:  $(3^2)^{\frac{1}{5}} = \left((3)^{\frac{1}{5}}\right)^2$ .

جواب:

لدينا:  $(3^2)^{\frac{1}{5}} = 9^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{9}$  و  $\left((3)^{\frac{1}{5}}\right)^2 = (\sqrt[5]{3})^2 = \sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{9}$  إذن  $(3^2)^{\frac{1}{5}} = \left((3)^{\frac{1}{5}}\right)^2$ 

02. كتابة جديدة:

من خلال:  $(3^2)^{\frac{1}{5}} = \left((3)^{\frac{1}{5}}\right)^2 = 3^{\frac{2}{5}}$  سنكتب:  $(3^2)^{\frac{1}{5}} = \left((3)^{\frac{1}{5}}\right)^2$ 

03. خاصية:

ليكن  $a \in \mathbb{R}^{+*}$  و  $r \in \mathbb{Q}^*$ .إذا كان:  $r = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$  مع  $n$  و  $n'$  من  $\mathbb{N}^*$  و  $m$  و  $m'$  من  $\mathbb{Z}$  فإن  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$ .

05. برهان:

لدينا:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n'} &= \sqrt[n]{a^{m \times n'}} \\ &= \sqrt[n]{a^{m' \times n}} ; \left(\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}\right) \\ &= a^{m'} \end{aligned}$$

ومنه:  $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n'} = a^{m'}$  إذن:  $\sqrt[n']{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n'}} = \sqrt[n']{a^{m'}}$  ومنه:  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$ خلاصة:  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$ 

04. تعريف:

 $x \in \mathbb{R}^{+*}$  و  $(m \in \mathbb{Z} \text{ و } n \in \mathbb{N}^*)$   $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*$ الكتابة  $\sqrt[n]{x^m}$  نرمز لها ب:  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$  أو أيضاً ب:  $\sqrt[n]{x^m} = x^r$  أما  $x^r$  يسمى القوة الجذرية للعدد  $x$  ذات الأس  $r$ .

$$x^r = x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m} \quad \square$$

05. أمثلة:

(1) مثال 1: أكتب على شكل  $x^r$  ما يلي:  $(\sqrt[5]{3})^{-32}$  و  $\sqrt[13]{2^{-15}}$  و  $(\sqrt[9]{21})^{-11}$  و  $\sqrt[8]{3^5}$  و  $(\sqrt[9]{7})^{11}$ .(2) مثال 2: أكتب بطريقة أخرى الأعداد التالية:  $\sqrt[3]{8}$ ;  $\sqrt[5]{11}$ ;  $\sqrt{7^3}$ ;  $\sqrt[4]{3^{-5}}$ ;  $\sqrt[4]{3^5}$ .



## 06. ملاحظة:

- تعريف الأس في  $\mathbb{Q}$  هو تمديد لتعريف الأس في  $\mathbb{Z}$ .
- لدينا :  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^1} = \sqrt[n]{a}$  ,  $\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$  . بمأن :  $\sqrt[n]{0} = 0$  يمكن أن نستخدم أن :  $0^{\frac{1}{n}} = 0$ .
- الدالة  $f(x) = (x-2)^{\frac{1}{3}}$  هي معرفة على  $D_f = ]2, +\infty[$  يمكن تمديد الدالة  $f$  في  $x_0 = 2$  بالدالة  $g$  في حيث
 
$$\begin{cases} g(x) = f(x) = (x-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x-2} & ; x > 2 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

## 07. خاصيات القوى الجذرية :

$x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}^{+*}$  و  $r$  و  $r'$  من  $\mathbb{Q}^*$  . لدينا :

- $x^r > 0$
- $x^r = x^{r'} \Leftrightarrow r = r'$
- $x^r \times y^r = (x \times y)^r$  و  $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$  و  $(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$  و  $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$  و  $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

## 08. مثال: بسط ما يلي.

$$A = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5 \times \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(8^{\frac{2}{3}}\right) \quad (1)$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} \quad (2)$$

$$A = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5 \times \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(8^{\frac{2}{3}}\right) = (2)^{\frac{-5}{3}} \times (2^2)^{\frac{-1}{2}} \times (2^3)^{\frac{2}{3}} = (2)^{\frac{-5}{3}} \times (2^{-1}) \times (2^2) = (2)^{\frac{-5}{3}-1+2} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = \frac{7^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = \frac{7^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = 7^{1+\frac{1}{4}} = 7^{\frac{5}{4}}$$