اتصال دالة عددية

القدرات المنتظرة

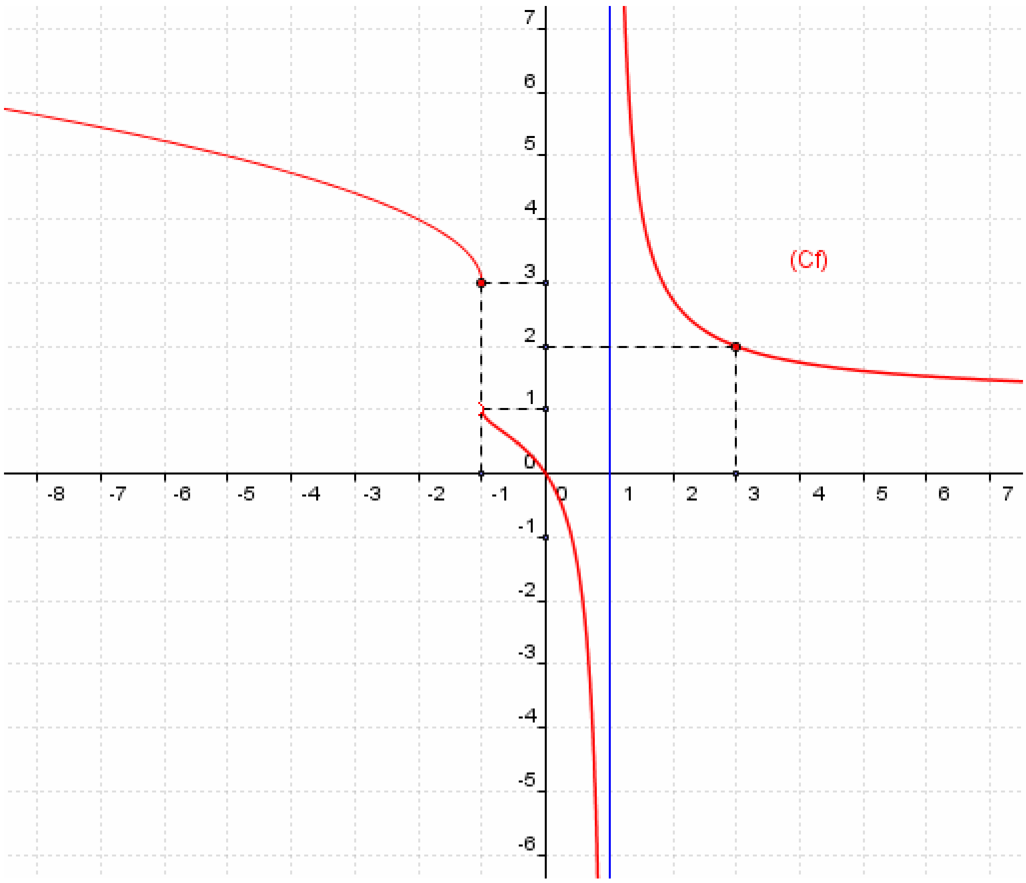
- تحديد صورة قطعة أو مجال : * بدالة متصلة؛ * بدالة متصلة و رتيبة؛
- تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية في دراسة بعض المعادلات و المتراجحات أو دراسة إشارة بعض التعابير........
- استعمال التفرع الثنائي في تحديد قيم مقربة لحلول $f(x)=\lambda$ أو لتأطيرهذه الحلول؛
- تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية في حالة دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال ،لاثبات وحدانية حل المعادلة $f(x)=\lambda$

I- الاتصال في نقطة – الاتصال على مجال

1- الاتصال في نقطة

a/ نشاط

ليكن (C_f) منحنى دالة عدية f كما في الشكل التالي:



1- من خلا الشكل كيف ترى المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الافصول 1- ثم عند النقطة ذات 3

2- أ/ أحسب $f(3)$ و $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ماذا تلاحظ

ب/ أحسب $f(-1)$ و أدرس نهاية f عند 1- ماذا تستنتج

الجواب:

1/ من خلال شكل المنحنى (C_f) يتضح ان المنحى متقطع عند النقطة ذات الافصول 1-
و متصل عند النقطة ذات 3

2/ أ- من خلال شكل المنحنى (C_f) لدين $f(3)=2$ و $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$

نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$ لذا نقول إن الدالة f متصلة عند النقطة 3

ب- من خلال شكل المنحنى (C_f) لدينا $f(-1)=3$ و $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=1$

نلاحظ أن: *- $\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$ نقول إن الدالة f غير متصلة عند -1

*- $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ نقول إن الدالة f متصلة على اليمين عند النقطة -1

*- $\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq f(-1)$ نقول إن الدالة f غير متصلة على اليسار عند النقطة -1

b/ تعريف الاتصال

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I ، و x_0 عنصرا من I

تكون f متصلة في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

تعريف الاتصال على اليمين الاتصال على اليسار في نقطة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[x_0; x_0+\alpha[$ حيث $\alpha \succ 0$

تكون f متصلة على اليمين في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]x_0-\alpha; x_0]$ حيث $\alpha \succ 0$

تكون f متصلة على اليسار في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I ، و x_0 عنصرا من I

تكون f متصلة في النقطة x_0 إذا وفقط إذا f متصلة على اليمين و على اليسار في النقطة x_0

تمرين

1- أدرس اتصال f في x_0 في الحالات التالية :

a / $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin 3x}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$; $x_0 = 0$

b/ $\begin{cases} f(x) = 2x+1 & x \succ 2 \\ f(x) = x^2-1 & x \leq 2 \end{cases}$; $x_0 = 2$

c/ $\begin{cases} f(x) = x\sin\dfrac{1}{x} & x \succ 0 \\ f(x) = x^2 - x & x \leq 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

2- حدد a لكي تكون f متصلة في -1 $\begin{cases} f(x) = x^3+ax & x \succ -1 \\ f(x) = -x+1 & x \leq -1 \end{cases}$

2- الاتصال في مجال

تعريف

لتكن f دالة عدية معرفة على المجال مفتوح I

تكون f متصلة على I إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من I

لتكن f دالة عدية معرفة على المجال $[a;b]$

تكون f متصلة على $[a;b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a;b[$ ومتصلة على يمين a و متصلة على يسار b

بالمثل نعرف الاتصال على $]a;b]$ و على $[a;b[$ و $]-\infty;a]$ و على $[a;+\infty[$

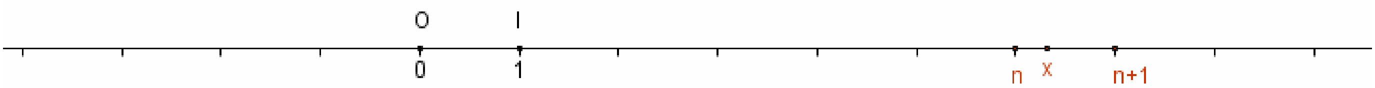
ملاحظة التمثيل المبياني لدالة متصلة على $[a;b]$ هو خط متصل طرفاه النقطتين اللتين إحداثيتيهما $(a;f(a))$ و $(b;f(b))$

3- اتصال دوال اعتيادية

خاصية

الدوال الحدودية و الدوال الجدرية و الدوال $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \tan x$ متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها

4- دالة الجزء الصحيح



لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح نسبي وحيد n حيث $n \le x \prec n+1$

العدد الصحيح النسبي n يسمى الجزء الصحيح للعدد x

تعريف

دالة الجزء الصحيح هي الدالة التي تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بجزئه الصحيح

نرمز لصورة x بهذه الدالة بالرمز $E(x)$ أو بالرمز $[x]$

$$E(x) = n \Leftrightarrow \exists! n \in \mathbb{Z} \qquad n \le x \prec n+1$$

أمثلة

$E(3,7) = 3$ لأن $3 \le 3,7 \prec 4$ $\qquad$ $E(-2,1) = -3$ لأن $-3 \le -2,1 \prec -2$

$E(\sqrt{2}) = 1$ لأن $1 \le \sqrt{2} \prec 2$ $\qquad$ $E(-4) = -4$ لأن $-4 \le -4 \prec 5$

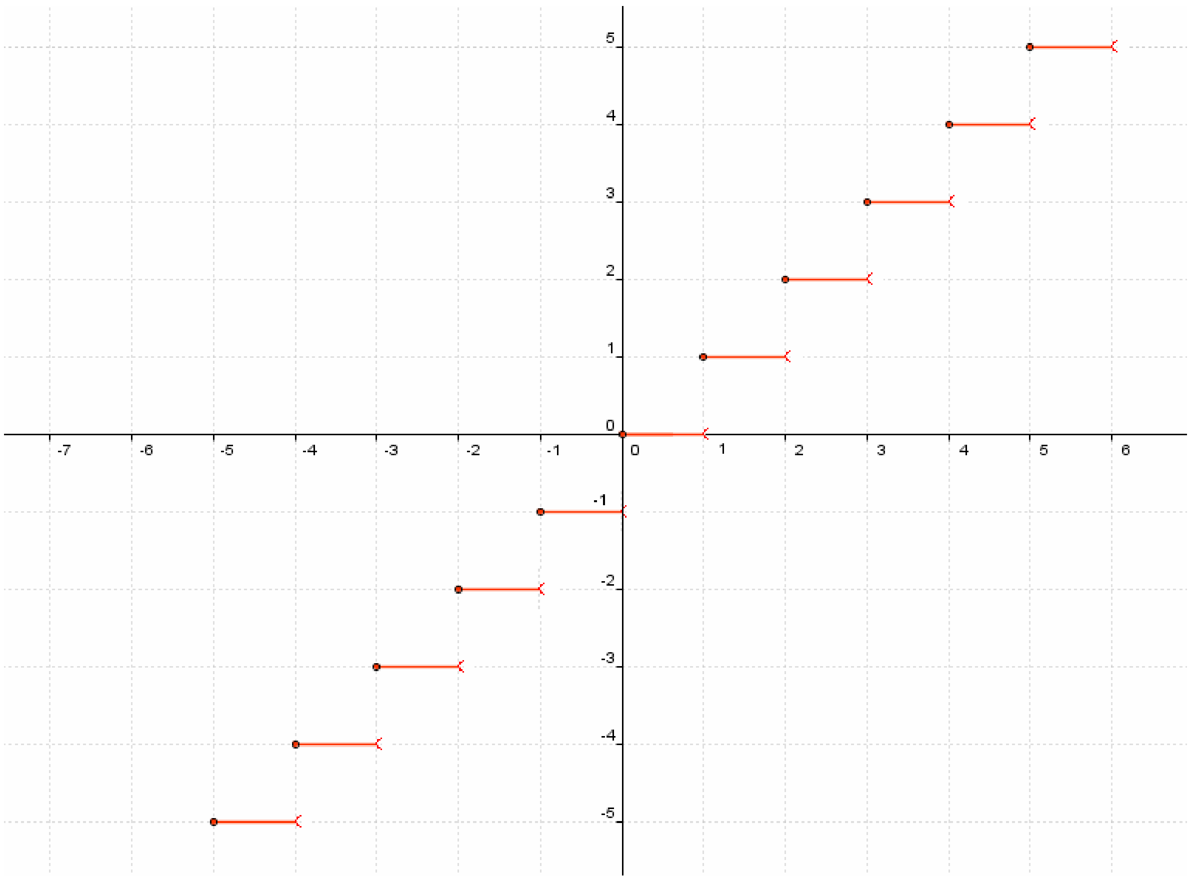
التمثيل المبياني لدالة الجزء الصحيح

ليكن $n \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $E(x) = n \qquad \forall x \in [n; n+1[$

إذا كان $x \in [0;1[$ فان $E(x) = 0$ $\qquad$ إذا كان $x \in [-1;0[$ فان $E(x) = -1$

إذا كان $x \in [1;2[$ فان $E(x) = 1$ $\qquad$ إذا كان $x \in [-2;-1[$ فان $E(x) = -2$

....



نتائج

*- $E(n)=n \qquad \forall n\in\mathbb{Z}$

*- $E(x)\le x \prec E(x)+1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

*- $E(x+n)=E(x)+n \qquad \forall x\in\mathbb{Z} \qquad \forall n\in\mathbb{Z}$

ليكن $n\in\mathbb{Z}$

*- دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين في n و غير متصل على اليسار في n

*- دالة الجزء الصحيح متصلة على $[n;n+1[$

*- دالة الجزء الصحيح غير متصلة في n

5- قصور دالة

تعريف

إذا كانت f دالة عددية معرفة على مجال I و g دالة عددية معرفة على مجال J ضمن I بحيث $g(x)=f(x) \quad \forall x\in J$ فاننا نقول ان الدالة g قصور الدالة f على المجال J

نتيجة

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و g قصور الدالة f على المجال J فان g متصلة على المجال J

تمرين لتكن f دالة عددية معرفة على $[-1;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x} & x\succ 1 \\ f(x)=\dfrac{3x^2}{x+2} & ;-1\le x\le 1 \end{cases}$$

بين أن الدالة f متصلة على المجال $[-1;+\infty[$

---

*- الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ متصلة على حيز تعريفها $[0;+\infty[$ و $]1;+\infty[\subset[0;+\infty[$

ومنه الدالة f متصلة على $]1;+\infty[$

*- الدالة $x\mapsto\dfrac{3x^2}{x+2}$ متصلة على كل مجال ضمن $\mathbb{R}-\{-2\}$ لأنها دالة حدودية و $]-1;1[\subset\mathbb{R}-\{-2\}$

ومنه الدالة f متصلة على $[-1;1[$

*- لندرس اتصال f في 1

لدينا $f(1)=1$ و $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\sqrt{x}=1$ و $\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\dfrac{3x^2}{x+2}=1$

$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^-} f(x)=f(1)$ إذن f متصلة في 1

إذن f متصلة على $[-1;+\infty[$

II- العمليات على الدوال المتصلة

1- خاصية(تقبل)

إذا كانتا f و g دالتين متصلتين على مجال I و α عددا حقيقيا فان:

*- $f+g$ و αf و $f\times g$ متصلة على I

*- و إذا كانت g لا تنعدم على المجال I فان الدالتين $\dfrac{1}{g}$ و $\dfrac{f}{g}$ متصلتان على مجال I

تمرين

حدد مجموعة تعريف الدالة f و أدرس اتصالها على D_f في الحالات التالية

أ- $f(x)=x^2+\sin(x)$ \qquad د- $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{x}{x+1}$ \qquad ج- $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$

2- اتصال مركب دالتين

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J حيث $f(I)\subset J$
إذا كانت f متصلة على I وg دالة متصلة على J فان $g\circ f$ متصلة على I .

تمرين :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x)=\cos(3x^2-2x)$

1) حدد D_f.

2) اكتب f على شكل مركب دالتين. ثم أدرس اتصال الدالة f على D_f.

نتيجة: f موجبة ومتصلة على مجال I

$f(I)\subset[0;+\infty[$ و $x\mapsto\sqrt{x}$ متصلة على $[0;+\infty[$

اذن $\sqrt{f}$ متصلة على مجال I لان $\sqrt{f}=\sqrt{\ }\circ f$

اذا كانت f موجبة ومتصلة على مجال I فان دالة $\sqrt{f}$ متصلة على مجال I

III- صورة مجال بدالة متصلة

1- صورة قطعة – صورة مجال

نشاط نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ: $f(x)=x^2$

و(C_f) منحناها في معلم متعامد و ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1-انشئ (C_f).

2-حدد مبيانيا صور كل من المجالات : $[0;2]$; $[-1;2]$; $]-1;2]$; $]-1;0[$; $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$

خاصية

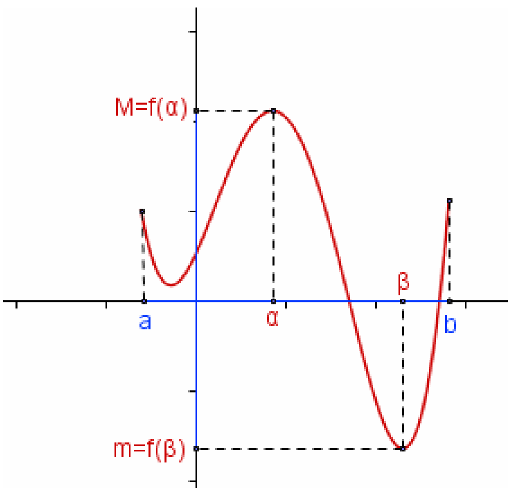
*- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.
*- صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

ملاحظة

* إذا كانت f متصلة على $[a;b]$ فانه يوجد α وβ من $[a;b]$

حيث $m=f(\beta)=\inf\limits_{x\in[a;b]}(f(x))$ (القيمة الدنيا)

و $M=f(\alpha)=\sup\limits_{x\in[a;b]}(f(x))$ (القيمة القصوى) $f([a;b])=[m;M]$



* إذا كان I مجالا من $\mathbb{R}$ و $f(I)$ ليس مجالا من $\mathbb{R}$ فان f غير متصلة على I

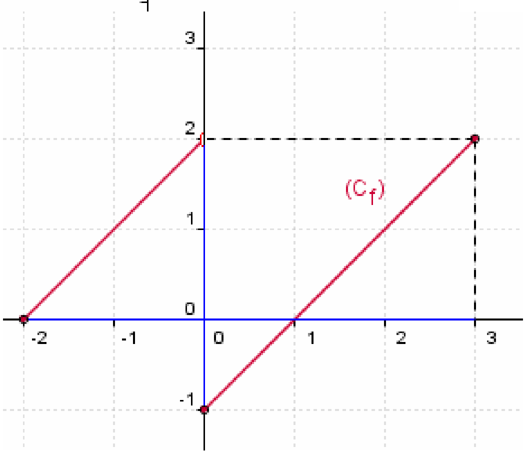
* في الخاصية الشرط f متصلة شرط كاف
و لكن غير لازما أي يمكن أن تكون صورة مجال بدالة غير متصلة هي مجال

مثال نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $[-2.3]$

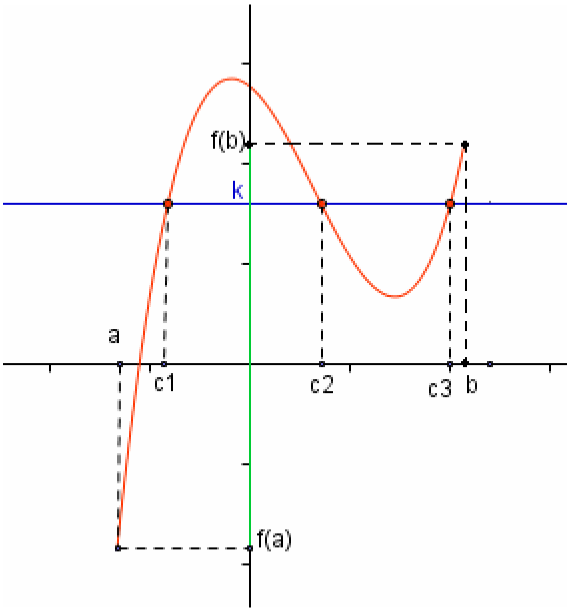
بـ: $\begin{cases} f(x)=x+2 & x\in[-2;0[\\ f(x)=x-1 & x\in[0;3] \end{cases}$

$f([-2;3])=[-1;2]$ مع ذلك f غير متصلة على $[-2;3]$

لأنها غير متصلة في0



2- مبرهنة القيم الوسيطية



f متصلة على $[a;b]$

k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$

ومنه $k \in f([a;b])$

يوجد على الأقل عدد c محصور بين a و b حيث $f(c)=k$.

مبرهنة القيم الوسيطية

إذا كانت f متصلة على I و a و b عنصرين من I فان لكل k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد c محصور بين a و b حيث $f(c)=k$.

نتيجة

إذا كانت f متصلة على $[a;b]$ وكان $f(a)\cdot f(b) \prec 0$ فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $]a;b[$.

تمرين بين أن المعادلة $2\sin x = x$ تقبل حلا في $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

3- حالة دالة متصلة و رتيبة قطعا

الدالة f متصلة و تزايدية قطعا	
المجال I	المجال $f(I)$
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$
$[a;+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$
$]-\infty;a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);f(a)\right]$
$]-\infty;a[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right[$

الدالة f متصلة و تناقصية قطعا	
المجال I	المجال $f(I)$
$[a;b]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);f(a)\right]$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty;a]$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty;a[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

تمرين

f دالة عددية متصلة على $]-\infty;5]$ جدول تغيراتها كما يلي

x	$-\infty$		0		1		5
f	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3

1/ حدد $f([1;5])$ و $f([0;5])$ و $f([-2;1])$ و $f(]-\infty;0])$

2/ حدد القيمة القصوى ثم القيمة الدنيا لدالة f على المجال $]-\infty;5]$ ثم استنتج $f(]-\infty;5])$

تمرين

لتكن f دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\dfrac{2x+1}{4x-1}$

1/ حدد D_f 2/ حدد صورة المجال $\left]-\infty;\dfrac{1}{4}\right[$ بالدالة f

نتيجة

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على $[a;b]$ فان لكل k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على عدد وحيد c محصور بين a و b حيث $f(c)=k$.

نتيجة

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على $[a;b]$ وكان $f(a)\cdot f(b)\prec 0$ فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]a;b[$.

تمرين بين أن المعادلة $x^3+1=-x$ تقبل حلا وحيدا α في $\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[$

حدد تأطيرا للعدد α سعته $\dfrac{1}{8}$ (طريقة التفرع الثنائي)

IV- الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال

1- خاصية

إذا كانت دالة f متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فان لكل y من $f(I)$ المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا و حيدا في I (نعبر عن هذا بقولنا f تقابل من I نحو المجال $f(I)$)

تعريف

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و J مجال حيث $f(I)=J$.

الدالة التي تربط كل عنصر y من J بالعنصر الوحيد x من I بحيث $f(x)=y$ تسمى الدالة العكسية للدالة f نرمز لها بالرمز f^{-1}

نتائج

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية

$$\forall x\in f(I)\quad \forall x\in I\quad f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow x=f(y)$$

$$\forall x\in f(I)\quad f\circ f^{-1}(x)=x \quad ; \quad \forall x\in I\quad f^{-1}\circ f(x)=x$$

2- خاصيات الدالة العكسية

خاصية

إذا كانت دالة f متصلة ورتيبة قطعا على مجال I و f^{-1} دالتها العكسية فان:

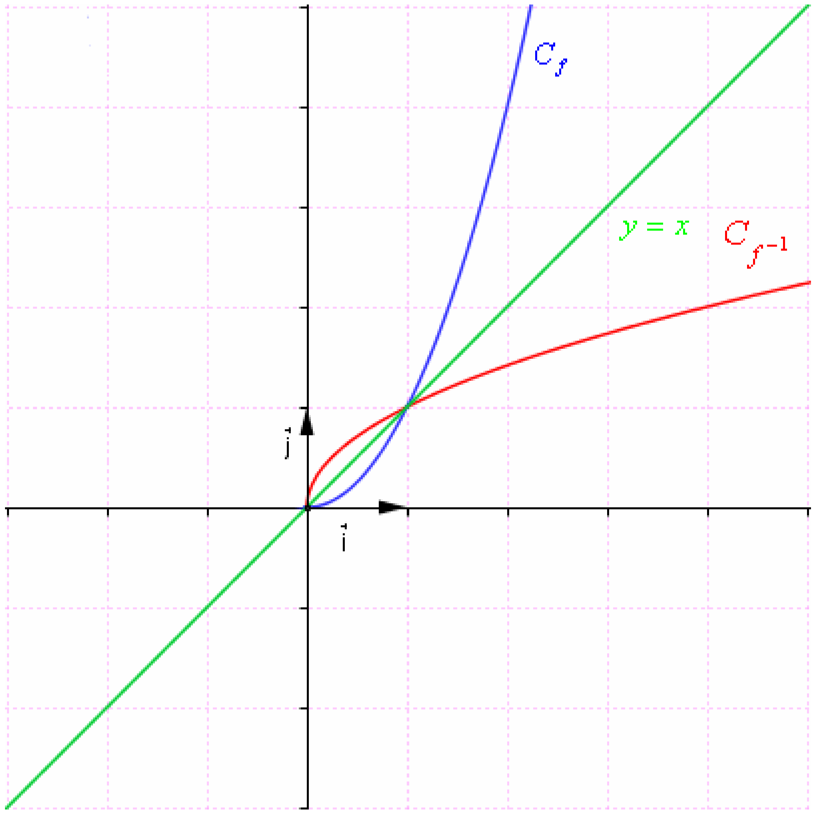
-* f^{-1} متصلة على ن $f(I)$

-* f^{-1} رتيبة قطعا على $f(I)$ و لها نفس رتابة f على مجال I

-* $C_{f^{-1}}$ منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل المنحنى C_f بالنسبة المستقيم الذي معادلته $y=x$ في معلم متعامد و ممنظم.

اصطلاح

المستقيم الذي معادلته $y=x$ يسمى المنصف الاول للمعلم



تمرين: لتكن f الدالة المعرفة على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ بـ $f(x)=\sqrt{1-2x}$ 1/ بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} على مجال J يجيب تحديده 2/ حدد f^{-1} 3/ في معلم متعامد ممنظم أنشئ $C_{f^{-1}}$ ثم انشئ C_f في نفس المعلم	**تمرين** لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ بين أن القصور g للدالة f على $[-1;1]$ تقبل دالة عكسية g^{-1} على مجال J يجيب تحديده ثم حدد g^{-1}

3- دالة الجدر من الرتبة n

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$

بين أن الدالة $x\to x^n$ تقبل دالة عكسية من $\mathbb{R}^+$ إلى $\mathbb{R}^+$

أ- تعريف

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$

الدالة العكسية للدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي $x\to x^n$ تسمى دالة الجدر من الرتبة n

يرمز له بـ $\sqrt[n]{\ }$. نرمز

نرمز لصورة العدد x بالرمز $\sqrt[n]{x}$ و يقرأ الجدر من الرتبة n للعدد x.

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^{+2}\quad \sqrt[n]{x}=y\Leftrightarrow x=y^n$$

ملاحظة و اصطلاح ليكن $x\in\mathbb{R}^+$

- $\sqrt[1]{x}=x$; $\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$ - $\sqrt[3]{x}$ يسمى الجدر المكعب للعدد x

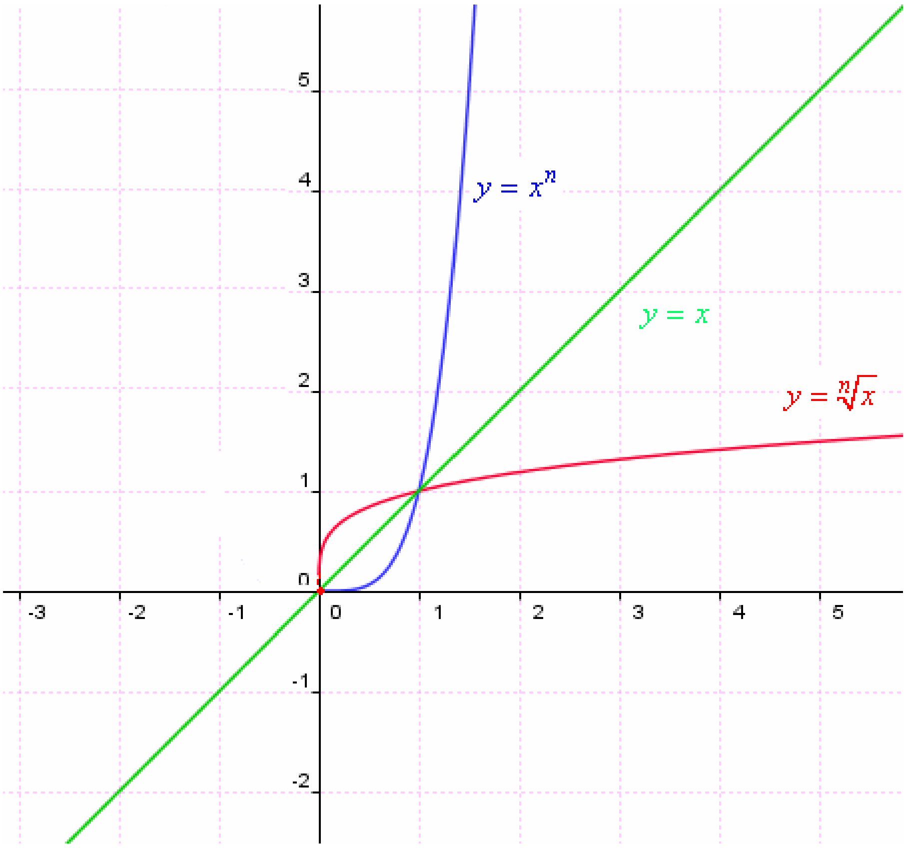
خاصية

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

*- الدالة $x \to \sqrt[n]{x}$ متصلة على $[0;+\infty[$ و $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

*- في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالة $x \to \sqrt[n]{x}$ مماثل لمنحنى الدالة $x \to x^n$ بالنسبة للمنصف الأول للمعلم

حالة: $n = 4$



نتائج

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$$

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \sqrt[n]{x} \prec \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \prec y$$

ب- حل المعادلة $x^n = a \quad x \in \mathbb{R}$

تمرين حل في $\mathbb{R}$ المعادلات $x^5 = 243 \quad ; \quad x^7 = -8 \quad ; \quad x^4 = 5$

تمرين ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و $a \in \mathbb{R}$ حل وناقش في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^n = a$

ج- العمليات على الجذور

ليكن $(n;p) \in \mathbb{N}^{*2} \quad ; \quad (a;b) \in \mathbb{R}^{+2}$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p} \quad ; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p} \quad ; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a} \quad ; \quad \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

البرهان $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p} \Leftrightarrow (\sqrt[n]{a})^{pn} = (\sqrt[np]{a^p})^{pn} \Leftrightarrow \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^p = a^p \Leftrightarrow a^p = a^p$

تمرين 1- برهن أن $\sqrt[n]{a}\sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}} \quad \forall (n;m) \in \mathbb{N}^{*2} \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$

3- قارن $\sqrt[7]{3}$; $\sqrt[5]{2}$

2- بسط $\dfrac{\sqrt[3]{1024}\sqrt[5]{32}}{\sqrt[4]{64}\sqrt[3]{\sqrt{256}}\sqrt{18}}$

د- اتصال ونهاية مركبة دالة و دالة الجدر النوني

خاصيات

لتكن f دالة موجبة على مجال I و x_0 عنصرا من I

- إذا كانت f متصلة على I فان $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I
- إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ فان $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{l}$
- إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ فان $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$

ملاحظة

الخاصيتان تظلان صالحتين عندما يؤول x الى x_0 على اليمين أو الى x_0 على اليسار أو الى $+\infty$ أو إلى $-\infty$

تمرين

1- لتكن (E) المعادلة $\sqrt[3]{2x-1}=\sqrt{x}$ $\quad x\in\mathbb{R}$

أ/ تأكد أن 1 حل للمعادلة (E) $\qquad$ ب/ حل المعادلة (E)

2- بين أن الدالة $x\to\sqrt[5]{x^2-2x-3}$ متصلة في كل نقطة من حيز تعريفها .

3- حدد $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[8]{x^3-x+3}$; $\lim_{x\to 2}\sqrt[5]{x^3+8}$, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$; $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[6]{x^3+x+1}}{\sqrt{x+1}}$

4- القوة الجدرية لعدد حقيقي موجب (امتداد للقوة الصحيحة النسبية)

تعريف

ليكن $a\in\mathbb{R}^+$; $r\in\mathbb{Q}^*$

العدد a^r هو العدد $\sqrt[q]{a^p}$ حيث $r=\dfrac{p}{q}$; $(p;q)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{N}^*$ و يسمى القوة الجذرية للعدد a ذات الأس r . $\sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{p}{q}}$

ملاحظة $\quad a^0=1 \qquad a\in\mathbb{R}^{+*}$

حالة خاصة $\quad \sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ لكل x من $[0;+\infty[$

خاصيات

ليكن $(r;r')\in\mathbb{Q}^2$; $(a;b)\in\mathbb{R}_+^{*2}$

$$(a^r)^{r'}=a^{rr'} \quad ; \quad a^rb^r=(ab)^r \quad ; \quad a^ra^{r'}=a^{r+r'}$$

$$\frac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'} \quad ; \quad \frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r \quad ; \quad \frac{1}{a^r}=a^{-r}$$

البرهان نضع $r'=\dfrac{n}{m}$; $r=\dfrac{p}{q}$ ومنه $a^ra^{r'}=\sqrt[q]{a^p}\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[qm]{a^{pm}}\sqrt[mq]{a^{nq}}=\sqrt[qm]{a^{pm+nq}}=a^{\frac{pm+nq}{qm}}=a^{r+r'}$

تمرين

احسب :
$$A=\frac{2^{\frac{5}{3}}3^{\frac{5}{2}}\left(\sqrt[4]{\dfrac{1}{2^2}}\right)^3}{\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{2}}\left(\sqrt[5]{3^{-3}}\right)^4}$$

طريقة التفرع النهائي DICHOTOMIE

نتيجة لمبرهنة القيم الوسيطية

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على $[a;b]$ وكان $f(a)\cdot f(b) \prec 0$ فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]a;b[$.

تحديد تاطيرا للعدد α سعته l