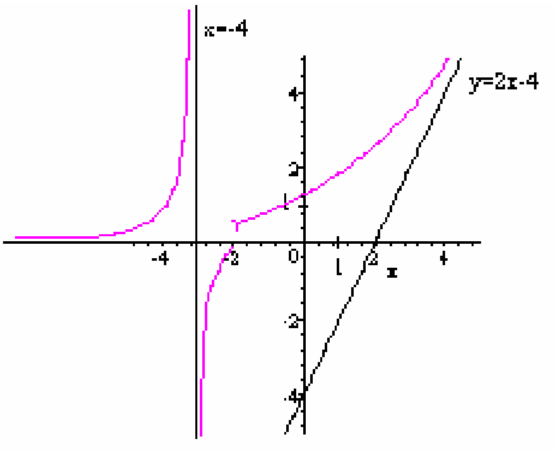
النهايات و الاتصال

I- أنشطة و تذكير

1- أنشطة

1) الشكل التالي يمثل منحنى دالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.
المستقيمات (D) و (Δ) و محور الأفاصيل مقاربات للمنحنى C_f.
انطلاقا من المنحنى C_f حدد



$$\lim_{x\to -4^-} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to -4^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} (f(x)-(2x-4))$$

هل f متصلة في 0 ؟ هل f متصلة في -2 ؟

2) أحسب

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-x-6}{x-2} \qquad \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

$$\lim_{|x|\to \infty} \sqrt{x^2+2x}+x \qquad \lim_{|x|\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x}$$

3) أ- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$\begin{cases} f(x)=ax^2+3 & x\le 1 \\ f(x)=\dfrac{x-1}{x+2} & x\succ 1 \end{cases}$$

حدد a لكي تكون f متصلة في $\mathbb{R}$

ب- نعتبر الدالة f المعرفة ب $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{2x^2}$.

أعط تمديدا بالاتصال لـ f عند النقطة 1

4) أ- بين أن $\lim_{x\to +\infty} x\sin x+2x=+\infty$

ب- حدد $\lim_{x\to 0^+} \sin x+\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2- تذكير (ملخص)

A) **تعاريف**

أ- النهايات

* لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow (\forall\varepsilon\succ 0)\quad(\exists\alpha\succ 0)\quad(\forall x\in D_f)\quad 0\prec|x-x_0|\prec\alpha\Rightarrow|f(x)-l|\prec\varepsilon$$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]a;+\infty[$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall A\succ 0)\quad(\exists B\succ 0)\quad \forall x\in D_f \quad x\succ B\Rightarrow f(x)\succ A$$

ملاحظة بالمثل نعرف النهايات الأخرى .

ب- الاتصال

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0.

f متصلة في $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ج- التمديد بالاتصال

لتكن f دالة غير معرفة في x_0 لكن لها نهاية l في x_0

الدالة g المعرفة كما يلي $\begin{cases} g(x) = f(x) & (x \in D_f) \\ g(x_0) = l \end{cases}$ هي دالة متصلة في x_0 تسمى التمديد بالاتصال لـ f في x_0

د- الاتصال على مجال

تكون متصلة على $]a;b[$ إذا و فقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a;b[$.

تكون متصلة على $[a;b]$ إذا و فقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a;b[$ و متصلة على اليمين في a و متصلة على اليسار في b.

(بنفس الطريقة نعرف الاتصال على مجالات أخرى)

B) العمليات على النهايات

تعتبر دالتين f و g.

عند x_0 أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ تكون لدينا النتائج التالية:

نهاية f	نهاية g	نهاية $f+g$	نهاية $f \times g$	نهاية $\frac{f}{g}$
l	l'	$l+l'$	$l \times l'$	$\frac{l}{l'}$ $(l' \neq 0)$
l $l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l	0
l $l \neq 0$	$-\infty$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l	0
l حيث $l \neq 0$	0^+	l	0	∞ مع وضع إشارة l
l حيث $l \neq 0$	0^-	l	0	∞ مع وضع عكس إشارة l
0	0	0	0	شكل غير محدد
0	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد	0
0	$-\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	l حيث $l \neq 0$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l	∞ مع وضع إشارة l
$-\infty$	l حيث $l \neq 0$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l	∞ مع وضع عكس إشارة l

ب- نهايات دوال مثلثية

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

ج- النهايات والترتيب

f و g و h دوال معرفة عى مجال مفتوح منقط I مركزه x_0

* إذا كان لكل x من I ، $|f(x)-l|\le u(x)$ و كان $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0$ فان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

* إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ و f موجبة على I فان $l\ge 0$

* إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ بحيث $l\neq 0$ فانه يوجد مجال مفتوح منقط J مركزه x_0 بحيث $\forall x\in J \quad f(x)\times l \succ 0$

* إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l'$ و كان $f\ge g$ على I فان $l\ge l'$

* إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l$ وكان $f\ge h\ge g$ على I فان $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l$

* إذا كان لكل x من I ، $f(x)\ge u(x)$ و كان $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=+\infty$ فان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

* إذا كان لكل x من I ، $f(x)\le u(x)$ و كان $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=-\infty$ فان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

ملاحظة الخاصيات السابقة تبقى صالحة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار مع تعويض I على التوالي بالمجالات $]a;+\infty[$ و $]-\infty;a[$ و $]x_0;x_0+\alpha[$ و $]x_0-\alpha;x_0[$ $\quad(\alpha\succ 0)$

II - مركبة دالتين- مبرهنة القيم الوسطية

1 – اتصال مركبة دالتين

أ- خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J حيث $f(I)\subset J$ ، ليكن $x_0\in I$

إذا كانت f متصلة في x_0 و g دالة متصلة في $f(x_0)$ فان $g\circ f$ متصلة في x_0 .

ملاحظة الخاصية تبقى صالحة إذا عوضنا الاتصال في x_0 بالاتصال في x_0 على اليمين أو في x_0 على اليسار

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J حيث $f(I)\subset J$

إذا كانت f متصلة على I و g دالة متصلة على J فان $g\circ f$ متصلة على I .

مثال نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $f(x)=\sin\left(\dfrac{2x^2-3}{x-2}\right)$

$D_f=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

الدالة $u:x\to\dfrac{2x^2-3}{x-2}$ متصلة على كل من المجالين $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$

الدالة $v:x\to\sin x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $v(]2;+\infty[)\subset\mathbb{R}$ $\quad v(]-\infty;2[)\subset\mathbb{R}$ و $f=v\circ u$

إذن f متصلة على كل من المجالين $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$

ملاحظة الخاصية العكسية للخاصية السابقة غير صحيحة

مثال مضاد

$$\begin{cases} f(x)=2x & x\neq 1\\ f(1)=0 \end{cases} \qquad g(x)=3 \qquad \forall x\in\mathbb{R} \quad g\circ f(x)=3$$

$g\circ f$ متصلة في 1 و مع ذلك f غير متصلة في1.

ب- لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط I مركزه x_0 و g دالة معرفة على مجال J حيث $f(I)\subset J$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ و g دالة متصلة في l

لنبين أن $\lim g \circ f(x) = g(l)$

لتكن h تمديد بالاتصال للدالة f في المجال $I \cup \{x_0\}$ $\quad (h(x_0) = l)$

إذن h متصلة في x_0 و بالتالي $g \circ h$ متصلة في x_0

لدينا $g \circ f$ و $g \circ h$ متساويتان على I

ومنه $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g \circ h(x) = g \circ h(x_0) = g(l)$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط I مركزه x_0 و g دالة معرفة على مجال J حيث $f(I) \subset J$
إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ و g دالة متصلة في l فان $\lim g \circ f(x) = g(l)$

ملاحظة الخاصية تبقى صالحة عند $\pm\infty$ أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار.

مثال حدد $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\dfrac{\sin \pi x}{4x}\right)$

2- صورة مجال بدالة متصلة

أ- أنشطة حدد مبيانيا صورة المجالين I و J بالدالة f في الحالتين

1- $f(x) = \sin x$; $I = \left[\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$; $J = \mathbb{R}$

2- $f(x) = x^2$; $I = [-1;2]$; $J =]-\infty;0]$

خاصية

صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.

ملاحظة

* إذا كانت f متصلة على $[a;b]$ فانه يوجد α و β من $[a;b]$ حيث

$M = f(\alpha) = \sup\limits_{x \in [a;b]}(f(x)) \quad m = f(\beta) = \inf\limits_{x \in [a;b]}(f(x))$ و $f([a;b]) = [m;M]$

* إذا كان I مجالا من $\mathbb{R}$ و $f(I)$ ليس مجالا من $\mathbb{R}$ فان f غير متصلة على I

* في الخاصية الشرط f متصلة شرط كاف ولكن غير لازما أي يمكن أن تكون صورة مجال بدالة غير متصلة هي مجال

مثال نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $[-2.3]$ بـ: $\begin{cases} f(x) = x+2 & x \in [-2;0[\\ f(x) = x-1 & x \in [0;3] \end{cases}$

$f([-2;3]) = [-1;2]$

و مع ذلك f غير متصلة على $[-2;3]$ لأنها غير متصلة في0

3- مبرهنة القيم الوسيطية

* لتكن f متصلة على $[a;b]$

نبين أن لكل λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد c من $[a;b]$ حيث $f(c) = \lambda$

بما أن f متصلة على $[a;b]$ يوجد m و M من $\mathbb{R}$ حيث $f([a;b]) = [m;M]$

$M = \sup\limits_{x \in [a;b]}(f(x)) \quad m = \inf\limits_{x \in [a;b]}(f(x))$

و منه f شمولية من $[a;b]$ نحو $[m;M]$ و بما أن $f(a)$ و $f(b)$ ينتميان الى $[m;M]$

فان $\lambda \in [m;M]$

و منه يوجد c من $[a;b]$ حيث $f(c) = \lambda$.

مبرهنة القيم الوسيطية

إذا كانت f متصلة على $[a;b]$ فان لكل λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد c من $[a;b]$ حيث $f(c)=\lambda$.

نتيجة

إذا كانت f متصلة على $[a;b]$ وكان $f(a)\cdot f(b)\prec 0$ فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $[a;b]$.

تمرين بين أن المعادلة $2\sin x = x$ تقبل حلا في $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

III- الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال

أ- دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال

خاصية

إذا كانت دالة f متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فان f تقابل من I نحو المجال $f(I)$

خاصية

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على $[a;b]$ وكان $f(a)\cdot f(b)\prec 0$ فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $[a;b]$.

تمرين بين أن المعادلة $x^3+x+1=0$ تقبل حلا وحيدا في $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$

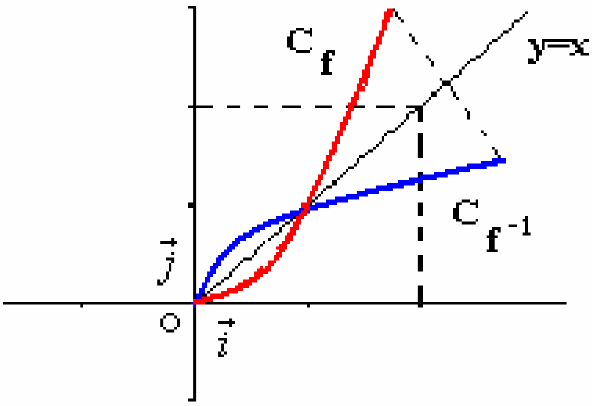
ب- الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا

خاصية

إذا كانت دالة f متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فانها تقبل دالة عكسية نرمز لها f^{-1} تكون متصلة على $f(I)$ و لها نفس منحى تغيرات f و منحناها $C_{f^{-1}}$ هو مماثل المنحنى C_f بالنسبة للمنصف الأول في معلم متعامد و ممنظم.

$$\forall x\in f(I)\quad \forall x\in I\quad f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow x=f(y)$$

$$\forall x\in f(I)\quad f\circ f^{-1}(x)=x \quad ; \quad \forall x\in I\quad f^{-1}\circ f(x)=x$$



تمرين لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

بين أن القصور g للدالة f على $[-1;1]$ تقابل من $[-1;1]$ نحو مجال I يجيب تحديده ثم دد g^{-1}

IV- دالة الجدر من الرتبة n

1- تعريف و خاصية

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ بين أن الدالة $x\to x^n$ تقابل من $\mathbb{R}^+$ إلى $\mathbb{R}^+$

تعريف و خاصية

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

الدالة $x \to x^n$ تقابل من $\mathbb{R}^+$ إلى $\mathbb{R}^+$ و تقابلها العكسي يسمى دالة الجدر من الرتبة n يرمز له بـ $\sqrt[n]{\ }$

لكل عنصر x من $\mathbb{R}^+$ ، $\sqrt[n]{x}$ يقرأ الجدر من الرتبة n للعدد x.

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$$

ملاحظة و اصطلاح

ليكن $x \in \mathbb{R}^+$

- $\sqrt[1]{x} = x$; $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ - $\sqrt[3]{x}$ يسمى الجدر المكعب للعدد x

نتائج

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$\sqrt[n]{x} \prec \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \prec y$$

* الدالة $x \to \sqrt[n]{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

2- حل المعادلة $x^n = a$ $x \in \mathbb{R}$

تمرين حل في $\mathbb{R}$ المعادلات $x^5 = 243$; $x^7 = -8$; $x^4 = 5$

تمرين ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و $a \in \mathbb{R}$ حل وناقش في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^n = a$

3- العمليات على الجذور

ليكن $(n;p) \in \mathbb{N}^{*2}$; $(a;b) \in \mathbb{R}^{+2}$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p} \quad ; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p} \quad ; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a} \quad ; \quad \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

البرهان $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p} \Leftrightarrow (\sqrt[n]{a})^{pn} = (\sqrt[np]{a^p})^{pn} \Leftrightarrow \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^p = a^p \Leftrightarrow a^p = a^p$

تمرين

1- برهن أن $\sqrt[n]{a}\sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$ $\quad \forall (n;m) \in \mathbb{N}^{*2} \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$

2- بسط $\dfrac{\sqrt[3]{1024}\sqrt[5]{32}}{\sqrt[4]{64}\sqrt[3]{\sqrt{256}}\sqrt{18}}$

3- قارن $\sqrt[7]{3}$; $\sqrt[5]{2}$

4- اتصال ونهاية مركبة دالة و دالة الجدر النوني

خاصيات

لتكن f دالة موجبة على مجال I و x_0 عنصرا من I

❖ إذا كانت f متصلة على I فان $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

❖ إذا كانت $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ فان $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

❖ إذا كانت $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ فان $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

ملاحظة الخاصيتان تظلان صالحتين عندما يؤول x الى x_0 على اليمين أو الى x_0 على اليسار أو الى $+\infty$ أو إلى $-\infty$

تمرين 1- بين أن الدالة $x \to \sqrt[5]{x^2-2x-3}$ متصلة في كل نقطة من حيز تعريفها .

2- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[8]{x^3-x+3}$; $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[5]{x^3+8}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[6]{x^3+x+1}}{\sqrt{x+1}}$

5- القوة الجدرية لعدد حقيقي موجب (امتداد للقوة الصحيحة النسبية)

تعريف

ليكن $a\in\mathbb{R}^+$; $r\in\mathbb{Q}^*$

العدد a^r هو العدد $\sqrt[q]{a^p}$ حيث $r=\dfrac{p}{q}$; $(p;q)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{N}^*$ و يسمى القوة الجذرية للعدد a ذات الأس r .

ملاحظة $a^0=1$ $\quad a\in\mathbb{R}^{+*}$

6- العمليات على القوة الجذرية

ليكن $(r;r')\in\mathbb{Q}^2$; $(a;b)\in\mathbb{R}_+^{*2}$

$$(a^r)^{r'}=a^{rr'} \quad ; \quad a^rb^r=(ab)^r \quad ; \quad a^ra^{r'}=a^{r+r'}$$

$$\frac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'} \quad ; \quad \frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r \quad ; \quad \frac{1}{a^r}=a^{-r}$$

البرهان نضع $r'=\dfrac{n}{m}$; $r=\dfrac{p}{q}$ ومنه $a^ra^{r'}=\sqrt[q]{a^p}\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[qm]{a^{pm}}\sqrt[mq]{a^{nq}}=\sqrt[qm]{a^{pm+nq}}=a^{\frac{pm+nq}{qm}}=a^{r+r'}$

V- دوال عكسية لدوال مثلثة

أ- دالة قوس الظل

1- خاصية و تعريف

الدالة $x\to\tan x$ تقابل من $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ نحو $\mathbb{R}$ و تقابلها العكسي يسمى دالة قوس الظل و يرمز لها بـ arctan

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad ; \quad \forall y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\qquad \arctan x=y \Leftrightarrow x=\tan y$$

2- نتائج

$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \tan(\arctan x)=x$

$\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\qquad \arctan(\tan x)=x$

$\forall(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 \qquad \arctan x_1=\arctan x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$

$\forall(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2 \qquad \arctan x_1\prec\arctan x_2 \Leftrightarrow x_1\prec x_2$

* - الدالة $x\to\arctan x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و فردية

* - $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$

3- التمثيل المبياني لدالة قوس الظل