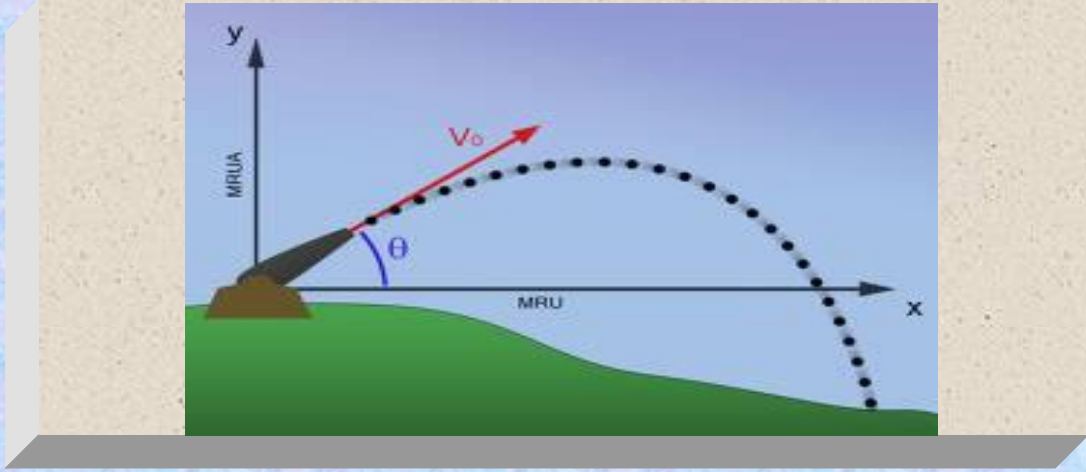


الحركات المستوية حركة قذيفة في مجال الثقالة المنتظم



1) مجال الثقالة .

كلما ما يحيط بالأرض يسقط نحو مركزها ، للأخذ بعين الاعتبار ظاهرة التجاذب هاته ، نقول بأن هناك مجال للثقالة بجوار الأرض ؛ يتميز هذا المجال عند نقطة معينة بالمتجهة $\vec{g}$. كالإبرة الممغنطة التي تبرز وجود مجال مغنطيسي عندما تتحرف لتأخذ اتجاهها محددًا ، جسما صلبا كتلته m يبرز وجود مجال الثقالة عندما يسقط نحو مركز الأرض .

ننمدج تأثير الأرض على جسم صلب كتلته m بقوة ، وزنه $\vec{P}$ حيث : $\vec{P} = m\vec{g}$
قوة موجهة نحو مركز الأرض . يمكن أن نعرف متجهة مجال الثقالة بالعلاقة :

$$\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m}$$

هذا المجال له :

- اتجاه : الرأسى عند الموضع المعين
 - منحنى : من الأعلى نحو الأسفل (نحو مركز الأرض)
 - شدة ، تسمى شدة مجال الثقالة ، قيمتها المتوسطة $9,8 \text{ N.kg}^{-1}$ عند سطح الأرض .
- قيمة مجال الثقالة تتغير حسب المكان : تنقص مع الارتفاع ، لكن تزداد خط العرض (الزاوية الموجودة بين خط الاستواء و الرأسى عند الموضع المعين) .

الإكوادور
 $g = 9,78 \text{ N.kg}^{-1}$



القطب الشمالي
 $g = 9,83 \text{ N.kg}^{-1}$

يمكن التدقيق في تعبير مجال الثقالة باعتماد قانون التجاذب الكوني لنيوتن . في الواقع ، نكافئ الوزن بقوة التجاذب المطبقة من طرف الأرض على الجسم ذي الكتلة m :

$$P = F$$

$$m g = G \frac{m M_T}{d^2} = G \frac{m M_T}{(R_T + z)^2}$$

و بذلك نكتب :

$$g(z) = G \times \frac{M_{Terre}}{(R_{Terre} + z)^2}$$

نعتبر مجال الثقالة منتظم في حيز أبعاده لها رتبة القدر 1km : في هذه الحالة نعتبر أن الاتجاهات الرأسية تكون متوازية (شعاع الأرض $R_T = 6380\text{km} \gg 1\text{km}$) و أن قيمة g ثابتة

2 (الدراسة التجريبية .



نقذف كرية نحو الأعلى بسرعة بدئية اتجاهها مائل ، ثم نقوم بتصويرها بكاميرا رقمية .

المعالجة المعلوماتية بواسطة حاسوب تمكن من خط

المنحنيين $v_x = f(t)$ و $v_y = f(t)$

مع v_x و v_y على التوالي الإحداثي الأفقي و الإحداثي الرأسي لمتجهة سرعة مركز قصور الكرية .

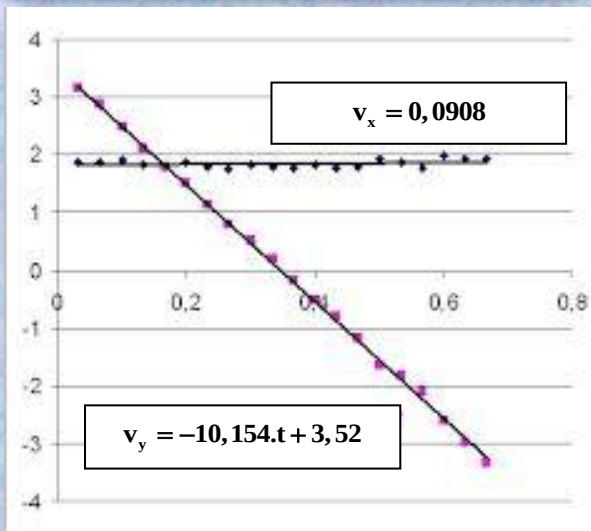
معادلة السرعة على المحور الأفقي (Ox) هي :

$$v_x(t) = 0,0908 \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$$

معادلة السرعة على المحور الرأسي (Oy) هي :

$$v_y(t) = -10,154 + 3,52 \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$$

- نستنتج أن حركة مركز قصور الكرية حركة منتظمة على المحور الأفقي و متغيرة بانتظام على المحور الرأسي .



و منه فإن إحداثيات متجهة التسارع هي :

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y(t)}{dt} = -10 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -10\vec{j}$$

نلاحظ أن $\vec{a} \approx \vec{g}$ أي أن السقوط حر .

- المعادلات الزمنية

من العلاقة $v_x = \frac{dx}{dt}$ وبالتكامل نحصل على المعادلة الزمنية:

$$x(t) = 0,0908.t \quad \text{باعتبار } x(t=0) = 0 \quad (1)$$

من العلاقة $v_y = \frac{dy}{dt}$ و بالتكامل نحصل على المعادلة الزمنية :

$$y(t) = -5,077.t^2 + 3,52.t \quad \text{باعتبار } y(t=0) = 0 \quad (2)$$

- معادلة المسار

نقصي البارامتر t بين المعادلتين (1) و (2) فنجد : $y = -615,79.x^2 + 38,76.x$ مسار مركز قصور الكرية جزء من مثلج

3 (الدراسة النظرية .

معلم الدراسة

دراسة السقوط الحر لجسم صلب في مجال الثقالة المنتظم تنجز في مرجع مرتبط بالأرض و الذي نعتبره غاليليا : حيث أن مدد السقوط لا تتجاوز غالبا بعض الثواني أو الدقائق ، و هي مدد مهمة مقارنة مع مدة يوم .

التسارع

المجموعة المدروسة جسم صلب كتلته m و مركز قصوره G .

الوزن $\vec{P} = m\vec{g}$ هو القوة الوحيدة المطبقة على المجموعة : يمكن القانون الثاني لنيوتن من كتابة :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} = m\vec{a}_G$$

أي

$$m\vec{g} = m\vec{a}_G$$

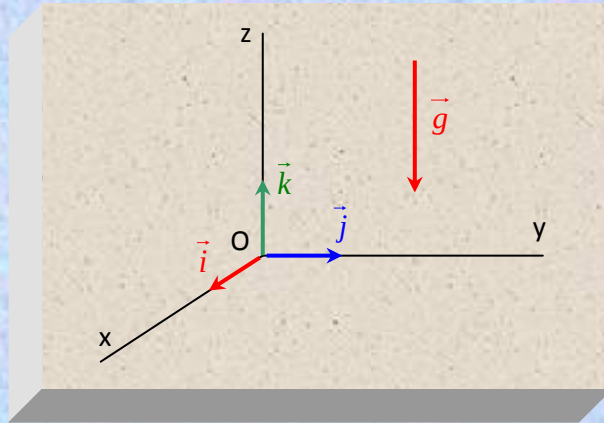
و منه

$$\vec{a}_G = \vec{g}$$

متجهة تسارع مركز قصور الجسم الصلب خلال سقوط حر تساوي متجهة مجال الثقالة : قيمة التسارع لا تتعلق بكتلة الجسم . و بذلك فإن الكريات خلال سقوطها لها نفس متجهة التسارع رغم اختلاف كتلتها و رغم حدوث ذلك بسرعة بدئية أو بدون سرعة بدئية .

حركة متغيرة بانتظام

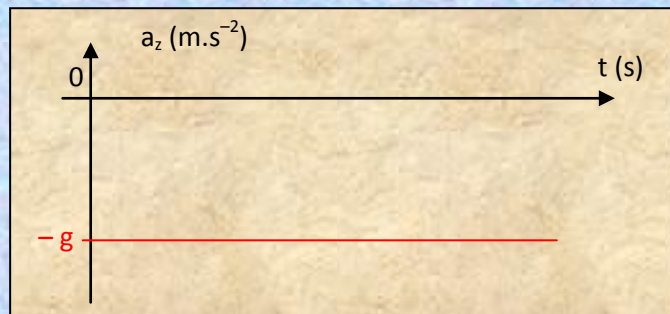
في المرجع الأرضي ، نختار معلما للفضاء متعامدا و ممنظما $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث المحور الرأسى $(O; \vec{k})$ موجه نحو الأعلى .



العلاقة المتجهية $\vec{a}_G = \vec{g}$ تمكن من الحصول على إحداثيات متجهة التسارع لمركز قصور الجسم بما أننا نعرف إحداثيات $\vec{g}$.

$$\vec{a}_G(t) = \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{cases}$$

التسارع حسب المحور (Oz) ثابت : نقول بأن الحركة حسب المحور الرأسى حركة متغيرة بانتظام . تمثيل $a_z(t)$ بدلالة الزمن مستقيم أفقي .



المعادلات التفاضلية للحركة

نعرف أن التسارع هو مشتقة السرعة ، نستنتج المعادلات التفاضلية التي تحققها إحداثيات متجهة السرعة :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = -g \end{cases}$$

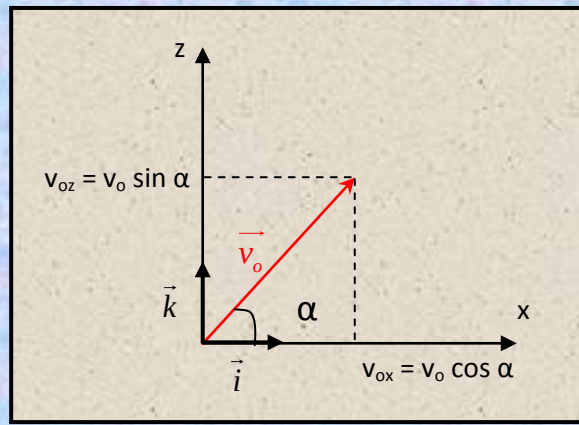
حل تحليلي للمعادلات التفاضلية

أي إيجاد المعادلات الزمنية لمتجهة السرعة $\vec{v}(t)$ و متجهة الموضع $\vec{OG}(t)$ لمركز قصور الجسم :

إعطاء التعابير للإحداثيات بدلالة الزمن . لهذا يجب معرفة الشروط البدئية .

نختار المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بحيث يكون أصل المعلم يطابق موضع مركز قصور الجسم عند اللحظة $t = 0$.

لنفترض أن عند اللحظة $t = 0$ نقذف الكرة بسرعة بدئية غير منعدمة $\vec{v}_0(t = 0) = \vec{v}_0$ تنتمي للمستوى (xOz) و تكون الزاوية α بالنسبة للمستوى الأفقي .



الشروط البدئية هي إذن :

$$\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \begin{cases} v_x(t_0) = v_{ox} = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t_0) = v_{oy} = 0 \\ v_z(t_0) = v_{oz} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

و

$$\vec{OM}_0 \begin{cases} x(t_0) = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ z(t_0) = 0 \end{cases}$$

تحديد متجهة السرعة

$$\begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = C_2 \\ v_z(t) = -gt + C_3 \end{cases}$$

بالتكامل نحصل على

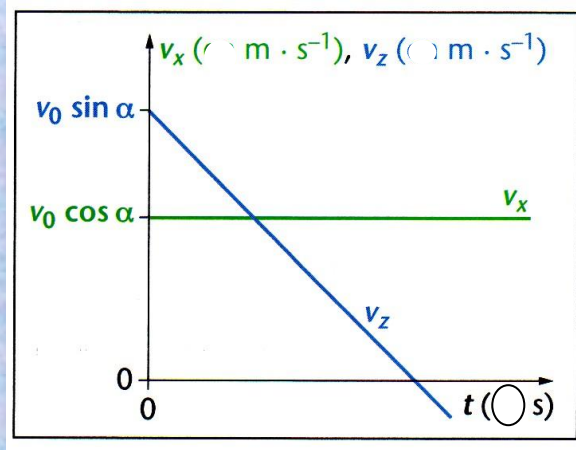
$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = -g \end{cases}$$

لتحديد قيم الثوابت نعتمد على الشروط البدئية

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_x(t_0) = C_1 = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t_0) = C_2 = 0 \\ v_z(t_0) = C_3 = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

إحداثيات متجهة السرعة عند كل لحظة هي :

$$\vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

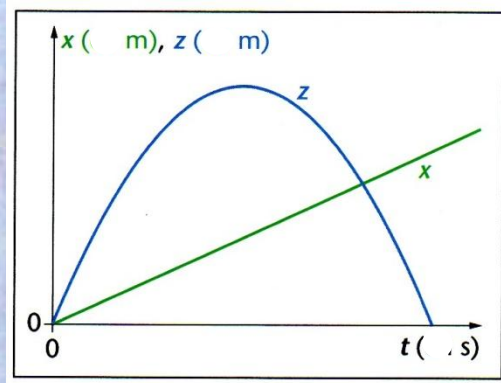


تحديد متجهة الموضع .

نحصل على إحداثيات متجهة الموضع بواسطة التكامل لإحداثيات متجهة السرعة :

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} x(t) = v_0 (\cos \alpha) t + C_4 \\ y(t) = C_5 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 (\sin \alpha) t + C_6 \end{cases} \quad \text{بالتكامل نجد} \quad \vec{v}(t) \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

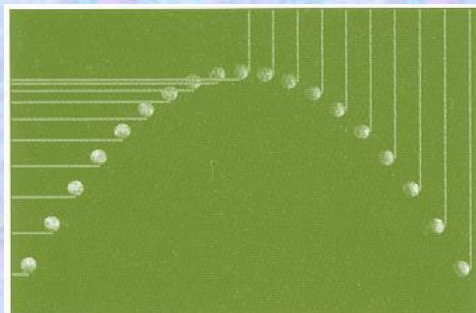
نحدد قيم الثوابت باعتماد الشروط البدئية : متجهة الموضع بدنيا ($t=0$) متجهة منعدمة ، و بذلك فإن الثوابت منعدمة ، و منه متجهة الموضع اللحظية تكتب :



$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} x(t) = v_0 (\cos \alpha) t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 (\sin \alpha) t \end{cases}$$

بما أن $y(t)=0$ ، فإن الحركة تتم في المستوى الرأسي (xOz) ، أي المستوى الرأسي الذي يضم متجهة السرعة البدئية $\vec{v}_0$.

حسب المحور الأفقي ، الحركة مستقيمة منتظمة .
حسب المحور الرأسي ، الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام .



معادلة المسار .
 بما أن الحركة توجد في المستوى (xOz) ، فإن المعادلة الديكارتية للمسار تأخذ الشكل z(x) : للحصول عليها ، نقصي الزمن t بين المعادلتين الزميتين x(t) و z(t) .

$$\begin{cases} x(t) = v_0 (\cos \alpha) t & (1) \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 (\sin \alpha) t & (2) \end{cases}$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

باعتقاد المعادلة (1) ، يمكن أن نعبر عن t بدلالة x :

ثم نعوض هذا التعبير في المعادلة (2) :

$$z(t) \rightarrow z(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 (\sin \alpha) \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)$$

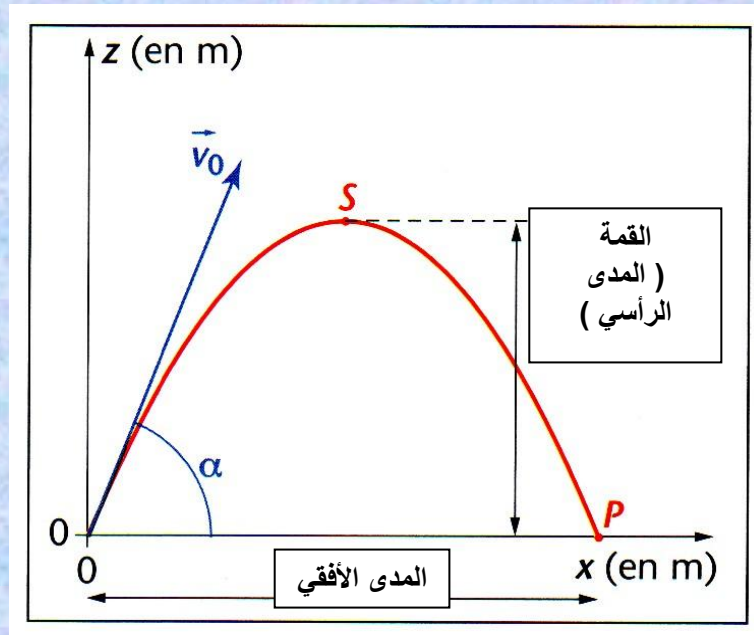
يعني

$$z(x) = -\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} x^2 + \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} x$$

و بالأخص

$$z(x) = -\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} x^2 + (\tan \alpha) x$$

z(x) دالة من الدرجة الثانية ، تمثيلها المبياني شلجم
 و هذا يتطابق مع الدراسة التجريبية



مميزات المسار .

* قمة المسار هي الارتفاع القصوي الذي تصل إليه القذيفة ، يوافق ارتفاع النقطة S . أحد طرق تحديد إحداثيات النقطة S تكمن في أن عند هذه النقطة متجهة السرعة تكون أفقية : الإحداثي $v_z(t_s)$ منعدم .

$$v_z(t_s) = -gt_s + v_0 \sin \alpha = 0$$

نستنتج لحظة المرور من النقطة S

$$t_s = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

و التي تمكن من الحصول على إحداثيات S باعتماد المعادلات الزمنية للحركة ،

$$\begin{cases} x(t_s) = v_0 (\cos \alpha) t_s = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g} \\ z(t_s) = -\frac{1}{2} g t_s^2 + v_0 (\sin \alpha) t_s = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{cases}$$

*المدى هي المسافة الفاصلة بين نقطة الانطلاق O و نقطة الوصول P التي تنتمي للمستوى الأفقي الذي يضم O .
عند النقطة P ، الإحداثي z للموضع ينعدم ، و حسب معادلة المسار

$$z_p = -\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} x_p^2 + (\tan \alpha) x_p = 0$$

$$x_p = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

بالنسبة لقيمة معينة ل v_0 ، نحصل على المدى القصوي عندما تكون $\sin 2\alpha = 1$ ، أي عندما تكون $\alpha = 45^\circ$.

قيمة كل من المدى و القمة تتعلق بالشروط البدئية :

