السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	نهاية دالة عددية	سلسلة 1

تمرين 1 : احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x \mapsto 1} 3x^2 - x + 3$	$\lim\limits_{x \mapsto \sqrt{2}} 2x^2 + \sqrt{2}\,x + 1$	$\lim\limits_{x \mapsto -1} (x+1)(x^2 + 4x - 3)$	$\lim\limits_{\substack{x \mapsto 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} + 5x$
$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{1}{x^2}$	$\lim\limits_{\substack{x \mapsto 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^3}$	$\lim\limits_{\substack{x \mapsto 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^3}$	$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{1}{x^3}$

تمرين 2 : احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^2$	$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^4$	$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^3 + 100$	$\lim\limits_{\substack{x \mapsto 1 \\ x<1}} \frac{x-1}{x^2-1}$
$im\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{1}{x^2 + 13}$	$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^2 + \frac{1}{x}$	$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} 6x^4$	$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} -3x^7$
$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{-3}{x^2}$	$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} 3\sqrt{x}$	$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{5}{\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (2x+1)^2$

تمرين 3 : احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x \mapsto 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x-1}$	$\lim\limits_{x \mapsto -1} \sqrt{2x^2 + 3}$	$\lim\limits_{x \mapsto 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$	$\lim\limits_{x \mapsto 2} \frac{\sqrt{x+2}}{x}$
$\lim\limits_{x \mapsto 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x}$	$\lim\limits_{x \mapsto 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$	$\lim\limits_{\substack{x \mapsto 0 \\ x>0}} \frac{\sqrt{x}}{x}$	$\lim\limits_{\substack{x \mapsto 1 \\ x<1}} \frac{x-1}{x^2-1}$
$\lim\limits_{x \mapsto -3} \frac{3x+1}{(x+2)^2}$	$\lim\limits_{x \mapsto 2} \frac{x-3}{x-2}$	$\lim\limits_{x \mapsto 1} \frac{3x}{1-x^2}$	$\lim\limits_{x \mapsto 1} \frac{7}{1-x} + \frac{2}{x+1}$

تمرين 4 : احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (5x^2 - 2x + 3)$	$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} (1 - x + 3x^2)$	$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (1-x)\,3x^2 + 3$	$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \lvert x^3 \rvert + x$
$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{5x^2 + x + 1}{x+2}$	$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{4x + 2x^3}{3x^3 + 2x^2 + 1}$	$im\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{2x^2 + x}{7x^3 + x + 1}$	$\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{-x^3 + 5x^2}{x^2+1} + \frac{x^2-1}{x}$

www.maja7math.com

Moutamadris.ma

السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	نهاية دالة عددية حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 :

$\lim\limits_{x\mapsto 1} 3x^2-x+3=3-1+3=5$

$\lim\limits_{x\mapsto \sqrt{2}} 2x^2+\sqrt{2}\,x+1=2\times 2+\sqrt{2}\times\sqrt{2}+1=7$

$\lim\limits_{x\mapsto -1}(x+1)(x^2+4x-3)=0\times(-6)=0$

$\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{5x+1}{x^2+2x}=\dfrac{6}{3}=2$

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x^3}=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}}\dfrac{1}{x^3}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x}+5x=+\infty$

$+\infty+0\to+\infty$

تمرين 2 :

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x^4=+\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x^3+100=-\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty}\dfrac{1}{x^2+13}=0$

$\left(\dfrac{1}{+\infty}\to 0\right)$

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x^2+\dfrac{1}{x}=+\infty$

$\left(\dfrac{1}{-\infty}\to 0\ ;\ +\infty+0\to+\infty\right)$

$\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} -3x^7=+\infty$

$(-3\times(-\infty)\to+\infty)$

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} 6x^4=+\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} 3\sqrt{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty}\dfrac{-3}{x^2}=0$

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty}(2x+1)^2=+\infty\quad(+\infty\times+\infty\to+\infty)$

$\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\dfrac{5}{\sqrt{x}}=0$

تمرين 3 : احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\mapsto 1}\frac{3x^2-2x-1}{x-1}=\lim_{x\mapsto 1}\frac{(x-1)(3x+1)}{x-1}=\lim_{x\mapsto 1}3x+1=4$$

بعد التعويض حصلنا على شكل غير محدد لذلك أجرينا القسمة الإقليدية لـ $3x^2-2x-1$ على $x-1$ فحصلنا على $3x+1$

$\lim\limits_{x\mapsto -1}\sqrt{2x^2+3}=\sqrt{5}$

$\lim\limits_{x\mapsto 2}\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}=\dfrac{\sqrt{4}}{2}=1$

$$\lim_{x\mapsto 2}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-4}=\lim_{x\mapsto 2}\frac{x^2(x-2)+x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\mapsto 2}\frac{(x-2)(x^2+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\mapsto 2}\frac{x^2+1}{x+2}=\frac{5}{4}$$

عندما نحص على شكل غير محدد نبحث عن التعميل و قد ننجز قسمة إقليدية من أجل ذلك

$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}\right)\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}{x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{(4-x)-(4+x)}{x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\mapsto 0}\frac{4-x-4-x}{x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{-2x}{x\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}$$

$$\lim_{x\mapsto 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{-2}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=\frac{-2}{2+2}=\frac{-1}{2}$$

استعملنا المرافق للتخلص من الشكل غير المحدد

Moutamadris.ma

$$\lim_{x\mapsto 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\mapsto 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\mapsto 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\mapsto 1}\sqrt{x}+1=2$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x\times\sqrt{x}}=\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}}\frac{x}{x\sqrt{x}}=\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\mapsto -3}\frac{3x+1}{(x+2)^2}=\frac{-9+1}{(-1)^2}=-8$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 2\\ x<2}}\frac{x-3}{x-2}=+\infty\ \left(\frac{-1}{0^-}\to+\infty\right)\quad ،\quad \lim_{\substack{x\mapsto 2\\ x>2}}\frac{x-3}{x-2}=-\infty\ \left(\frac{-1}{0^+}\to-\infty\right)$$

في هذا السؤال وجب علينا فصل النهاية إلى نهايتين لأننا نحتاج إشارة المقام حتى نحدد النهاية الصحيحة

$$\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}}\frac{3x}{1-x^2}=+\infty\ \left(\frac{3}{0^+}\to+\infty\right)\quad ،\quad \lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}}\frac{3x}{1-x^2}=-\infty\ \left(\frac{3}{0^-}\to-\infty\right)$$

رغم أننا في النهاية $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}}\frac{3x}{1-x^2}$ نحسب النهاية على اليمين، فذلك لا يعني أن $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}}1-x^2=0^+$ بل العكس

$\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}}1-x^2=0^-$ لأن من يحدد الإشارة هو التأطير ، بمعنى : $x>1\Rightarrow x^2>1\Rightarrow 1-x^2<0$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}}\frac{7}{1-x}+\frac{2}{x+1}=+\infty\ (+\infty+1\to+\infty)\quad ،\quad \lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}}\frac{7}{1-x}+\frac{2}{x+1}=-\infty\ (-\infty+1\to-\infty)$$

تمرين 4 :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}(5x^2-2x+3)=\lim_{x\mapsto+\infty}5x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty}(1-x+3x^2)=\lim_{x\mapsto-\infty}3x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}(1-x)(3x^2+3)=\lim_{x\mapsto+\infty}3x^2+3-3x^3-3x$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}(1-x)(3x^2+3)=\lim_{x\mapsto+\infty}-3x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty}|x^3|+x=\lim_{x\mapsto-\infty}-x^3+x=\lim_{x\mapsto-\infty}-x^3=+\infty$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{5x^2+x+1}{x+2}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{5x^2}{x}\lim_{x\mapsto-\infty}5x=-\infty$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{4x+2x^3}{3x^3+2x^2+1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2x^3}{3x^3}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2x^2+x}{7x^3+x+1}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2x^2}{7x^3}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2}{7x}=0$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-x^3+5x^2}{x^2+1}+\frac{x^2-1}{x}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x(-x^3+5x^2)+(x^2-1)(x^2+1)}{x(x^2+1)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-x^4+5x^3+x^4-1}{x(x^2+1)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{5x^3-1}{x^3+x}$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-x^3+5x^2}{x^2+1}+\frac{x^2-1}{x}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{5x^3}{x^3}=\lim_{x\mapsto+\infty}5=5$$

للتذكير : $\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty}a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty}a_nx^n$ و $\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}=\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$

Moutamadris.ma