السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية	سلسلة 1

تمرين 1 : اكتب الأعداد العقدية التالية على الشكل الجبري:

$z_1=(5i-1)(i+3)$ ، $z_2=(7i-1)^2$ ، $z_3=(i+2)^3$

$z_4=(3-i)^4$ ، $z_5=\frac{5}{2-i}+\frac{3-i}{2+i}$ ، $z_6=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{30}$

تمرين 2 : حل في C المعادلات :

$5z+7\bar{z}+4i-3=0$ ، $(1-\mathbf{i})z-3\mathbf{i}\bar{z}=1+4\mathbf{i}$ ، $z\bar{z}+3(z-\bar{z})=13+18\mathbf{i}$ ، $(z+2\bar{z})^2+1=0$

تمرين 3 : نعتبر العدد العقدي $j=\frac{-1}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) تحقق أن: $j^2+j+1=0$ ثم استنتج أن $j^3=1$

2) احسب المجموع: $S=1+j+j^2+j^3+...+j^{2014}$.

تمرين 4 : ليكن $z\in\mathbf{C}-\left\{\frac{-i}{2}\right\}$ حيث $|z|=1$ نضع: $u=\frac{z+2\mathbf{i}}{2z+\mathbf{i}}$.

بين أن: $|u|=1$

تمرين 5 : ليكن a و b عددين عقديين حيث $a\neq b$ و $|a|=|b|=1$.

بين أن: $\forall z\in\mathbf{C}\quad \frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b}\in\mathbf{i}\,IR$

تمرين 6 : a و b و c أعداد عقدية مختلفة مثنى مثنى.

1) بين جبريا أن: $|a-b|^2+|a-c|^2=|b-c|^2 \Leftrightarrow \frac{b-a}{c-a}\in\mathbf{i}\,IR$

2) أول النتيجة المحصل عليها هندسيا

تمرين 7 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.حدد طبيعة المجموعات التالية.

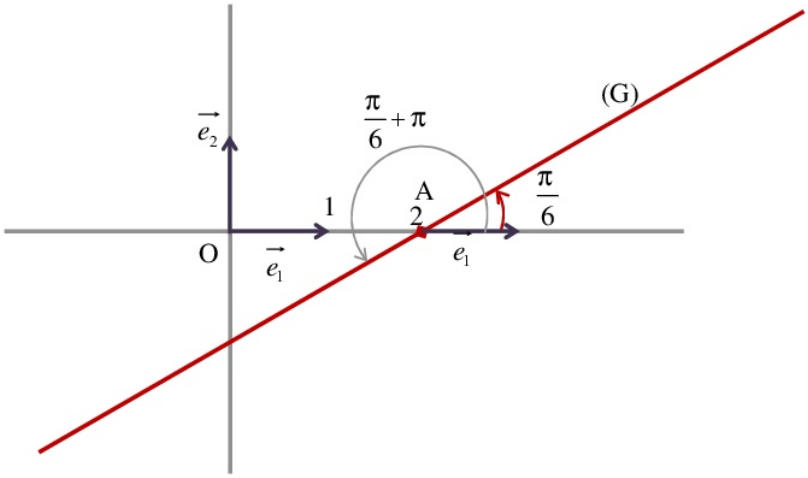
$E=\{M(z)/\ 5z+3\bar{z}+2-\mathbf{i}\in IR\}$ و $F=\{M(z)/\ |z-2\mathbf{i}+1|=|z+\mathbf{i}-3|\}$

$K=\{M(z)/\ (z+3\mathbf{i}-1)(\bar{z}+2)\in\mathbf{i}\,IR\}$ و $H=\left\{M(z)/\ \frac{z+2}{z}\in\mathbf{i}\,IR\right\}$ و $V=\left\{M(z)/\ \frac{\bar{z}+2}{z+2}\in IR\right\}$

رياضيات النجاح - www.naja7math.com
رياضيات النجـــــاح أ.سمير لخريسي
www.naja7math.com
Moutamadris.ma

$$G=\left\{M(z)\ /\ \arg(z-2i)^2\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\right\}=\left\{M(z)\ /\ 2\arg(z-2i)\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\right\}=\left\{M(z)\ /\ \arg(z-2i)\equiv\frac{\pi}{6}\ [\pi]\right\}$$

إذن باعتبار النقطة $A(2i)$ ، فإننا نستنتج أن G هي المستقيم المار من A (والمحروم منها) والذي يكون مع $\vec{e_1}$ الزاوية : $\frac{\pi}{6}$



تمرين 5 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ ، $j=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1

$$j=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\left[1;\frac{2\pi}{3}\right]\quad ،\quad \bar{j}=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\left[1;\frac{4\pi}{3}\right]$$

2

$A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ حيث a و b و c أعداد عقدية معلومة

المثلث ABC متساوي الأضلاع يعني : $AC=BC$ و $A\hat{C}B=\frac{\pi}{3}$

يعني : $AC=BC$ و $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أو $AC=BC$ و $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{-\pi}{3}[2\pi]$

يعني : $|c-a|=|c-b|$ و $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أو $|c-a|=|c-b|$ و $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)=\frac{-\pi}{3}[2\pi]$

يعني : $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(-\left(\frac{c-b}{a-c}\right)\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أو $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(-\left(\frac{c-b}{a-c}\right)\right)=\frac{-\pi}{3}[2\pi]$

يعني : $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right)-\pi=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أو $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right)-\pi=\frac{-\pi}{3}[2\pi]$

يعني : $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right)=\frac{4\pi}{3}[2\pi]$ أو $\left|\frac{c-b}{a-c}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{c-b}{a-c}\right)=\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

يعني : $\frac{c-b}{a-c}=j$ أو $\frac{c-b}{a-c}=\bar{j}$ ، يعني : $c-b=j(a-c)$ أو $c-b=\bar{j}(a-c)$

للتذكير ، يكون مثلث متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كانت إحدى العبارات التالية صحيحة :

1) جميع أضلاعه متقايسة 2) جميع زواياه متقايسة 3) يوجد ضلعان متقايسان و الزاوية المحصورة بينهما قياسها $60°$

$\arg(-z)=\arg(-1\times z)=\arg(-1)+\arg(z)=\pi+\arg(z)$

$\arg(-z)=\arg\left(\frac{z}{-1}\right)=\arg(z)-\arg(-1)=\arg(z)-\pi$

Moutamadris.ma

نعتبر في المستوى العقدي: $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ و $E(e)$ و $F(f)$ و $G(g)$ حيث a و b و c و e و f و g أعداد عقدية .

لدينا E مماثلة A بالنسبة لـ B إذن: A منتصف $[BE]$ منه: $a=\frac{e+b}{2}$ منه: $e=2a-b$

لدينا F مماثلة B بالنسبة لـ C إذن: B منتصف $[CF]$ منه: $b=\frac{f+c}{2}$ منه: $f=2b-c$

لدينا G مماثلة C بالنسبة لـ A إذن: C منتصف $[AG]$ منه: $c=\frac{g+a}{2}$ منه: $g=2c-a$

بما أن ABC مثلث متساوي الأضلاع فإن: $c-b=j(a-c)$ أو $c-b=\bar{j}(a-c)$

- إذا كان: $c-b=j(a-c)$ ، منه: $b=c-j(a-c)=(1+j)c-ja$

$$\frac{g-f}{e-g}=\frac{2c-a-2b+c}{2a-b-2c+a}=\frac{2(c-b)+(c-a)}{3a-3c-b+c}=\frac{2j(a-c)+(c-a)}{3(a-c)+(c-b)}=\frac{(a-c)(2j-1)}{3(a-c)+j(a-c)}$$

$$\frac{g-f}{e-g}=\frac{(a-c)(2j-1)}{(a-c)(3+j)}=\frac{2j-1}{3+j}$$

3

و حيث أن: $j^2+j+1=0$ (راجع التمرين 3 من السلسلة 1) فإن: $j(3+j)=3j+j^2=3j-j-1=2j-1$

إذن: $j=\frac{2j-1}{3+j}$ إذن: $j=\frac{g-f}{e-g}$

- إذا كان: $c-b=\bar{j}(a-c)$ ، منه: $b=c-j(a-c)=(1+\bar{j})c-\bar{j}a$

$$\frac{g-f}{e-g}=\frac{2c-a-2b+c}{2a-b-2c+a}=\frac{2(c-b)+(c-a)}{3a-3c-b+c}=\frac{2\bar{j}(a-c)+(c-a)}{3(a-c)+(c-b)}=\frac{(a-c)(2\bar{j}-1)}{3(a-c)+\bar{j}(a-c)}$$

$$\frac{g-f}{e-g}=\frac{(a-c)(2\bar{j}-1)}{(a-c)(3+\bar{j})}=\overline{\left(\frac{2j-1}{3+j}\right)}=\bar{j}$$

في جميع الحالات نجد أن: $\frac{g-f}{e-g}=j$ أو $\frac{g-f}{e-g}=\bar{j}$ ، بالتالي EFG هو أيضا مثلث متساوي الأضلاع.

التمرين رغم أنه يبدو صعبا لكنه مثال جيد لتوضيح أهمية الأعداد العقدية في حل كثير من المسائل الهندسية في أسطر قليلة، كما يوضح أهمية العدد j الذي أدرجنا بعض خواصه في تمرين سابق و التي من المستحسن حفظها و استعمالها عند الحاجة.

Moutamadris.ma

الأعداد العقدية

تمرين1

حدد الشكل الجبري ل z

أ- $z=\dfrac{2-3i}{4+5i}$ ب- $z=(1-i\sqrt{3})^3$ ج- $z=(1-i)^{12}$

الحل

ج-

$$z=(1-i)^{12}$$
$$=\left((1-i)^2\right)^6$$
$$=(-2i)^6$$
$$\boxed{z=-64}$$

تمرين2

حل في $\mathbb{C}$: أ- $3\overline{z}-2iz=1+2i$ ب- $3\overline{z}+5iz\in\mathbb{R}$

ج- $3\overline{z}+5iz\in i\mathbb{R}$ د- $1-(1+i)z+iz^2\in i\mathbb{R}$

الحل

نعتبر : $z=x+iy$

أ- $3\overline{z}-2iz=1+2i$

$$3\overline{z}-2iz=1+2i\Leftrightarrow(3x-2y)+(-2x-3y)i=1+2i$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=1\\-2x-3y=2\end{cases}$$

نجد : $z=-\dfrac{1}{13}-\dfrac{8}{13}i$

ب- $3\overline{z}+5iz\in\mathbb{R}$

$$3\overline{z}+5iz\in\mathbb{R}\Leftrightarrow((3x-5y)+(5x-3y)i)\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow 5x-3y=0$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{5}{3}x$$
$$\boxed{S=\left\{x+\frac{5}{3}xi\ /\ x\in\mathbb{R}\right\}}$$

هندسيا الحل هو المستقيم الذي معادلته : $y=\dfrac{5}{3}x$

ج- $3\overline{z}+5iz\in i\mathbb{R}$

$$3\overline{z}+5iz\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow((3x-5y)+(5x-3y)i)\in i\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow 3x-5y=0$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{3}{5}x$$
$$\boxed{S=\left\{x+\frac{3}{5}xi\ /\ x\in\mathbb{R}\right\}}$$

هندسيا الحل هو المستقيم الذي معادلته : $y=\dfrac{3}{5}x$

د- $1-(1+i)z+iz^2\in i\mathbb{R}$

$$1-(1+i)z+iz^2\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow(1-x+y-2xy)-i\left(x+y-x^2+y^2\right)\in i\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow 1-x+y-2xy=0$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{x-1}{2x-1}\ ;x\neq\frac{1}{2}$$
$$\boxed{z=x+\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)i}$$

هندسيا الحل هو الهذلول الذي معادلته : $y=\dfrac{x-1}{2x-1}$

مركزه : $\Omega\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ مقارباه : $x=\dfrac{1}{2}$ و $y=\dfrac{1}{2}$

تذكير :

- المنحنى الممثل للدالة $f(x)=ax^2+bx+c$ " $a\neq 0$ "

شلجم رأسه $\Omega\left(\dfrac{-b}{2a};f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$ و محوره المستقيم $x=\dfrac{-b}{2a}$

- المنحنى الممثل للدالة

Abouelouafa Lakhouaja
Moutamadris.ma

$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ " $ad-bc\neq 0\ ;\ x\neq -\dfrac{d}{c};c\neq 0$ "

هذلول رأسه $\Omega\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ و و مقارباه

المستقيم $x=-\dfrac{d}{c}$ و المستقيم $y=\dfrac{a}{c}$

تمرين3

لحق M هو Z : في كل حالة حدد مجموعة النقط $\mathbf{E}$ بحيث

أ- $|z-3+2i|=2$ ب- $|z-2|=|z+3-4i|$

ج- $|z-1|=2|z+1|$ د- $(z-3+2i)(\overline{z}-3-2i)=25$

هـ- $Argz\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ و- $Arg(z-2)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

ز- $Argz\equiv Arg(z+2i)[2\pi]$

الحل

أ- **تحديد :** $E=\{M\in(P)/|z-3+2i|=2\}$

نعتبر : $A(3;-2)$ إذن $Z_A=3-2i$

لدينا : $Z_M=Z$

$$E=\{M\in(P)/|z-3+2i|=2\}$$
$$=\{M\in(P)/|Z_M-Z_A|=2\}$$
$$=\{M\in(P)/AM=2\}$$

و منه : $\boxed{E=\mathscr{C}(A;2)}$

ب- **تحديد :** $E=\{M\in(P)/|z-2|=|z+3-4i|\}$

نعتبر : $A(2;0)$ إذن $Z_A=2$

و : $B(-3;4)$ إذن $Z_B=-3+4i$

لدينا : $Z_M=Z$

$$E=\{M\in(P)/|z-2|=|z+3-4i|\}$$
$$=\{M\in(P)/|Z_M-Z_A|=|Z_M-Z_B|\}$$
$$=\{M\in(P)/AM=BM\}$$

و منه : $\boxed{E=[AB]\ \text{واسط}}$

ج- $|z-1|=2|z+1|$

$$|z-1|=2|z+1|\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=4(x+1)^2+4y^2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+10x+3=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}$$

و منه : $\boxed{E=\mathscr{C}\left(A\left(\frac{5}{3};0\right);\frac{4}{3}\right)}$

د- $(z-3+2i)(\overline{z}-3-2i)=25$

نعتبر : $A(3;-2)$ إذن $Z_A=3-2i$

$$E=\{M\in(P)/(z-3+2i)(\overline{z}-3-2i)=25\}$$
$$=\{M\in(P)/(Z_M-Z_A)=(\overline{Z_M}-\overline{Z_A})\}$$
$$E=\{M\in(P)/(Z_M-Z_A)\overline{(Z_M-Z_A)}=25\}$$
$$=\{M\in(P)/|Z_M-Z_A|^2=25\}$$
$$=\{M\in(P)/|Z_M-Z_A|=5\}$$
$$=\{M\in(P)/AM=5\}$$

و منه : $\boxed{E=\mathscr{C}(A;5)}$

هـ- $Argz\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

تحديد : $E=\left\{M\in(P)/Argz\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$

نعتبر : $A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ إذن $Argz_A\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

لدينا : $Z_M=Z$

$$E=\left\{M\in(P)/Argz\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$$
$$=\{M\in(P)/ArgZ_M\equiv ArgZ_A[2\pi]\}$$
$$=\{M\in(P)/ArgZ_M-ArgZ_A\equiv 0[2\pi]\}$$
$$=\left\{M\in(P)/Arg\left(\frac{Z_M}{Z_A}\right)\equiv 0[2\pi]\right\}$$
$$=\left\{M\in(P)/\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)\equiv 0[2\pi]\right\}$$
$$=\{M\in(P)/M\in[OA[-\{O\}\}$$

و منه : $\boxed{E=[OA)-\{O\}}$

Moutamadris.ma Abouelouafa Lakhouaja

و- $Arg(z-2)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

نعتبر : $A(1;1)$ إذن $Argz_A\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

و : $B(2;0)$ إذن $Z_B=2$

لدينا : $Z_M=Z$

$$E=\left\{M\in(P)/Arg(z-2)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$$
$$=\left\{M\in(P)/Arg(Z_M-Z_B)\equiv ArgZ_A[2\pi]\right\}$$
$$=\left\{M\in(P)/Arg(Z_M-Z_B)-ArgZ_A\equiv 0[2\pi]\right\}$$
$$E=\left\{M\in(P)/Arg\left(\frac{Z_M-Z_B}{Z_A-Z_0}\right)\equiv 0[2\pi]\right\}$$
$$=\left\{M\in(P)/\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BM}\right)\equiv 0[2\pi]\right\}$$

M تنتمي إلى نصف المستقيم : $D\left(B,\overrightarrow{OA}\right)$ بحيث $M\neq B$

نعتبر : C بحيث : $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$ إذن : $C(3;1)$

و منه :

$$\boxed{E=[BC)-\{B\}}$$

ز- $Argz\equiv Arg(z+2i)[2\pi]$

نعتبر : $A(0;-2)$ إذن $Z_B=-2i$

لدينا : $Z_M=Z$

$$E=\{M\in(P)/Argz\equiv Arg(z+2i)[2\pi]\}$$
$$=\{M\in(P)/ArgZ_M\equiv Arg(Z_M-Z_A)[2\pi]\}$$
$$=\left\{M\in(P)/Arg\left(\frac{Z_M}{Z_M-Z_A}\right)\equiv 0[2\pi]\right\}$$
$$E=\left\{M\in(P)/\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{OM}\right)\equiv 0[2\pi]\right\}$$
$$M\in(AO)-[AO]$$

و منه :

$$\boxed{E=(AO)-[AO]}$$

تمرين4

حدد الشكل المثلثي ل : Z

أ- $Z=\frac{2+2\sqrt{3}i}{3-3i}$

ب- $Z=\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ ؛ $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

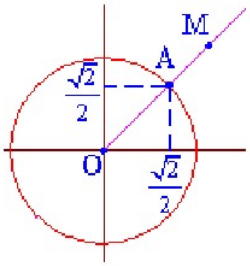
ج - $Z=\frac{\left[2;\frac{\pi}{3}\right]\left[5;-\frac{\pi}{4}\right]}{\left[1;\frac{\pi}{2}\right]}$

الحل

أ- $Z=\frac{2+2\sqrt{3}i}{3-3i}=\frac{\left[4;\frac{\pi}{3}\right]}{\left[3\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]}$

$$\boxed{Z=\left[\frac{2\sqrt{2}}{3};\frac{7\pi}{12}\right]}$$

ب-



$$Z=\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}$$
$$Z=\frac{[1;\theta]}{[1;-\theta]}$$
$$\boxed{Z=[1;2\theta]}$$

ج - $Z=\frac{\left[2;\frac{\pi}{3}\right]\left[5;-\frac{\pi}{4}\right]}{\left[1;\frac{\pi}{2}\right]}$

$$\boxed{Z=\left[10;-\frac{5\pi}{12}\right]}$$

Abouelouafa Lakhouaja
Moutamadris.ma

تمرين5

$L(3;4)$; $F(2;1)$; $A(4;3)$

اعط قياسا ل : $(\widehat{\vec{AF};\vec{AL}})$

استنتج : طبيعة المثلث AFL

الحل

$$(\widehat{\vec{AF};\vec{AL}}) \equiv Arg\frac{Z_L - Z_A}{Z_F - Z_A}[2\pi]$$

$$\frac{Z_L - Z_A}{Z_F - Z_A} = \frac{-1+i}{-2-2}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right]}{\left[2\sqrt{2};\frac{-3\pi}{4}\right]}$$

$$\frac{Z_L - Z_A}{Z_F - Z_A} = \left[\frac{1}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$$

إذن : $(\widehat{\vec{AF};\vec{AL}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

تمرين6

$C;B;A$ نقط من المستوى العقدي ألحقها

$Z_c = 3$; $Z_B = 2i$; $Z_A = 6-2i$

بين أن : $C;B;A$ نقط مستقيمية

الحل

$$(\widehat{\vec{CA};\vec{CB}}) \equiv Arg\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}[2\pi]$$

$$\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = \frac{-3+2i}{3-2i}$$

$$\boxed{\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = -1}$$

بما أن : $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} \in \mathbb{R}$

فإن : $C;B;A$ نقط مستقيمية

تمرين7

$(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

E ;F ;G ثلاثة نقط ألحقها $Z_F = 6$ ، $Z_E = 6 - i\,2\sqrt{3}$

$Z_G = -i\,2\sqrt{3}$

1- احسب FG

2- اعط قياسا ل : $(\widehat{\vec{e_1};\vec{OE}})$ ، $(\widehat{\vec{EF};\vec{EG}})$

3- $\vec{u}(2;2)$ لحقها $Z_{\vec{u}}$ ، $\vec{v}(0;\sqrt{2})$ لحقها $Z_{\vec{v}}$

اعط قياسا ل $\overline{(\vec{u};\vec{v})}$

الحل

1- $\boxed{GF = 4\sqrt{3}}$

2- $(\widehat{\vec{e_1};\vec{OE}}) \equiv Arg Z_E\,[2\pi]$

$Z_E = \left[4\sqrt{3};-\frac{\pi}{6}\right]$

إذن: $\boxed{(\widehat{\vec{e_1};\vec{OE}}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]}$

$$(\widehat{\vec{EF};\vec{EG}}) \equiv Arg\frac{Z_G - Z_E}{Z_F - Z_E}[2\pi]$$

$$\frac{Z_G - Z_E}{Z_F - Z_E} = \sqrt{3}i = \left[\sqrt{3};\frac{\pi}{2}\right]$$

إذن : $\boxed{(\widehat{\vec{EF};\vec{EG}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]}$

3- $\overline{(\vec{u};\vec{v})} \equiv Arg\frac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}}[2\pi]$

$$\frac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}} = \frac{\sqrt{2}}{2+2i} = \left[1;-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\boxed{\overline{(\vec{u};\vec{v})} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]}$$

تمرين8

اكتب بدلالة : $\cos\theta$ و $\sin\theta$ ما يلي :

1- $\cos 5\theta$ 2- $\sin 5\theta$

الحل

$$\cos 5\theta + i\sin 5\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^5$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - \cos^3\theta\sin^2\theta + \cos\theta\sin^4\theta\\ \sin 5\theta &= \cos^4\theta\sin\theta - \cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\end{aligned}}$$

تمرين9

خطط ما يلي :

1- $A = \cos^8 x\sin x$ 2- $B = 2^{2n}\cos^{2n} x$

الحل

1- $A = \cos^7 x\sin^2 x$

Abouelouafa Lakhouaja
Moutamadris.ma

$$A=\cos^8 x\sin x$$
$$=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^8\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$$
$$=\frac{1}{2^9 i}\sum_{k=0}^{8}C_8^k e^{ikx}e^{-i(8-k)x}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$$
$$=\frac{1}{2^9 i}\sum_{k=0}^{8}C_8^k e^{i(2k-8)x}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$$
$$=\frac{1}{2^9 i}\left(\sum_{k=0}^{8}C_8^k e^{i(2k-7)x}-\sum_{k=0}^{8}C_8^k e^{i(2k-9)x}\right)$$
$$=\frac{2i}{2^9 i}\sum_{k=0}^{8}C_8^k\sin\left((2k-7)x\right)$$
$$\boxed{A=\frac{1}{2^8}\sum_{k=0}^{8}C_8^k\sin\left((2k-7)x\right)}$$

-2 $B=2^{2n}\cos^{2n}x$

$$B=2^{2n}\cos^{2n}x$$
$$=2^{2n}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2n}$$
$$=\sum_{k=0}^{2n}C_n^k e^{ikx}e^{-i(2n-k)x}$$
$$=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^k e^{i(2k-2n)x}$$
$$B=\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^k e^{i(2k-2n)x}+\sum_{k=n+1}^{2n}C_{2n}^k e^{i(2k-2n)x}+C_{2n}^n$$

نعوض k ب $2n-k$

$$B=\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^k e^{i(2k-2n)x}+\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{2n-k}e^{-i(2k-2n)x}+C_{2n}^n$$
$$\boxed{B=\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^k\cos\left(2k-2n\right)+C_{2n}^n}$$

تمرين10

$$a=-\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$

أ - حدد الشكل الأسي والجبري ل a

ب- استنتج $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$

الحل

أ - تحديد الشكل الأسي :

$$a=-\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$
$$a=e^{-i\pi}\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$$
$$=e^{i\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\pi}$$
$$\boxed{a=e^{-i\frac{11\pi}{12}}}$$

- تحديد الشكل الجبري:

$$a=-\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$
$$=-\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{4}$$
$$=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$$
$$\boxed{a=\frac{-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}+i\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}}$$

ب- من أ :

$$\cos\frac{-11\pi}{12}=-\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}$$
$$\sin\frac{-11\pi}{12}=\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}$$

إذن $\boxed{\cos\frac{11\pi}{12}=-\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}}$ $\boxed{\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}}$

تمرين11

حدد الشكل المثلثي لحلول المعادلة : $z^4=8(1-i\sqrt{3})$

الحل

أ- تحديد الشكل الأسي لحلول المعادلة (E)

$$z^4=8(1+i\sqrt{3})$$
$$\boxed{z^4=\left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^4}$$

و منه : $Z=2e^{i\frac{\pi}{12}}$ أو $Z=-2e^{i\frac{\pi}{12}}$

أو $Z=2ie^{i\frac{\pi}{12}}$ أو $Z=-2ie^{i\frac{\pi}{12}}$

إذن : : $Z=2e^{i\frac{\pi}{12}}$ أو $Z=2e^{-i\pi}e^{i\frac{\pi}{12}}$

أو $Z=2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ أو $Z=2e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$

و منه : $\boxed{Z=2e^{i\frac{\pi}{12}}}$ أو $\boxed{Z=2e^{-i\frac{11\pi}{12}}}$

أو $\boxed{Z=2e^{i\frac{7\pi}{12}}}$ أو $\boxed{Z=2e^{-i\frac{5\pi}{12}}}$

تمرين12

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

1- $5Z^2-3Z+1=0$

2- $Z^2-(3+i)Z+2=0$

3- $iZ^2-(3-i)Z-2i=0$

Abouelouafa Lakhouaja
Moutamadris.ma

$$Z^2-(2-i)Z-\frac{5}{2}i=0$$ **-4**

الحل

$$5Z^2-3Z+1=0$$ **-1**

$$\Delta'=-11=\left(i\sqrt{11}\right)^2$$

$$z=\frac{3-\sqrt{11}i}{10} \quad \text{أو} \quad z=\frac{3+\sqrt{11}i}{10}$$

$$S=\left\{\frac{3+\sqrt{11}i}{10};\frac{3-\sqrt{11}i}{10}\right\}$$

$$Z^2-(3+i)Z+2=0$$ **-2**

$$\Delta=6i=\left(\sqrt{3}(1+i)\right)^2$$

$$z=\frac{(3+i)-\sqrt{3}(1+i)}{2} \text{ أو } z=\frac{(3+i)+\sqrt{3}(1+i)}{2}$$

$$z=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i}{2} \text{ أو } z=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2}$$

$$S=\left\{\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2};\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i}{2}\right\}$$

$$iZ^2-(3-i)Z-2i=0$$ **-3**

$$\Delta=-6i=\left(\sqrt{3}(1-i)\right)^2$$

$$z=\frac{(3-i)-\sqrt{3}(1-i)}{2i} \text{ أو } z=\frac{(3-i)+\sqrt{3}(1-i)}{2i}$$

$$z=\frac{-\left(1+\sqrt{3}\right)-\left(3+\sqrt{3}\right)i}{2} \text{ أو } z=\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)+\left(-3+\sqrt{3}\right)i}{2}$$

$$S=\left\{\frac{-\left(1+\sqrt{3}\right)-\left(3+\sqrt{3}\right)i}{2};\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)+\left(-3+\sqrt{3}\right)i}{2}\right\}$$

$$Z^2-(2-i)Z-\frac{5}{2}i=0$$ **-4**

$$\Delta=3+6i$$

نعتبر : $\Delta=\delta^2\ ;\ \delta=a+ib$

إذن : $|\Delta|=|\delta|^2$ و منه : $a^2+b^2=3\sqrt{5}$

$$3+6i=\left(a^2-b^2\right)+2abi$$

إذن : $\begin{cases}a^2-b^2=3\\ab=3\\a^2+b^2=3\sqrt{5}\end{cases}$

$$\begin{cases}a^2=\frac{3\sqrt{5}+3}{2}\\ab=3\\b^2=\frac{3\sqrt{5}-3}{2}\end{cases}$$

و منه : $\begin{cases}a=\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}}\\b=\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}}\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=-\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}}\\b=-\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}}\end{cases}$

إذن : $\delta=\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}}+i\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}}$

$$z=\frac{(2-i)+\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}}+i\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}}\right)}{2}$$

أو

$$z=\frac{(2-i)-\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}}+i\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}}\right)}{2}$$

إذن :

$$z=\frac{\left(2+\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}}\right)+\left(-1+\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}}\right)i}{2}$$

أو

$$z=\frac{\left(2-\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}}\right)+\left(-1-\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}}\right)i}{2}$$

تمرين 13

$$P(Z)=Z^3-(16-i)Z^2+(89-16i)Z+89i$$

أ- بين أن $P(Z)=0$ تقبل حلا تخيلا صرفا z_0 يجب تحديده

ب- حل في $\mathbb{C}$: $P(Z)=0$

الحل

أ-لنبين أن $P(Z)=0$ تقبل حلا تخيلا صرفا

نعتبر : $z_0=ib$

$$P(z_0)=0\Leftrightarrow(ib)^3-(16-i)(ib)^2+(89-16i)ib+89i=0$$

$$\Leftrightarrow 16b^2+16b+i\left(-b^3-b^2+89b+89\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}16b^2+16b=0\\-b^3-b^2+89b+89=0\end{cases}$$

$$P(z_0)=0\Leftrightarrow b=-1$$

و منه : $P(Z)=0$ تقبل حلا تخيلا صرفا $z_0=-i$

ب- حل المعادلة $P(Z)=0$ في $\mathbb{C}$:

بما أن : $-i$ جذر ل $P(Z)$ فإن :

$$P(Z)=(z+i)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$$

Abouelouafa Lakhouaja
Moutamadris.ma

$$P(Z)=z^3+(i+\alpha)z^2+(\alpha i+\beta)z+\beta i$$

و بما أن :

$$P(Z)=Z^3-(16-i)Z^2+(89-16i)Z+89i$$

فإن : $\boxed{\alpha=-16}$ و $\boxed{\beta=89}$

و منه : $P(Z)=(z+i)\left(z^2-16z+89\right)$

حل المعادلة : $z^2-16z+89=0$

نجد : $\Delta=-100$ $z=8-5i$ او $z=8+5i$

و منه : $\boxed{z=8-5i}$ او $\boxed{z=8+5i}$ أو

$$\boxed{P(Z)=0\Leftrightarrow z=-i}$$

تمرين 14

حل في $\mathbb{C}$:

1- $(E_1):z^9+\frac{1}{\overline{z}^3}=0$

2- $(E_2):z^n=\overline{z}\ ;\ n\geq 2$

الحل

1- $(E_1):z^9+\frac{1}{\overline{z}^3}=0$

لدينا : $z\neq 0$ نعتبر : $z=re^{i\theta}$

$$(E_1)\Leftrightarrow z^9+\frac{1}{\overline{z}^3}=0$$

$$\Leftrightarrow r^9e^{i9\theta}=\frac{e^{i\pi}}{r^3e^{-i3\theta}}$$

$$\Leftrightarrow r^{12}e^{i6\theta}=e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow r^{12}=1\ ;\ 6\theta\equiv\pi[2k\pi]\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r=1\ ;\ \theta=\frac{(2k+1)\pi}{6}\quad k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

$$(E_1)\Leftrightarrow z=e^{\frac{(2k+1)\pi}{6}i}\quad k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

$$\boxed{z\in\left\{e^{\frac{2k\pi}{5}}\ /\ k\in\{0,1,2,3,4\}\right\}}$$

2- $(E_2):z^n=\overline{z}\ ;\ n\geq 2$

لدينا : $z=0$ تحقق (E_2)

إذا كان : $z\neq 0$ نعتبر : $z=re^{i\theta}$

$$(E_2)\Leftrightarrow z^n=\overline{z}$$

$$\Leftrightarrow r^ne^{in\theta}=re^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow r^{n-1}e^{i(n+1)\theta}=1$$

$$\Leftrightarrow r^{n-1}=1\ ;\ e^{i(n+1)\theta}=1$$

$$\Leftrightarrow r=1\ ;\ \theta\equiv\frac{2k\pi}{n+1}\quad k\in\{0;1;\cdots;n\}$$

$$(E_2)\Leftrightarrow z=e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}\quad k\in\{0;1;\cdots;n\}$$

$$\boxed{z\in\left\{e^{\frac{2k\pi}{n+1}}\ /\ k\in\{0;1;\cdots;n\}\right\}\cup\{0\}}$$

تمرين15

حدد الكتابة الجبرية ل $Z_{A'}$ في كل حالة $Z_A=7+8i$

أ- A' صورة A بالإزاحة t التي متجهتها $\vec{u}$:

$Z_{\vec{u}}=-3+10i$

ب- A' صورة A التحاكي h الذي مركزه : Ω ونسبته $\frac{3}{7}$

$Z_\Omega=-3+7i$

ج- A' صورة A الدوران r الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$Z_\Omega=-3+7i$

الحل

أ-

$$t_{\vec{u}}(A)=A'\Leftrightarrow z_{A'}=z_A+z_{\vec{u}}$$

$$\Leftrightarrow z_{A'}=(7+8i)+(-3+10i)$$

$$\boxed{t_{\vec{u}}(A)=A'\Leftrightarrow z_{A'}=4+18i}$$

ب-

$$h_{(\Omega;k)}(A)=A'\Leftrightarrow z_{A'}=kz_A+z_\Omega(1-k)$$

$$\Leftrightarrow z_{A'}=\frac{3}{7}(7+8i)+(-3+7i)\left(1-\frac{3}{7}\right)$$

$$\boxed{h_{(\Omega;k)}(A)=A'\Leftrightarrow z_{A'}=\frac{9}{7}+\frac{52}{7}i}$$

ج-

$$r(z_A)=z_{A'}\Leftrightarrow z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_A-z_\Omega)+z_\Omega$$

$$r(z_A)=z_{A'}\Leftrightarrow z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{3}}((7+8i)-(-3+7i))+(-3+7i)$$

$$\boxed{r(z_A)=z_{A'}\Leftrightarrow z_{A'}=\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{15}{2}+5\sqrt{3}\right)i}$$

تمرين16

φ تحويل بحيث : $\varphi(z)=z'$

حدد φ في كل حالة

1- $z'=z-5+2i$ **2-** $z'=3z-2+5i$

3- $z'=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-2+3i$

4- $z'=\left(\sqrt{3}-i\right)z+1-3i$

الحل

$z'=az+b$

1- $z'=z-5+2i$

φ إزاحة متجهتها $\vec{u}(-5+2i)$

2- $z'=3z-2+5i$

Abouelouafa Lakhouaja
Moutamadris.ma

φ تحاك مركزه $\Omega(2-5i)$ ونسبته 3

3- $z' = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-2+3i$

$$\frac{b}{1-a} = \frac{-2+3i}{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

φ دوران مركزه $\Omega\left(\frac{-2+3i}{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)$ و قياس زاويته $\frac{2\pi}{3}$

4- $z' = \left(\sqrt{3}-i\right)z+1-3i$

$$|a|=2 \quad \frac{b}{1-a} = \frac{1-3i}{\left(1-\sqrt{3}\right)+i}$$

حيث : $\varphi = r\circ h = h\circ r$

h هو التحاكي الذي مركزه $\Omega\left(\frac{1-3i}{\left(1-\sqrt{3}\right)+i}\right)$ ونسبته 2

و r هو الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ و قياس زاويته $-\frac{\pi}{6}$

تمرين17

$\theta\in[0;\pi]$; $(E): z^2+2(1-\cos\theta)z+2(1-\cos\theta)=0$

حدد الكتابة الجبرية والأسية ل $z_2 ; z_1$ حلي المعادلة (E)

الحل

$\theta\in[0;\pi]$; $(E): z^2+2(1-\cos\theta)z+2(1-\cos\theta)=0$

$$\Delta' = (1-\cos\theta)^2-2(1-\cos\theta)$$

$$\Delta' = -\sin^2\theta$$

بما أن : $\theta\in[0;\pi]$ فإن : $\sin\theta\geq 0$

إذن : $\Delta' = (i\sin\theta)^2$

$$z_2 = (-1+\cos\theta)-i\sin\theta \; ; z_1 = (-1+\cos\theta)+i\sin\theta$$

$$z_2 = -1+e^{-i\theta} \; ; z_1 = -1+e^{+i\theta}$$

$$z_2 = e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(-e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) ; z_1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$z_2 = -2i\sin\theta e^{-i\frac{\theta}{2}} \; ; z_1 = 2i\sin\theta e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\boxed{z_2 = 2\sin\theta e^{\left(-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)i}} \qquad \boxed{z_1 = 2\sin\theta e^{\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)i}}$$

تمرين18

بين أن : $y\in\mathbb{R}$; $Arg(1+iy)\equiv\arctan(y)[\pi]$

الحل

نعتبر : $1+iy = re^{i\theta}$

$$1+iy = \sqrt{1+y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}i\right)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \; ; \; \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

إذن : $\tan\theta = y \Leftrightarrow \tan\theta = \tan(\arctan y)$

$$\Leftrightarrow \theta \equiv \arctan y \; [\pi]$$

و منه : $\boxed{Arg(1+iy)\equiv\arctan(y)[\pi]}$

تمرين 19

$$\mathbb{U} = \{z\in\mathbb{C} / |z|=1\}$$

1- بين أن : $z\neq 1 ; i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\in\mathbb{R}$

2- بين أن : $\forall z\in\mathbb{U}-\{1\} ; \forall z'\in\mathbb{C}; \left|\frac{z-z'}{1-z\overline{z'}}\right|=1 \quad z\neq z'$

3- بين أن : $\forall(z,z')\in\mathbb{U}^2 \; ; \; \frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}$

4- حدد معيار وعمدة : $z\in\mathbb{U};(z\neq 1)\ z-1; \ (z\neq -1)\ z+1$

5- استنتج معيار وعمدة : $z\in\mathbb{U};(z\neq 1;z\neq -1)\ \frac{z-1}{z+1}$

6- حدد معيار وعمدة

$(z,z')\in\mathbb{U}^2 \; ; \; (z\neq z')\ z-z' \; ; \; (z\neq -z')\ z+z'$

الحل

$$\mathbb{U} = \{z\in\mathbb{C} / |z|=1\}$$

بما أن : $|z|=1$

فإن : $z\overline{z}=1$

1- لنبين أن : $z\neq 1 ; i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\in\mathbb{R}$

$$\overline{\left(i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right)} = -i\left(\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}\right)$$

$$= -i\left(\frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}\right)$$

$$= -i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

$$\boxed{\overline{\left(i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right)} = i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

إذن : $\boxed{i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\in\mathbb{R}}$

Abouelouafa Lakhouaja
Moutamadris.ma

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 :

$z_1=(5i-1)(i+3)$

$z_1=5i^2+15i-i-3$

$z_1=-5+14i-3$

$z_1=-8+14i$

$z_2=(7i-1)^2$

$z_2=(7i)^2-14i+1$

$z_2-49-14i+1$

$z_2=-48-14i$

$z_3=(i+2)^3$

$z_3=i^3+3\times i^2\times 2+3\times i\times 2^2+2^3$

$z_3=-i-6+12i+8$

$z_3=2+11i$

$z_4=(3-i)^4$

$z_4=\left[(3-i)^2\right]^2$

$z_4=(9-6i+i^2)^2$

$z_4=(9-6i-1)^2$

$z_4=(8-6i)^2$

$z_4=64-96i+(6i)^2$

$z_4=64-96i-36$

$z_4=28-96i$

$z_5=\dfrac{5}{2-i}+\dfrac{3-i}{2+i}$

$z_5=\dfrac{5(2+i)}{2^2-i^2}+\dfrac{(3-i)(2-i)}{2^2-i^2}$

$z_5=\dfrac{10+5i}{4+1}+\dfrac{6-3i-2i+i^2}{4+1}$

$z_5=\dfrac{10+5i+6-5i-1}{5}=\dfrac{15}{5}=3$

$z_6=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{30}$

$z_6=\left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^{15}$

$z_6=\left(\dfrac{2}{4}+i-\dfrac{2}{4}\right)^{15}$

$z_6=i^{15}=\left(i^2\right)^7\times i=-i$

تمرين 2 :

بوضع $z=x+iy$ نجد :

$5z+7\bar{z}+4i-3=0$

$5(x+iy)+7(x-iy)+4i-3=0$

$5x+5iy+7x-7iy+4i-3=0$

$12x-2iy=3-4i$

منه : $\begin{cases}12x=3\\-2y=-4\end{cases}$ منه : $\begin{cases}x=\dfrac{1}{4}\\y=2\end{cases}$ منه : $z=\dfrac{1}{4}+2i$ بالتالي : $S=\left\{\dfrac{1}{4}+2i\right\}$

بوضع $z=x+iy$ $(x,y)\in IR^2$ نجد :

$(1-i)z-3i\bar{z}=1+4i$

$(1-i)(x+iy)-3i(x-iy)=1+4i$

$x+iy-ix+y-3ix-3y=1+4i$

$(x-2y)+(y-4x)i=1+4i$

منه : $\begin{cases}x-2y=1\\-4x+y=4\end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix}1&-2\\-4&1\end{vmatrix}=1-8=-7$ ، $\Delta_x=\begin{vmatrix}1&-2\\4&1\end{vmatrix}=1+8=9$ ، $\Delta_y=\begin{vmatrix}1&1\\-4&4\end{vmatrix}=4+4=8$)

منه : $\begin{cases}x=\dfrac{-9}{7}\\y=\dfrac{-8}{7}\end{cases}$ منه : $z=\dfrac{-9}{7}-\dfrac{8}{7}i$ بالتالي : $S=\left\{\dfrac{-9}{7}-\dfrac{8}{7}i\right\}$

بوضع $z=x+iy$ $(x,y)\in IR^2$ نجد :

$z\bar{z}+3(z-\bar{z})=13+18i$

$x^2+y^2+3(2iy)=13+18i$

منه : $\begin{cases}x^2+y^2=13\\6y=18\end{cases}$ منه : $\begin{cases}y=3\\x^2=4\end{cases}$

منه : $\begin{cases}y=3\\x=2\end{cases}$ أو $\begin{cases}y=3\\x=-2\end{cases}$ بالتالي : $S=\{2+3i\ ;-2+3i\}$

لدينا $(z+2\bar{z})^2+1=0\Leftrightarrow(z+2\bar{z})^2-i^2=0\Leftrightarrow(z+2\bar{z}+i)(z+2\bar{z}-i)=0$ منه : $z+2\bar{z}+i=0$ أو $z+2\bar{z}-i=0$

www.naja7math.com - رياضيات الناجح
Moutamadris.ma

2- لنبين أن : $\forall z\in\mathbb{U}-\{1\}\ ;\forall z'\in\mathbb{C};\ z\neq z'\ ;\left|\dfrac{z-z'}{1-\overline{z}z'}\right|=1$

$$\left|\frac{z-z'}{1-\overline{z}z'}\right|=\left|\frac{z-z'}{1-\frac{1}{z}z'}\right|$$
$$=|z|\left|\frac{z-z'}{z-z'}\right|$$
$$\left|\frac{z-z'}{1-\overline{z}z'}\right|=|z|$$

إذن :
$$\boxed{\left|\frac{z-z'}{1-\overline{z}z'}\right|=1}$$

3- لنبين أن : $\forall(z,z')\in\mathbb{U}^2\ ;\ \dfrac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}$

$$\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)}=\frac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{z}\overline{z'}}=\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{z'}}{1-\frac{1}{zz'}}=\frac{z+z'}{1+zz'}$$

إذن :
$$\boxed{\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}}$$

4- تحديد معيار وعمدة : $z\in\mathbb{U};(z\neq1)\ z-1;\ (z\neq-1)\ z+1$

نعتبر : $z=e^{i\theta}$

$$z+1=e^{i\theta}+1$$
$$=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$\boxed{z+1=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

إذا كان : $\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ فإن : $\boxed{z+1=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}$

إذا كان : $\cos\dfrac{\theta}{2}<0$ فإن : $\boxed{z+1=\left(-2\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}}$

$$z-1=e^{i\theta}+1$$
$$=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$\boxed{z-1=\left(2i\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

إذا كان : $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$ فإن : $\boxed{z+1=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}}$

إذا كان : $\sin\dfrac{\theta}{2}<0$ فإن : $\boxed{z+1=\left(-2\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}}$

5- معيار وعمدة : $z\in\mathbb{U};(z\neq1;z\neq-1)\ \dfrac{z-1}{z+1}$

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{\left(2i\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}$$
$$\boxed{\frac{z-1}{z+1}=i\tan\frac{\theta}{2}e^{i\theta}}$$

إذا كان : $\tan\dfrac{\theta}{2}>0$ فإن : $\boxed{\frac{z-1}{z+1}=\tan\frac{\theta}{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}}$

إذا كان : $\tan\dfrac{\theta}{2}<0$ فإن : $\boxed{\frac{z-1}{z+1}=-\tan\frac{\theta}{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}$

6- حدد معيار وعمدة

$(z,z')\in\mathbb{U}^2\ ;\ (z\neq z')\ z-z'\ ;\ (z\neq-z')\ z+z'$

$$z+z'=e^{i\theta}+e^{i\theta'}$$
$$=e^{i\theta'}\left(e^{i(\theta-\theta')}+1\right)$$
$$=e^{i\theta'}2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}$$
$$\boxed{z+z'=2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$

$$z-z'=e^{i\theta}-e^{i\theta'}$$
$$=e^{i\theta'}\left(e^{i(\theta-\theta')}-1\right)$$
$$=e^{i\theta'}2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}$$
$$\boxed{z+z'=2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$

تمرين 20

نعتبر النقطتين $A(i)$ ؛ $A'(-i)$

$f(z)=\dfrac{\overline{z}(z-i)}{z+i}$ تطبيق من $\mathbb{C}-\{i\}$ إلى $\mathbb{C}$

و F التطبيق من $\mathcal{P}-\{A\}$ نحو $\mathcal{P}$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث : $f(z)=z'$

1- أ- بين أن إذا كان : $z\neq0$ و $z'\neq0$ فإن :

Abouelouafa Lakhouaja
Moutamadris.ma

$(z \neq 0 ; z' \neq 0); |z| = |z'|$

و $\arg(z') \equiv -\arg(z) + 2\arg(z-i) \ [2\pi]$

(لاحظ أن : $\overline{z-i} = \overline{z} + i$)

ب- بين أن إذا كان : $|z| = 1$ فإن : $f(z) = -i$

2- أ - حدد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F

ب- حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون $f(z)$ على شكل $ai \ (a \in \mathbb{R})$

3- أ- بين أن :

$$z' + i = \frac{z\overline{z} - 1}{|\overline{z} + i|^2}(z - i) \quad \text{و} \quad z' - z = \frac{-i(z + \overline{z})}{|\overline{z} + i|^2}(z - i)$$

ب- استنتج أن المتجهتين : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ مستقيميتان

و أن $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدتان

ج- أعط طريقة للإنشاء الهندسي لصورة M بالتطبيق F

الحل

1- أ

$$\frac{\overline{z}(z-i)}{\overline{z}+i} = \frac{\overline{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}}$$

$$|z'|^2 = \frac{\overline{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}} \times \overline{\left(\frac{\overline{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}}\right)}$$

$$= \frac{\overline{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}} \times \frac{z\overline{(z-i)}}{(z-i)}$$

$$= z\overline{z}$$

$$|z'|^2 = |z|^2$$

إذن : $\boxed{|z'| = |z|}$

و

$$\arg(z') \equiv \arg\left(\frac{\overline{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}}\right)[2\pi]$$

$$\equiv \arg(\overline{z}) + \arg(z-i) - \arg\overline{(z-i)}[2\pi]$$

$$\equiv -\arg(z) + \arg(z-i) + \arg(z-i)[2\pi]$$

$$\boxed{\arg(z') \equiv -\arg(z) + 2\arg(z-i) \ [2\pi]}$$

ب- لنبين أن إذا كان : $|z| = 1$ فإن : $f(z) = -i$

$$|z| = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$f(z) = \frac{\overline{z}(z-i)}{\overline{z}+i}$$

$$= \frac{1 - i\overline{z}}{\overline{z}+i}$$

$$= \frac{i(-i-\overline{z})}{\overline{z}+i}$$

$$\boxed{f(z) = -i}$$

2- أ - تحديد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F

$z \in \mathbb{C} - \{i\}$

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{\overline{z}(z-i)}{\overline{z}+i} = z$$

$$\Leftrightarrow \overline{z}z - i\overline{z} = \overline{z}z + iz$$

$$\Leftrightarrow -i(\overline{z} + z) = 0$$

$$\Leftrightarrow -i\,2\mathrm{Re}(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$$

$$\boxed{f(z) = z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}}$$

مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F هو محور الأراتيب محروم من النقطة A

ب- تحديد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون $f(z)$ على شكل $ai \ (a \in \mathbb{R})$

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) + \overline{f(z)} = 0$$

$$\frac{\overline{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}} + \overline{\left(\frac{\overline{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}}\right)} = \frac{\overline{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}} + \frac{z\overline{(z-i)}}{(z-i)}$$

$$= \frac{\overline{z}(z-i)^2 + z\overline{(z-i)}^2}{\overline{(z-i)}(z-i)}$$

$$= \frac{\overline{z}z^2 - 2\overline{z}zi - \overline{z} + z\overline{z}^2 + 2\overline{z}zi - z}{\overline{(z-i)}(z-i)}$$

$$= \frac{z\overline{z}(z+\overline{z}) - (\overline{z}+z)}{\overline{(z-i)}(z-i)}$$

$$= \frac{(z+\overline{z})(|z|^2 - 1)}{\overline{(z-i)}(z-i)}$$

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (z+\overline{z})(|z|^2 - 1) = 0$$

إذن : $\Leftrightarrow z = -\overline{z} \ ou \ |z| = 1$

$\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \ ou \ |z| = 1$

مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون $f(z)$ على شكل $ai \ (a \in \mathbb{R})$ هو محور الأراتيب محروم من النقطة A

Abouelouafa Lakhouaja
Moutamadris.ma

اتحاد الدائرة المثلثية محرومة من النقطة A

3- أ- لنبين أن : $z'+i=\frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$

$$z'+i=\frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}+i$$
$$=\frac{\bar{z}(z-i)+(\bar{z}+i)i}{\bar{z}+i}$$
$$=\frac{(\bar{z}z-\bar{z}i)+(\bar{z}i-1)}{(\bar{z}+i)(z-i)}(z-i)$$

$$\boxed{z'+i=\frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)}$$

لنبين أن : $z'-z=\frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$

$$z'-z=\frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}-z$$
$$=\frac{\bar{z}(z-i)-(\bar{z}+i)z}{\bar{z}+i}$$
$$=\frac{(\bar{z}z-\bar{z}i)-(\bar{z}z+iz)}{(\bar{z}+i)(z-i)}(z-i)$$

$$\boxed{z'-z=\frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)}$$

ب- نستنتج أن المتجهتين : $\overrightarrow{AM}$ **و** $\overrightarrow{A'M'}$ **مستقيميتان**

لدينا : $z'+i=\frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)\Leftrightarrow\frac{z'+i}{z-i}=\frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}$

بما أن : $\frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}\in\mathbb{R}$

فإن : **المتجهتين :** $\overrightarrow{AM}$ **و** $\overrightarrow{A'M'}$ **مستقيميتان**

نستنتج أن المتجهتين : $\overrightarrow{AM}$ **و** $\overrightarrow{MM'}$ **متعامدتان**

إذا كان : $z=0$ **فإن :** $M=M'=O$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}$ **و** $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{O}$

إذن : $\overrightarrow{AM}$ **و** $\overrightarrow{MM'}$ **متعامدتان**

نفترض أن : $z\neq 0$

لدينا : $z'-z=\frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)\Leftrightarrow\frac{z'-z}{z-i}=\frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}$

بما أن : $\frac{-(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}\in\mathbb{R}^*$

فإن: $\arg\left(\frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$

إذن : $\overrightarrow{AM}$ **و** $\overrightarrow{MM'}$ **متعامدتان**

ج- طريقة للإنشاء الهندسي لصورة M **بالتطبيق** F

لدينا : $\overrightarrow{AM}$ **و** $\overrightarrow{A'M'}$ **مستقيميتان**

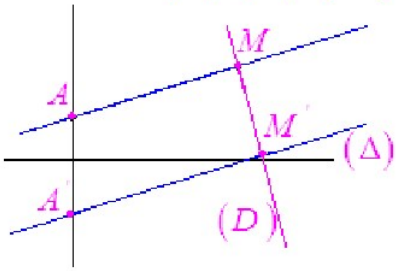
نأخذ نقطة M **من** $\mathcal{P}-\{A\}$

نرسم المستقيم (Δ) **الموازي ل** (AM) **المار من** A'

لدينا : $\overrightarrow{AM}$ **و** $\overrightarrow{MM'}$ **متعامدتان**

نرسم المستقيم (D) **العمودي على** (AM) **المار من** M

$(\Delta)\cap(D)=\{M'\}$



تمرين 21

نعتبر : $j=e^{2i\frac{\pi}{3}}$

$C;B;A$ **نقط من المستوى العقدي ألحاقها**

$c=8j^2\ ;\ b=6j\ ;\ a=8$

لتكن : A' **صورة** B **بالدوران** $R\left(c,\frac{\pi}{3}\right)$

B' **صورة** C **بالدوران** $R\left(A,\frac{\pi}{3}\right)$

C' **صورة** A **بالدوران** $R\left(B,\frac{\pi}{3}\right)$

1- حدد : $c';b';a'$ **ألحاق** $C;B;A$

استنتج أن : $O\in(BB')$

2- بين أن المستقيمات : $(AA')\cap(BB')\cap(CC')=\{O\}$

3- أ - احسب : $OA+OB+OC$

ب - بين أن : $j^3=1$ **و** $j^2=\bar{j}$ **و** $1+j+j^2=0$

ج- M **النقطة التي لحقها** z **، تحقق أن :**

$|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j|=|a+bj^2+cj|=22$

د- بين أن المسافة $MA+MB+MC$ **تكون دنوية إذا كان** $M=O$

الحل

Abouelouafa Lakhouaja
Moutamadris.ma

-1

$$R_{\left(c,\frac{\pi}{3}\right)}(B)=A' \Leftrightarrow a'=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(6e^{2i\frac{\pi}{3}}-8e^{4i\frac{\pi}{3}}\right)+8e^{4i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow a'=-6-8e^{-i\frac{\pi}{3}}+8e^{-2i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow a'=-6-8\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+8\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\boxed{R_{\left(c,\frac{\pi}{3}\right)}(B)=A \Leftrightarrow a'=-14}$$

$$R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(C)=B' \Leftrightarrow b'=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(8e^{4i\frac{\pi}{3}}-8\right)+8$$

$$\Leftrightarrow b'=8e^{-i\frac{\pi}{3}}-8e^{i\frac{\pi}{3}}+8$$

$$\Leftrightarrow b'=8\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-8\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+8$$

$$\Leftrightarrow b'=8-8\sqrt{3}i$$

$$\boxed{R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(C)=B' \Leftrightarrow b'=16e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$R_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}(A)=C' \Leftrightarrow c'=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(8-6e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)+6e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow c'=8e^{i\frac{\pi}{3}}+6+6e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow c'=6+8\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+6\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\Leftrightarrow c'=7+7\sqrt{3}i$$

$$\boxed{R_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}(A)=C' \Leftrightarrow c'=14e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

لدينا : $b'=16e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $b=6j$

إذن :

$$\frac{b'}{b}=\frac{16e^{-i\frac{\pi}{3}}}{6e^{i2\frac{\pi}{3}}}$$

$$\frac{b'}{b}=-\frac{16}{6}$$

و منه : $\frac{b'}{b}\in\mathbb{R}$

$\boxed{O\in(BB')}$

بنفس الطريقة نجد : $\boxed{O\in(CC')}$ و $\boxed{O\in(AA')}$

-2

بما أن : $\boxed{O\in(CC')}$ و $\boxed{O\in(BB')}$ و $\boxed{O\in(AA')}$

فإن : $(AA')\cap(BB')\cap(CC')=\{O\}$

-3 - أ - $\boxed{OA+OB+OC=22}$

ب -

$$j^3=\left(e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)^3=1$$

$$j^2=\left(e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)^2=e^{4i\frac{\pi}{3}}=e^{-2i\frac{\pi}{3}}=\overline{j}$$

$$1+j+\overline{j}=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\boxed{1+j+j^2=0}$$

ج-

$$\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|=\left|a+bj^2+cj-z\left(1+j+j^2\right)\right|$$

$$=\left|a+bj^2+cj\right|$$

$$=\left|8+6j^3+8j^3\right|$$

$$=22$$

إذن : $\boxed{\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|=\left|a+bj+cj^2\right|=22}$

د- لنبين أن المسافة $MA+MB+MC$ تكون دنوية إذا كان $M=O$

لدينا: $OA+OB+OC=22$

و $\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|=\left|a+bj+cj^2\right|=22$

إذن : $\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|=OA+OB+OC$

لدينا: $\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|\le|a-z|+|b-z|+|c-z|$

إذن : $OA+OB+OC\le MA+MB+MC$

و منه : المسافة $MA+MB+MC$ تكون دنوية إذا كان $M=O$

Abouelouafa Lakhouaja
Moutamadris.ma

الآن بوضع : $\begin{matrix} z=x+iy \\ (x,y)\in IR^2 \end{matrix}$ نجد : $x+yi+2x-2iy+i=0$ أو $x+yi+2x-2iy-i=0$

منه : $3x-yi=-i$ أو $3x-yi=i$ منه : $\begin{cases} 3x=0 \\ -y=-1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} 3x=0 \\ -y=1 \end{cases}$ بالتالي : $S=\{i\,;-i\}$

تمرين 3 : نعتبر العدد العقدي $j=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1

$$j^2+j+1=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}+\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{-2}{4}+\frac{-1}{2}+1=0$$

لنستنتج أن: $j^3=1$

طريقة 1	طريقة 2
بما أن $j^2=-j-1$ ، فإن : $j^3=j\,j^2=j(-j-1)$ $j^3=-j^2-j=-(-j-1)-j=j+1-j=1$	بما أن : $j^3-1=(j-1)(j^2+j+1)=0$ فإن : $j^3=1$

2 بما أن $j\neq 1$ فإن: $S=1+j+j^2+j^3+\ldots+j^{2014}$

$$S=1\times\frac{1-j^{2015}}{1-j}=\frac{1-j^{2013}\times j^2}{1-j}=\frac{1-\left(j^3\right)^{671}\times j^2}{1-j}=\frac{1-j^2}{1-j}=\frac{(1-j)(1+j)}{1-j}=1+j=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمرين 4 : ليكن $z\neq\frac{-i}{2}$ حيث $|z|=1$ نضع : $u=\frac{z+2i}{2z+i}$.

بما أن $|z|=1$ فإن : $z\bar{z}=1$ منه : $\bar{z}=\frac{1}{z}$

لدينا : $u.\bar{u}=\left(\frac{z+2i}{2z+i}\right)\left(\frac{\bar{z}-2i}{2\bar{z}-i}\right)=\left(\frac{z+2i}{2z+i}\right)\left(\frac{\frac{1}{z}-2i}{2\frac{1}{z}-i}\right)=\left(\frac{z+2i}{2z+i}\right)\left(\frac{1-2zi}{2-zi}\right)=\frac{z-2z^2i+2i+4z}{4z-2z^2i+2i+z}=1$

بالتالي : $|u|^2=1$ أي : $|u|=1$

تمرين 5 : ليكن a و b عددين عقديين حيث $a\neq b$ و $|a|=|b|=1$.

لدينا $|a|=|b|=1$ منه : $\bar{a}=\frac{1}{a}$ منه $\bar{b}=\frac{1}{b}$

الآن : $\left(\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b}\right)=-\left(\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b}\right)=\frac{ab\bar{z}+z-(b+a)}{b-a}=\frac{\bar{z}+\frac{1}{ab}z-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{\bar{z}+\bar{a}\bar{b}z-\left(\bar{a}+\bar{b}\right)}{\bar{a}-\bar{b}}=\overline{\left(\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b}\right)}$

بالتالي : $\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b}\in i\,IR$

لاحظ التكافؤ الهام: $|a|=1\Leftrightarrow\bar{a}=\frac{1}{a}$ و $Z\in i\,IR\Leftrightarrow\bar{Z}=-Z$

تمرين 6 : a و b و c أعداد عقدية مختلفة مثنى مثنى.

1 لدينا :

$$|a-b|^2+|a-c|^2=|b-c|^2\Leftrightarrow(a-b)\overline{(a-b)}+(a-c)\overline{(a-c)}=(b-c)\overline{(b-c)}$$
$$|a-b|^2+|a-c|^2=|b-c|^2\Leftrightarrow(a-b)(\bar{a}-\bar{b})+(a-c)(\bar{a}-\bar{c})=(b-c)(\bar{b}-\bar{c})$$
$$|a-b|^2+|a-c|^2=|b-c|^2\Leftrightarrow a\bar{a}-a\bar{b}-b\bar{a}+b\bar{b}+a\bar{a}-a\bar{c}-c\bar{a}+c\bar{c}=b\bar{b}-b\bar{c}-c\bar{b}+c\bar{c}$$
$$|a-b|^2+|a-c|^2=|b-c|^2\Leftrightarrow 2a\bar{a}+b\bar{c}+c\bar{b}=a\bar{b}+b\bar{a}+a\bar{c}+c\bar{a}$$

و

Moutamadris.ma

و من جهة أخرى :

$$\frac{b-a}{c-a}\in i\,IR \Leftrightarrow \frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}}=\frac{a-b}{c-a} \Leftrightarrow \overline{b}c-\overline{b}a-\overline{a}c+\overline{a}a=a\overline{c}-a\overline{a}-b\overline{c}+b\overline{a}$$

$$\frac{b-a}{c-a}\in i\,IR \Leftrightarrow 2a\overline{a}+b\overline{c}+c\overline{b}=a\overline{b}+b\overline{a}+a\overline{c}+c\overline{a}$$

بالتالي : $\frac{b-a}{c-a}\in i\,IR \Leftrightarrow |a-b|^2+|a-c|^2=|b-c|^2$

2 باعتبار النقط في معلم م.م.م $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ ، فالعبارة المحصل عليها تعني :

$$AB^2+AC^2=BC^2 \Leftrightarrow (AB)\perp(AC)$$

وهي تعبر عن مبرهنتي فيثاغورس المباشرة و العكسية.

تمرين 7 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.حدد طبيعة المجموعات التالية.

$E=\{M(z)/\ 5z+3\overline{z}+2-i\in IR\}$ ، نضع : $z=x+iy/\ (x,y)\in IR^2$

$$M\in E \Leftrightarrow 5x+5iy+3x-3iy+2-i\in IR \Leftrightarrow 8x+2+2iy-i\in IR \Leftrightarrow 2y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$$

بالتالي E هي المستقيم ذو المعادلة : $(E):\ y=\frac{1}{2}$

$F=\{M(z)/\ |z-2i+1|=|z+i-3|\}$

نعتبر النقطتين $A(3-i)$ و $B(-1+2i)$ ، $M\in F \Leftrightarrow |z-(-1+2i)|=|z-(3-i)| \Leftrightarrow BM=AM$

إذن : F هو المستقيم واسط القطعة $[AB]$

أحينا الحل الهندسي يكون جد بسيط مقارنة بالحل الجبري، خصوصا أنه طلب منا فقط تحديد طبيعة المجموعة (دائرة،مستقيم....)

$K=\{M(z)/\ (z+3i-1)(\overline{z}+2)\in i\,IR\}$

$$M\in K \Leftrightarrow \overline{(z+3i-1)(\overline{z}+2)}=-(z+3i-1)(\overline{z}+2) \Leftrightarrow (\overline{z}-3i-1)(z+2)+(z+3i-1)(\overline{z}+2)=0$$

لدينا :

$$M\in K \Leftrightarrow z\overline{z}+2\overline{z}-3iz-6i-z-2+z\overline{z}+2z+3i\overline{z}+6i-\overline{z}-2=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow 2z\overline{z}+\overline{z}+3i\overline{z}-3iz+z-4=0$$

الآن بوضع $z=x+iy/\ (x,y)\in IR^2$ نجد:

$$M\in K \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+x-iy+3i(x-iy)-3i(x+iy)+x+iy-4=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2x+3xi+3y-3xi+3y-4=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2x+6y-4=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow x^2+y^2+x+3y-2=0$$

$$M\in K \Leftrightarrow x^2+x+\frac{1}{4}+y^2+3y+\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}$$

$$M\in K \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{18}{4}$$

إذن K هي الدائرة ذات المركز $\Omega\left(\frac{-1}{2};\frac{-3}{2}\right)$ و الشعاع $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

لاحظ أنه من الأفضل أن نبدأ بتبسيط تعبير المجموعة إلى أن نصل مرحلة ينتهي التبسيط، إذاك نضع $z=x+iy$ ، فليس من المفيد دائما استعمال هذا الوضع من البداية كما هو الشأن في المجموعة الأولى.

في هذا المثال يمكن الوضع من البداية و ربما لن يكون هناك اختلاف كبير في الحسابات، لكن في أمثلة أخرى يكون الفرق واضحا.

$H=\left\{M(z)/\ \frac{z+2}{z}\in i\,IR\right\}$ ، لدينا :

$$M\in H \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+2}{z}\right)}=-\frac{z+2}{z} \Leftrightarrow \frac{\overline{z}+2}{\overline{z}}+\frac{z+2}{z}=0 \Leftrightarrow \frac{z\overline{z}+2z+z\overline{z}+2\overline{z}}{z\overline{z}}=0 \Leftrightarrow 2z\overline{z}+2z+2\overline{z}=0 \Leftrightarrow z\overline{z}+z+\overline{z}=0$$

Moutamadris.ma

الآن بوضع $z=x+iy\ /\ (x,y)\in IR^2$ نجد: $M\in H \Leftrightarrow x^2+y^2+2x=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2=1 \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=1$

إذن H هي الدائرة ذات المركز $\Omega(-1;0)$ و الشعاع $r=1$

لدينا : $V=\left\{ M(z)\ /\ \dfrac{\bar{z}+2}{z+2}\in IR \right\}$ ،

$$M\in V \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{\bar{z}+2}{z+2}\right)}=\frac{\bar{z}+2}{z+2} \Leftrightarrow \frac{z+2}{z+2}=\frac{\bar{z}+2}{z+2} \Leftrightarrow (z+2)^2=(\bar{z}+2)^2 \Leftrightarrow (z+2)^2-(\bar{z}+2)^2=0 \Leftrightarrow (z+\bar{z}+4)(z-\bar{z})=0$$

الآن بوضع $z=x+iy\ /\ (x,y)\in IR^2$ نجد: $M\in V \Leftrightarrow (2x+4)(2iy)=0 \Leftrightarrow x=-2\ ou\ y=0$

إذن V هي اتحاد المستقيمين : $(D_1): x=-2$ و $(D_2): y=0$

الأمثلة أعلاه مختارة بعناية بغية التعريف فمختلف طرق تحديد مثل هذه المجموعات.

رياضيات النجاح أ. سمير لخريسي
www.naja7math.com

Moutamadris.ma

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية	سلسلة 2

تمرين 1 : اكتب الأعداد التالية على شكلها المثلثي.

$z_1 = 3+3i$ ، $z_2 = 1-i$ ، $z_3 = -\sqrt{3}-i$ ، $z_4 = -\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i$ ، $z_5 = \frac{1}{7}+\frac{1}{7}\,i$

$z_6 = -\cos(\alpha)-i\,\sin(\alpha)$ ، $z_7 = \sin(\alpha)+i\,\cos(\alpha)$ ، $z_8 = 1-\cos(2\beta)+i\,\sin(2\beta)$

$z_9 = \cos(\alpha)+\cos(\beta)+i\,(\sin(\alpha)+\sin(\beta))$ حيث $(\alpha,\beta) \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[^2$ و $\alpha > \beta$

تمرين 2 : نعتبر العددين : $u = \sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1) احسب u^2 ثم اكتبه على الشكل المثلثي.

2) اكتب u على الشكل المثلثي.

تمرين 3 : نعتبر العددين العقديين التاليين : $u = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ ، $v = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$

1) حدد معيار وعمدة العددين u و v

2) بين أن : $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{12} = -1$

3) حدد قيم العدد الصحيح النسبي m الذي من أجله يكون $\left(\sqrt{3}+i\right)^m \in IR$

4) بين أن : $\forall n \in IN \quad (1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cos\left(\frac{\pi\, n}{4}\right)$

5) احسب المجموع : $S = 1+v+v^2+v^3+\ldots+v^{2014}$ ثم احسب : $|S|$

تمرين 4 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. حدد المجموعات التالية:

$E = \left\{ M(z) \,/\, \arg(z) \equiv \frac{\pi}{5}\,[2\pi] \right\}$ و $F = \left\{ M(z) \,/\, \arg(z-1+i) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \right\}$

و $G = \left\{ M(z) \,/\, \arg(z-2i)^2 \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \right\}$

تمرين 5 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ ونعتبر العدد العقدي $j = \frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) أكتب العدد العقدي j و $\bar{j}$ على الشكل المثلثي

2) نعتبر النقط $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ حيث a و b و c أعداد عقدية معلومة

بين أن المثلث ABC يكون متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كان : $c-b = j\,(a-c)$ أو $c-b = \bar{j}\,(a-c)$

3) ABC مثلث متساوي الأضلاع ، E مماثلة A بالنسبة لـ B ، F مماثلة B بالنسبة لـ C ، G مماثلة C بالنسبة لـ A

بين أن EFG مثلث متساوي الأضلاع.

Moutamadris.ma

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 :

$$z_1 = 3+3i = 3(1+i) = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[3\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_2 = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_3 = -\sqrt{3}-i = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \left[2;\frac{7\pi}{6}\right]$$

$$z_4 = -\sqrt{2}+\sqrt{6}i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left[2\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_5 = \frac{1}{7}+\frac{1}{7}i = \frac{1}{7}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \left[\frac{\sqrt{2}}{7};\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_6 = -\cos(\alpha)-i\sin(\alpha) = \cos(\alpha+\pi)+i\sin(\alpha+\pi) = [1;\alpha+\pi]$$

$$z_7 = \sin(\alpha)+i\cos(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \left[1;\frac{\pi}{2}-\alpha\right]$$

$$z_8 = 1-\cos(2\beta)+i\sin(2\beta) = 2\sin^2(\beta)+2\sin(\beta)\cos(\beta)i = 2\sin(\beta)(\sin(\beta)+i\cos(\beta))$$

$$z_8 = 2\sin(\beta)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right) = \left[2\sin(\beta);\frac{\pi}{2}-\beta\right]$$

(لأن : $\beta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow 2\sin(\beta)>0$)

$$z_9 = \cos(\alpha)+\cos(\beta)+i(\sin(\alpha)+\sin(\beta)) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+2i\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$z_9 = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right) = \left[2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right);\frac{\alpha-\beta}{2}\right]$$

(لأن : $(\alpha,\beta)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[^2 \Rightarrow \begin{cases}0<\alpha<\frac{\pi}{2}\\0<\beta<\frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow 0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>0$)

- للتذكير ،للحصول على الشكل المثلثي للعدد : $z=a+ib$ نعمل بمعيار العدد z أي نكتب: $z = r\left(\frac{a}{r}+i\frac{b}{r}\right)$
حيث $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ثم نبحث في جدول القيم الهامة عن الزاوية α التي تحقق : $\cos(\alpha)=\frac{a}{r}$ و $\sin(\alpha)=\frac{b}{r}$
- ليس من الضروري اتباع الطريقة السابقة في كل الحالات، فمثلا إن تبين لنا عامل مشترك نعمل به أولا ثم نطبق الطريقة على العامل المحصل عليه (مثل z_1 و z_5)
- حالات خاصة : $\forall a\in IR^{+*}\quad a=[a,0]\ ;\ -a=[a,\pi]\ ;\ ai=\left[a,\frac{\pi}{2}\right]\ ;\ -ai=\left[a,-\frac{\pi}{2}\right]$
- يمكن استعمال خاصيات الكتابة المثلثية أحيانا لتحديد الشكل المثلثي لعدد عقدي، مثلا :

$$z_3 = -\sqrt{3}-i = -(\sqrt{3}+i) = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = [-2;\pi]\times\left[1;\frac{\pi}{6}\right] = [-2;\pi]\times\left[2\times1;\pi+\frac{\pi}{6}\right] = \left[2;\frac{5\pi}{6}\right]$$

Moutamadris.ma

تمرين 2 : $u=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1

$$u^2=2+\sqrt{3}+2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}-\left(2-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}+2i=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\left[4;\frac{\pi}{6}\right]$$

2

نضع : $u=[r\ ,\alpha]$ حيث : $r\in IR^{*+}$ و $\alpha\in\left]-\pi;\pi\right]$

إذن : $u^2=\left[r^2\ ,\ 2\alpha\right]$ منه: $\begin{cases}r^2=4\\2\alpha\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}r=2\\\alpha\equiv\frac{\pi}{12}[\pi]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}r=2\\\alpha\equiv\frac{\pi}{12}+k\pi\ /k\in Z\end{cases}$

$$\begin{cases}\alpha\in\left]-\pi;\pi\right]\\\alpha\equiv\frac{\pi}{12}+k\pi\ /k\in Z\end{cases}\Rightarrow-\pi<\frac{\pi}{12}+k\pi\le\pi\ \Rightarrow-1-\frac{1}{12}<k\le1-\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{-13}{12}<k\le\frac{11}{12}$$

$$\Rightarrow(k=0\ \ ou\ \ k=-1)\Rightarrow\left(\alpha=\frac{\pi}{12}\ \ ou\alpha=\frac{13\pi}{12}\right)$$

بما أن : $r\cos(\alpha)=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ و $r\sin(\alpha)=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ فإن : $\cos(\alpha)>0$ و $\sin(\alpha)>0$

إذن : $\alpha=\frac{\pi}{12}$ (لأن : $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)<0\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{2}<\frac{13\pi}{12}<\frac{3\pi}{2}$) ، بالتالي: $u=\left[2\ ,\frac{\pi}{12}\right]$

تمرين 3 : $u=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ ، $v=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$

1

$$u=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\left[1;\frac{\pi}{6}\right]\ \ ،\ \ v=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\left[1;\frac{\pi}{4}\right]$$

2

لدينا : $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{12}=\left(\frac{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}}\right)^{12}=\left(\frac{u}{v}\right)^{12}$ ، وبما أن : $\frac{u}{v}=\left[\frac{1}{1};\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right]=\left[1;\frac{-\pi}{12}\right]$

فإن : $\left(\frac{u}{v}\right)^{12}=\left[1^{12};12\times\frac{-\pi}{12}\right]=[1;-\pi]=-1$ ، بالتالي : $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{12}-1$

3

لدينا : $\left(\sqrt{3}+i\right)^m=2^m\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^m=2^m\left[1;\frac{\pi}{6}\right]^m=2^m\left[1;\frac{\pi}{6}m\right]=2^m\left(\cos\left(\frac{\pi\,m}{6}\right)+i\ \sin\left(\frac{\pi\,m}{6}\right)\right)$ ،إذن:

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^m\in IR\ \Leftrightarrow\ Im\left(\left(\sqrt{3}+i\right)^m\right)=0\ \Leftrightarrow\ \sin\left(\frac{\pi\,m}{6}\right)=0\ \Leftrightarrow\ \frac{\pi\,m}{6}=k\pi\ /k\in Z\ \Leftrightarrow\ m=6k/k\in Z$$

4

$$(1+i)^n+(1-i)^n=2^n\left(\left(\frac{1+i}{2}\right)^n+\left(\frac{1-i}{2}\right)^n\right)=2^n\left(\left[1;\frac{\pi\,n}{4}\right]+\left[1;\frac{-\pi\,n}{4}\right]\right)$$

$$=2^n\left(\cos\left(\frac{\pi\,n}{4}\right)+i\ \sin\left(\frac{\pi\,n}{4}\right)+\cos\left(\frac{-\pi\,n}{4}\right)+i\ \sin\left(\frac{-\pi\,n}{4}\right)\right)$$

لدينا لكل $\forall n\in IN$:

$$(1+i)^n+(1-i)^n=2^n\times2\cos\left(\frac{\pi\,n}{4}\right)=2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cos\left(\frac{\pi\,n}{4}\right)$$

5

لدينا : $v=\left[1;\frac{\pi}{4}\right]$ منه : $v^4=[1;\pi]=-1$ ، الآن بما أن $v\neq1$ فإن :

Moutamadris.ma

$$S=1+v+v^2+v^3+...+v^{2014}=1\times\frac{1-v^{2015}}{1-v}=\frac{1-v^{2012}\times v^3}{1-v}=\frac{1-\left(v^4\right)^{503}\times v^3}{1-v}$$

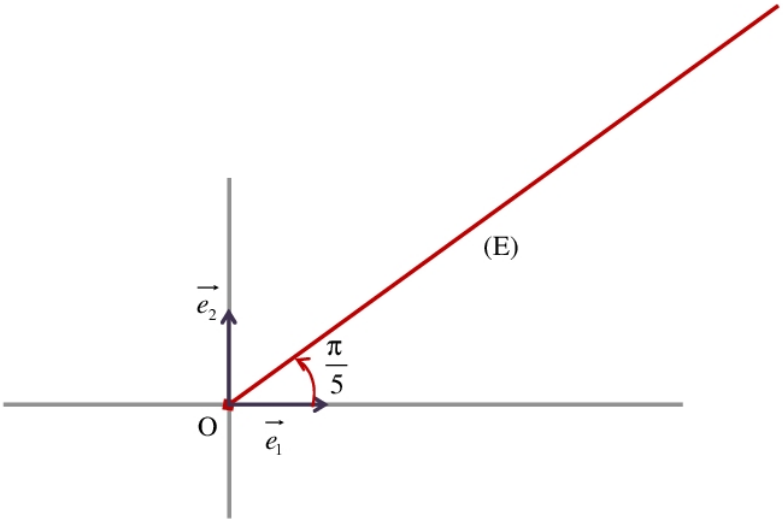
$$S=\frac{1-(-1)^{503}\times v^3}{1-v}=\frac{1+v^3}{1-v}=\frac{v+v^4}{v(1-v)}=\frac{v-1}{v(1-v)}=\frac{-1}{v}=\frac{[1;\pi]}{\left[1;\frac{\pi}{4}\right]}=\left[1;\frac{3\pi}{4}\right]=\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|S|=1$$

تمرين 4 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

$$E=\left\{M(z)\ /\ \arg(z)\equiv\frac{\pi}{5}\ [2\pi]\right\}=\left\{M(z)\ /\ \left(\vec{e_1},\overrightarrow{OM}\right)\equiv\frac{\pi}{5}\ [2\pi]\right\}$$

إذن : E هي نصف المستقيم الذي أصله (والمحروم منه) والذي يكون مع $\vec{e_1}$ الزاوية : $\frac{\pi}{5}$

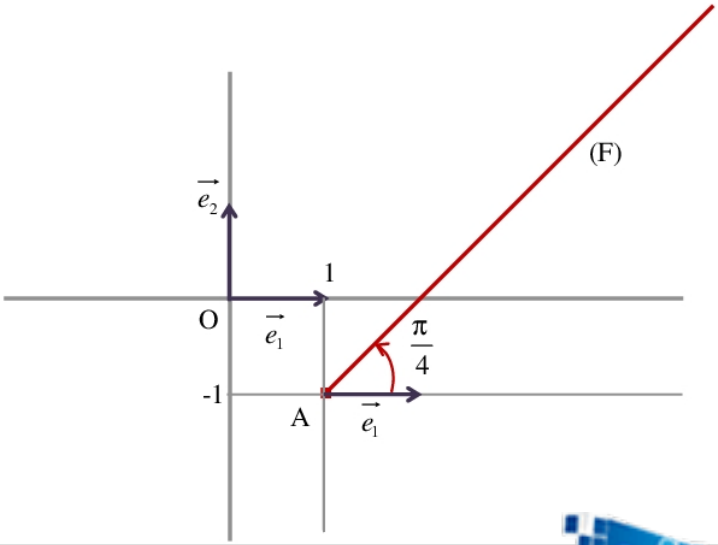


$$F=\left\{M(z)\ /\ \arg(z-1+i)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\right\}=\left\{M(z)\ /\ \arg(z-(1-i))\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\right\}$$

نعتبر النقطة : $A(1-i)$ ، إذن:

$$F=\left\{M(z)\ /\ \left(\vec{e_1},\overrightarrow{AM}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\right\}$$

إذن : F هي نصف المستقيم الذي أصله A (والمحروم منه) والذي يكون مع $\vec{e_1}$ الزاوية : $\frac{\pi}{4}$



Moutamadris.ma