الاشـــتقاق ودراســـــة الدوال

I -قابلية الاشتقاق :

1. قابلية الاشتقاق في نقطة :

f دالة معرفة على مجال مركزه x_0. f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وجد عدد حقيقي A بحيث : $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A$ ونكتب $f'(x_0)=A$ ويسمى العدد المشتق للدالة f في x_0.

2. قابلية الاشتقاق على اليمين:

f دالة معرفة على مجال $[x;x_0+\alpha[$. f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 إذا كانت للدالة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية منتهية على يمين x_0 ويرمز لها بالرمز $f'_d(x_0)$.

3. قابلية الاشتقاق على اليسار :

f دالة معرفة على مجال $]x_0-\alpha;x_0]$. f قابلة للاشتقاق على يسار x_0 إذا كانت الدالة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تقبل نهاية على يسار x_0 ويرمز لها بالرمز $f'_g(x_0)$

4. قابلية الاشتقاق على مجال.

f دالة معرفة على مجال I.

f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق على جميع نقط I

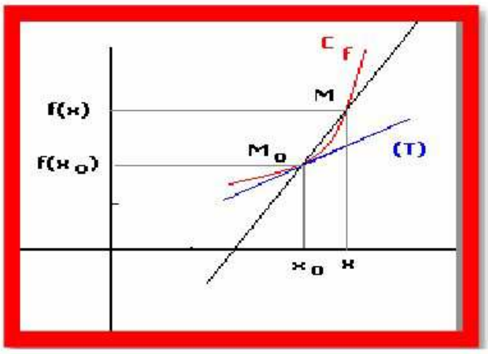
f قابلة للاشتقاق على $[a;b]$ إذا كانت قابلة للاشتقاق على $]a;b[$ وعلى يمين a وعلى يسار b.

-ملاحظة : تكون f قابلة للاشتقاق في نقطة x_0 إذا كانت قابلة للاشتقاق على يمين x_0 وعلى يسار x_0 وكان لدينا : $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$

II -التأويل الهندسي للعدد المشتق :

الدالة المعرفة بما يلي : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ تسمى الدالة التالفية المماسة ل C_f بجوار x_0.

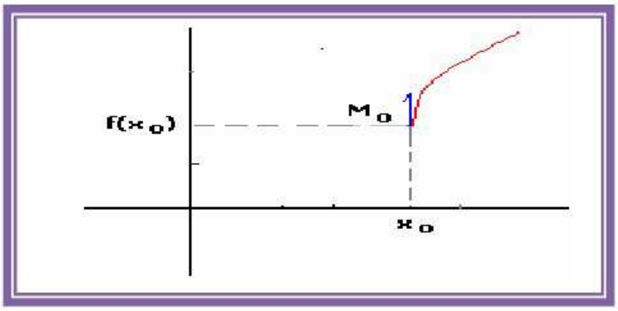
المستقيم دو المعادلة : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ يسمى مستقيم مماس للمنحنى C_f عند النقطة $A(x;f(x_0))$.العدد $f'(x_0)$ يسمى المعامل الموجه أو العدد المشتق .



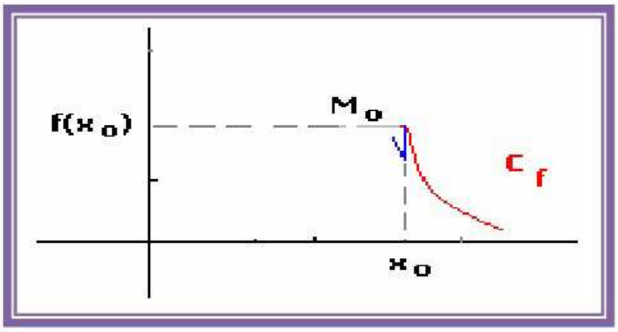
التأويلات الهندسية لقابـــــــــــلية الاشتـــــــــــقاق

دراسة قابلية الاشتقاق	التأويل الهندسي للنتيجة المحصلة
$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = 0$	(C_f) له نصف مماس أفقي على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$
$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = a$	(C_f) له نصف مماس مائل على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ معامله الموجه a $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$	(C_f) له نصف مماس عمودي على يمين $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأعلى
$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	(C_f) له نصف مماس عمودي على يمين $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأسفل
$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$	(C_f) له نصف مماس عمودي على يسار $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأسفل
$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	(C_f) له نصف مماس عمودي على يسار $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأعلى

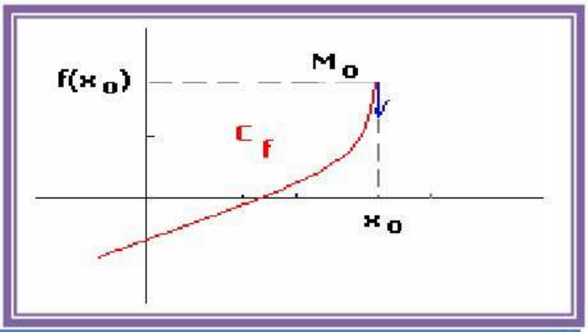
(C_f) له نصف مماس عمودي على يمين $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الاعلى



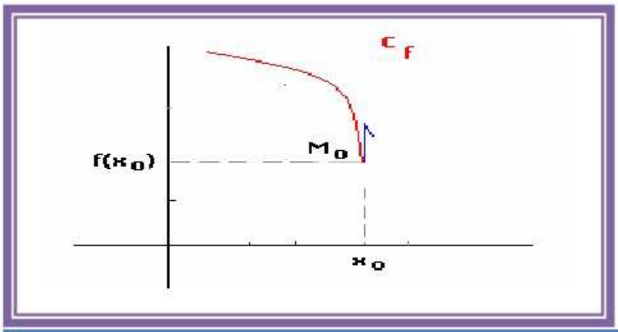
(C_f) له نصف مماس عمودي على يمين $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الاسفل



(C_f) له نصف مماس عمودي على يسار $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأسفل



(C_f) له نصف مماس عمودي على يسار $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأعلى



III - الاشتقاق والا تصال:

كل دالة قابلة للاشتقاق في نقطة هي دالة متصلة والعكس غير صحيح بصفة عامة

IV -الكتابة التفاضلية:

اذا كان $y=f(x)$ حيث f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I فإننا نكتب اصطلاحا $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ أو $dy=f'(x)dx$ هده الكتابة تسمى الكتابة التفاضلية

V- مشتقة مركب دالتين :

1 . f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$. فان الدالة $g\circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0 و $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\times f'(x_0)$

2 . f قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فان الدالة $g\circ f$ قابلة للاشتقاق على المجال I و $(\forall x\in I)(g\circ f)'(x)=(g'\circ f(x))\times f'(x)$

VI-مشتقة الدالة العكسية :

1 . f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0)\neq 0$.فان الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$

ولدينا : $(f^{-1})'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

2 . f قابلة للاشتقاق على المجال I و $f'(x)\neq 0$ لكل x من المجال I فان f^{-1}

قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)$. $(\forall y\in f(I));(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

VII– جـــــــــــدول الدوال المشتـــــــــــقة للــــــــــــــدوال الاعتيادية

الدالة f	الدالة f' مشتقتها
$f+g$	$f'+g'$
kf	kf'
$f\times g$	$f'g+fg'$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$
$\dfrac{1}{g}$	$-{g'}/{g^2}$
$\sqrt{f};f\succ 0$	${f'}/{2\sqrt{f}}$
$f^n;(n\in\mathbb{N}^*)$	$nf'f^{n-1}$
a	0
x	1
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt[n]{f}$	$\dfrac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$tg(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}=1+tg^2(x)$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$
$\dfrac{ax+b}{cx+d}$	$\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$

VIII - المشتقة ومنحنى التغيرات :

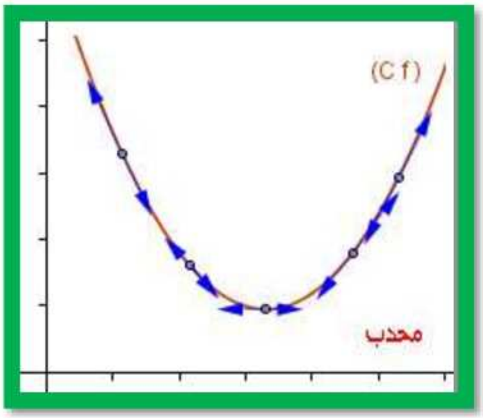
f قابلة للاشتقاق على مجال I ومشتقتها هي $f'(x)$:

1. إذا كان $f'(x) \succ 0$ $(\forall x \in I)$ فان f دالة تزايدية.
2. إذا كان $(\forall x \in I); f'(x) \prec 0$ فان f دالة تناقصية.
3. إذا كان $(\forall x \in I); f'(x) = 0$ فان f دالة ثابتة

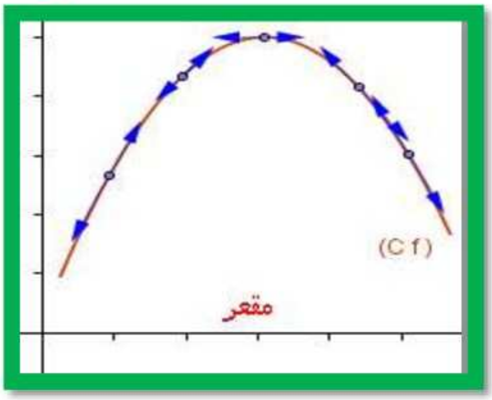
IX -تحدب .تقعر .نقطة انعطاف :

f قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I $(f''(x))$

1. إذا كان $f''(x) \succ 0$ على المجال I فان (C_f) منحنى محدب.



2. إذا كان $f''(x) \prec 0$ على المجال I فان (C_f) منحنى مقعر.

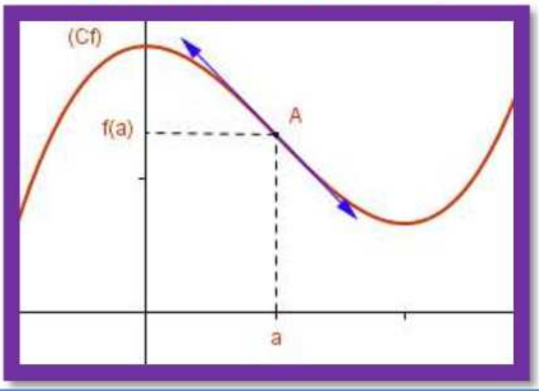


3. إذا كان $f''(x) = 0$ على المجال فان (C_f) يقبل نقطة انعطاف.

....

- إذا انعدمت f' في x_0 وغيرت إشارتها بجوار x_0 نتكلم عن مطراف دالة (قيمة قصوى أو قيمة دنيا).

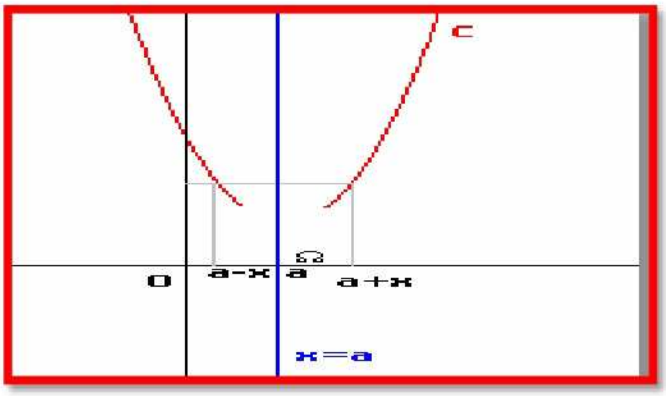
إذا انعدمت " f في x_0 وغيرت إشارتها بجوار x_0 نتكلم عن نقطة انعطاف



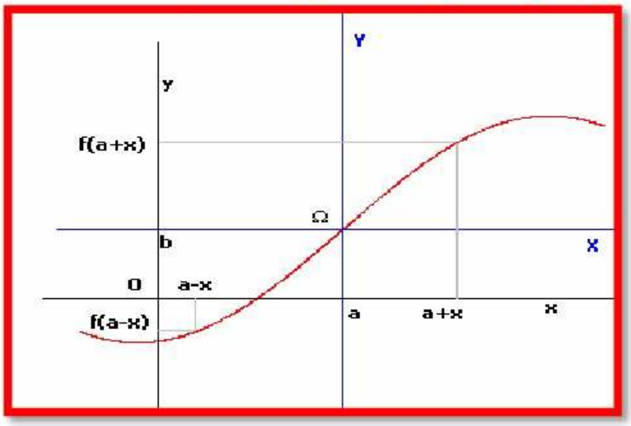
X- محور تماثل . مركز تماثل

f . دالة معرفة على D_f وليكن (C) في م.م.م .

1. المستقيم $x=a$ محور تماثل المنحنى إذا تحقق: $f(2a-x)=f(x)$.



2. النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل المنحنى إذا تحقق: $f(2a-x)+f(x)=2b$

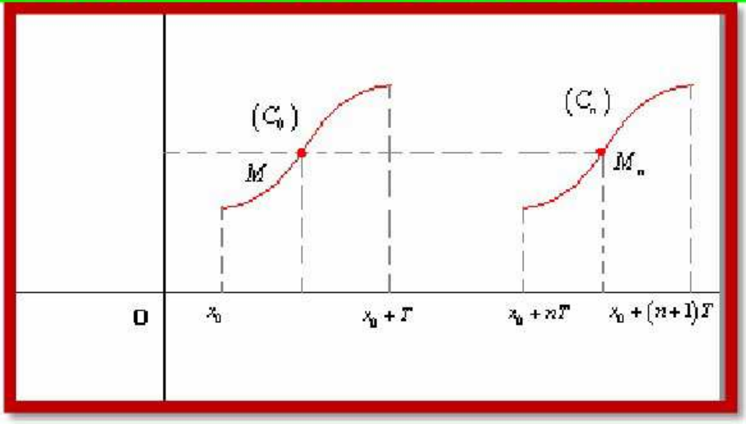


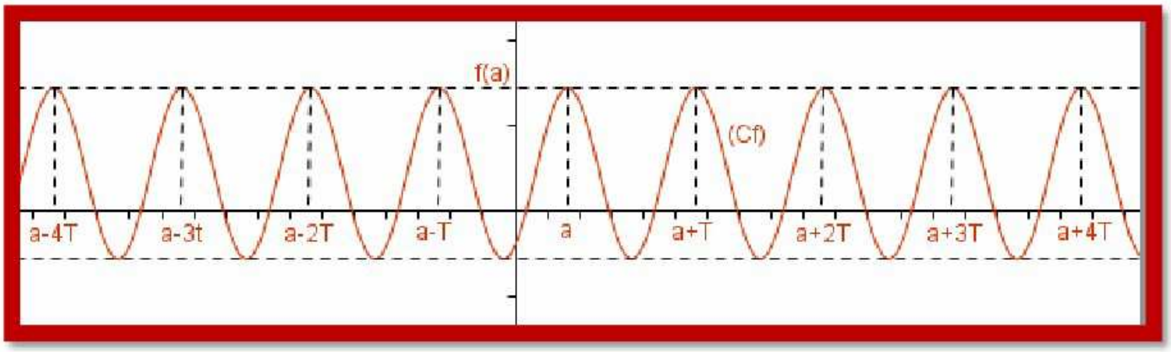
XI - دالة دورية

f دالة عددية و D_f حيز تعريفها . f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T بحيث :

$$f(x+T)=f(x);(x-T)\in D_f;(x+T);\forall x\in D_f$$

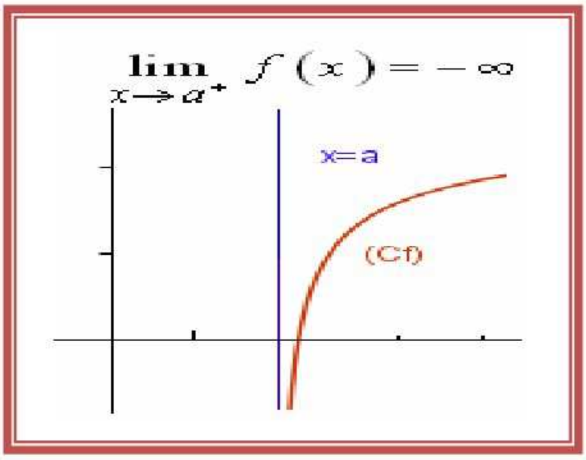
العدد T يسمى دور الدالة f واصغر دور موجب يسمى دور الدالة f

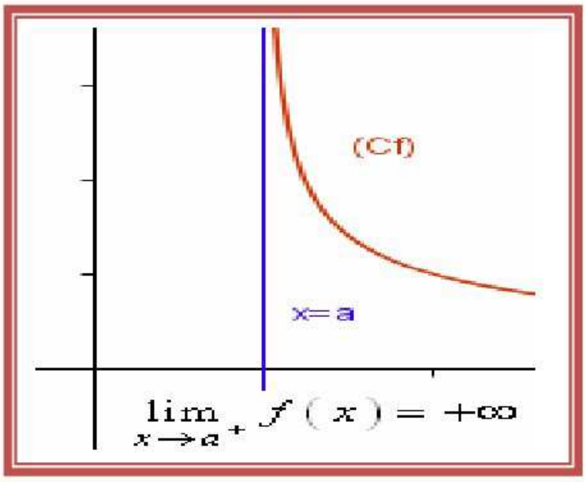


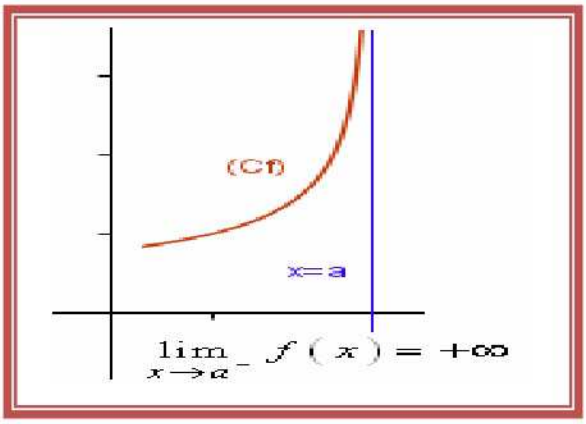


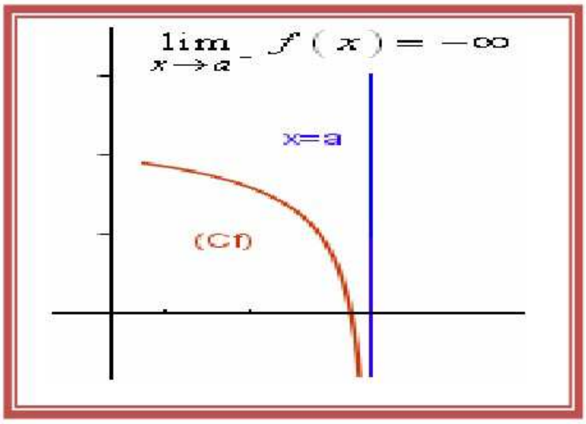
XII الفـــــروع الـــــلانهائـــية :

1. إذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \Leftarrow$ المستقيم $x=a$ مقارب راسي.

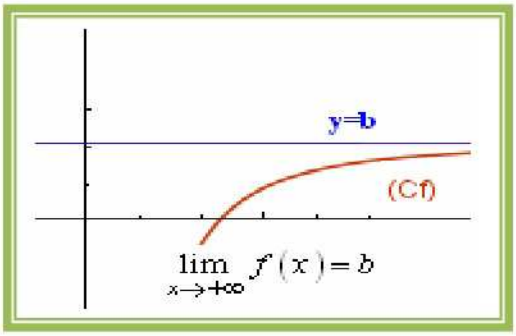


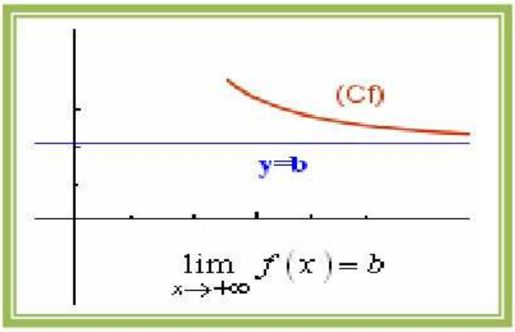


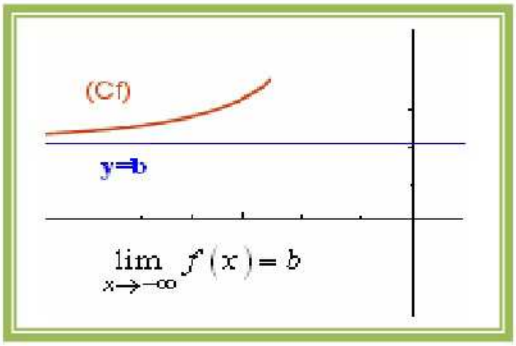


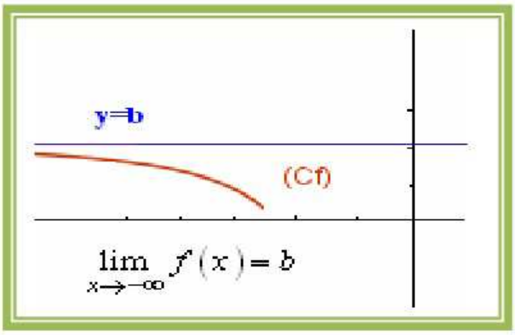


2. **إذا كان** $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ $\Leftarrow$ **المستقيم** $y=b$ **مقارب أفقي.**









3. **إذا كان** $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$ **لنحسب:** $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$:

إذا كان $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ $\Leftarrow$ (C_f) **يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الاراتيب.**

إذا كان $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ $\Leftarrow$ (C_f) **يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الافاصيل.**

إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ فلنحسب: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax$

* إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=0$ $\Leftarrow$ (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم $y=ax$

* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax = b$ $\Leftarrow$ المستقيم $y=ax+b$ مقارب مائل

ملاحظة

دراسة إشارة $f(x)-(ax+b)$ تمكننا من معرفة وضع المنحنى (Cf) بالنسبة للمقارب المائل