الثانية سلك باكالوريا
مسلك العلوم الاقتصادية
مسلك علوم التدبير المحاسباتي

الدوال الأصلية و حساب التكامل

I- الـــــــدوال الأصلـــــــية

تعـــــاريف وخصـــــائـــص

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I. نقول إن دالة F هي **دالة أصلية** للدالة f على I إذا كانت F **قابلة للاشتقاق** على I وكان $\forall x \in I \; F'(x) = f(x)$

خاصية 1 لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية F على I **مجموعة الدوال الأصلية** للدالة f على المجال I هي المجموعة المكونة من الدوال $F+\lambda$ مع $\lambda \in IR$

خاصية 2 لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية F على I ليكن x_0 من I و y_0 من IR توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على مجال I بحيث $F(x_0)=y_0$

خاصية 3 إذا كانت F و G دالتين اصليتين للدالتين f و g على التوالي في مجال I فان

$F+G$ هي دالة أصلية $f+g$ و αF دالة اصلية ل αf (حيث $\alpha \in IR$)

خاصية 4 كل دالة **متصلة** على مجال I تقبل **دالة اصلية** على I

II- جـــــــدول الدوال الأصلية لبعض الدوال الاعتيادية

الدالة f	الدوال الأصلية F	مجموعة التعريف I للدالة f و الدوال F
0	λ	$I=\mathbb{R}$
a	$ax+\lambda$	$I=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{N}^*\quad x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\lambda$	$I=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{Z}^*-\{-1\}\quad x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\lambda$	$I=\mathbb{R}_-^*\quad ou\quad I=\mathbb{R}_+^*$

$r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\}\quad f^r\cdot f'$	$\frac{1}{r+1}f^{r+1}+\lambda$	I هو المجال التي تكون فيه f^r معرفة و f قابلة للاشتقاق
$f+g$	$f+g+\lambda$	I هو المجال التي تكون فيه g و f قابلتان للاشتقاق
$f'g+fg'$	$fg+\lambda$	I هو المجال التي تكون فيه g و f قابلتان للاشتقاق
$\frac{f'g-fg'}{g^2}$	$\frac{f}{g}+\lambda$	I هو المجال التي تكون فيه g و f قابلتان للاشتقاق و لا تنعدم فيه g

$n\in\mathbb{Z}^*-\{-1\}\quad x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\lambda$	$I=\mathbb{R}_-^*\quad ou\quad I=\mathbb{R}_+^*$
$r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\}\quad x^r$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+\lambda$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos(ax+b)\quad a\neq 0$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+\lambda$	$I=\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)\quad a\neq 0$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+\lambda$	$I=\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+\lambda$	$I=\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\ ;k\in\mathbb{Z}$

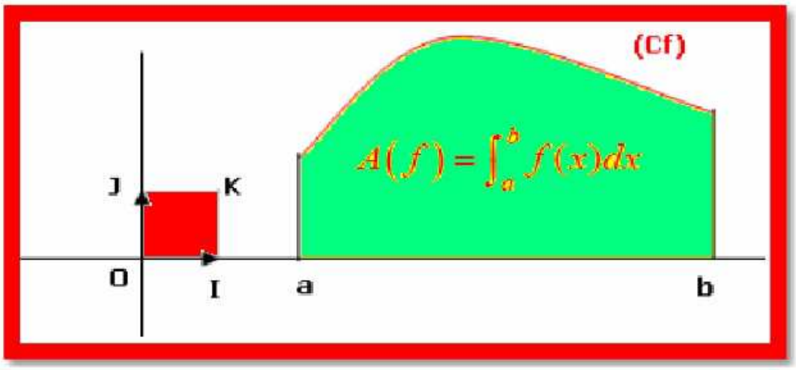
III- حســـــاب التكـــــــامـــــل

1. تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ لدينا : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ حيث

F دالة أصلية للدالة f على $[a;b]$.

التأويل الهندسي للعدد $\int_a^b f(x)dx$



2. خصائص :

$\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ $\qquad \int_b^a kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ هذه الخاصية تسمى الخطانية

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ تسمى علاقة شال

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

3. التكامل والترتيب:

لتكن f دالة متصلة على المجال $[a;b]$ حيث $a \prec b$. $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

4. القيمة المتوسطة لدالة متصلة :

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ $(a \neq b)$.العدد الحقيقي $A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$. يوجد على الأقل $c \in [a;b]$ بحيث

5. تقنيات حساب التكامل :

- استعمال الدوال الأصلية مباشرة
- كتابة دالة جذرية كمجموع دوال جذرية
- اخطاط دوال مثلثية (صيغة اولير ومثلث باسكال)
- المكاملة بالأجزاء

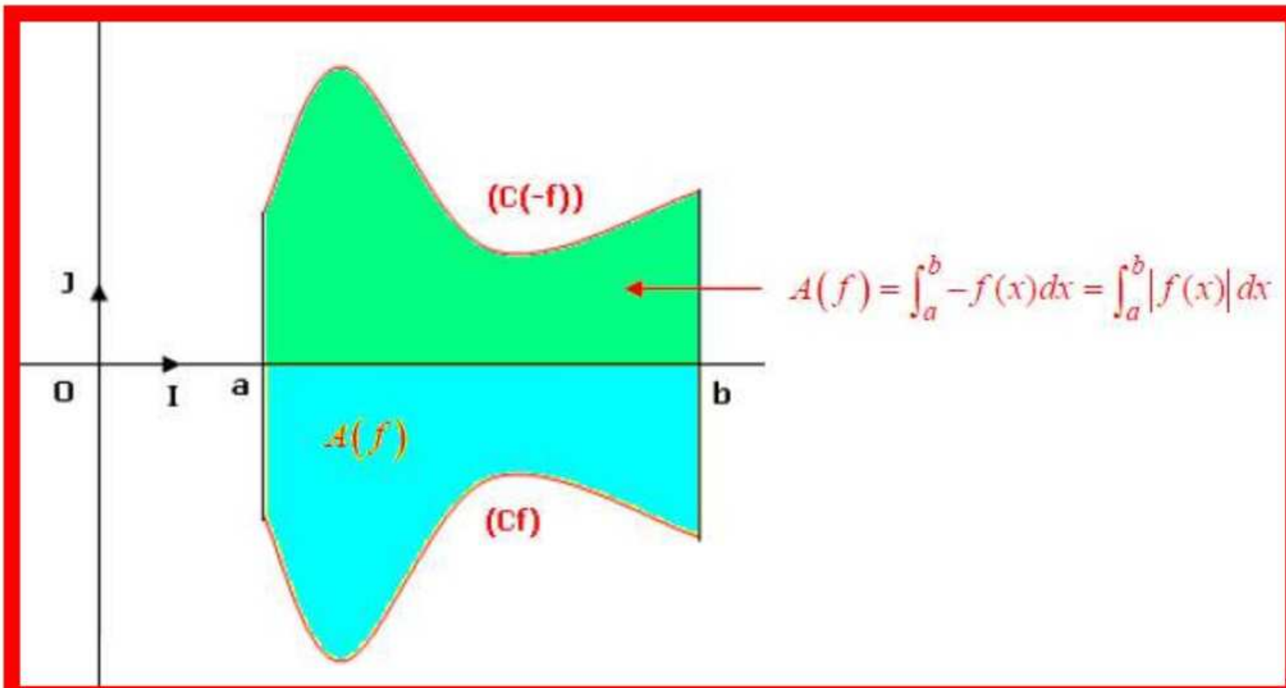
f و g قابلتين للاشتقاق على $[a;b]$ و f' و g' متصلتان على $[a;b]$.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

6. حساب المساحة والحجم:

ا - المساحات :

- اذا كانت f متصلة وموجبة على $[a;b]$ فان مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (ox) و $x=a$ و $x=b$ هي $\int_a^b f(x)dx$.

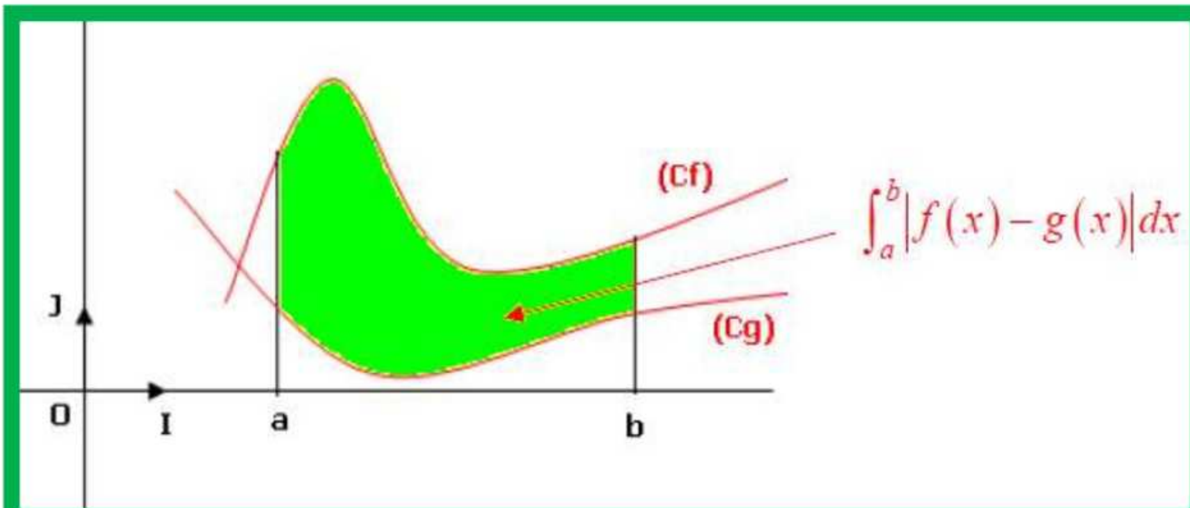


* إذا غيرت إشارتها f على المجال $[a;b]$ فان مساحة الحيز هي:

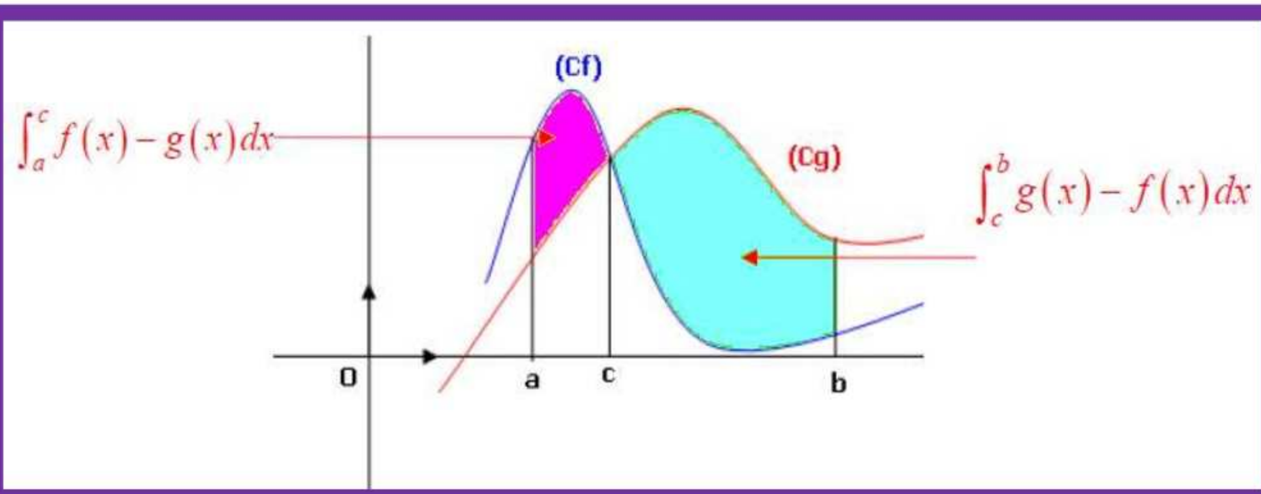
$$A(\Delta)=\left|\int_c^a f(x)dx\right|+\left|\int_d^c f(x)dx\right|+\left|\int_b^d f(x)dx\right|$$

* مساحة الحيز بين (C_f) و (C_g) و $x=a$ و $x=b$ هي $\left|\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right|$ نتكلم عن

المساحة الجبرية والهندسية

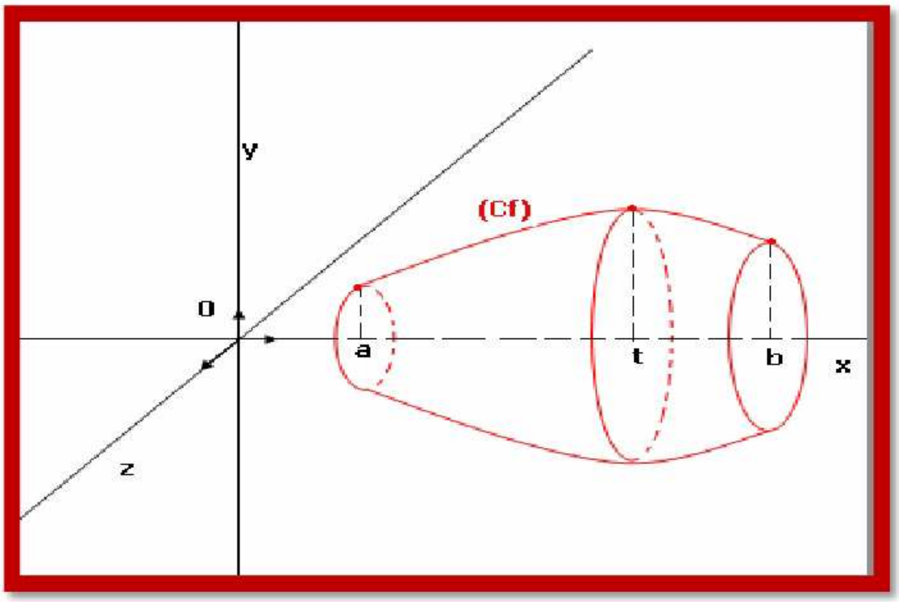


ملاحظة



أ - الحجم

في معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ و f متصلة على $[a;b]$. إذا دار المنحنى على محور الافاصيل دورة كاملة فانه يولد مجسم الدوران



حجمه هو $V=\int_a^b \pi f^2(x)dx$ **بوحدة قياس الحجم**