قوانين التركيب الداخلي
الزمرة ـ الحلقة ـ الجسم

ح.بوعيون

I) تعريف وأمثلة:

1- تعريف:

لتكن E مجموعة غير فارغة. نسمي قانون تركيب داخلي في E كل تطبيق f من E نحو E

$$f: E\times E \to E : \quad (a,b)\to a*b$$

ترميز: العنصر $f(a,b)$ يسمى مركب العنصرين (a,b) ونرمز له عادة ب $a*b$; aTb ; $a\perp b$

إذا كان $*$ قانون تركيب داخلي في E فإننا نكتب $(E,*)$ ونقرأ المجموعة E مزودة بالقانون $*$.

ملاحظة: ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E:

$$(\forall(a,b,c,d)\in E^4)\qquad \begin{cases}a=b\\c=d\end{cases}\Rightarrow a*c=b*d$$

لأن:

$$\begin{cases}a=b\\c=d\end{cases}\Rightarrow (a,c)=(b,d)\Rightarrow f(a,c)=f(b,d)$$
$$\Rightarrow a*c=b*d$$

*) لدينا:

$$(\forall(a,b,c)\in E^3)\begin{cases}a=b\Rightarrow a*c=b*c\\a=b\Rightarrow c*a=c*b\end{cases}$$

2- أمثلة:

1- الجمع والضرب قانونا تركيب داخلي في $\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$

2- $\otimes$ الضرب قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}^+$ لكنه ليس كذلك في $\mathbb{R}^-$. لأن إذا كان $(a,b)\in\mathbb{R}_-^2$ فإن: $(a\times b)\in\mathbb{R}^+$ أي $(a\times b)\notin\mathbb{R}_-$.

3- $\oplus$ جمع متجهتين قانون تركيب داخلي في كل من V_2 وV_3.

4- الجداء السلمي ليس قانون تركيب داخلي في V_2 وV_3.

5- الجداء المتجهي قانون تركيب داخلي في V_3.

6- لتكن E مجموعة غير فارغة و $P(E)$ مجموعة أجزاء E. الاتحاد والتقاطع والفرق التماثلي قوانين تركيب داخلية في $P(E)$.

7- ليكن X جزء من $\mathbb{R}$. ليكن $F(X,\mathbb{R})$ مجموعة الدوال المعرفة من X نحو $\mathbb{R}$. الجمع والضرب المعرفين على $F(X,\mathbb{R})$ كما يلي:

$$(\forall x\in X)\qquad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f.g)(x)=f(x).g(x)$$

قوانين تركيب داخلية في $F(X,\mathbb{R})$.

8- لتكن $A(E,E)$ مجموعة التطبيقات من E نحو E. E مجموعة غير فارغة.
التركيب o المعرف على $A(E,E)$ ب:

$$(\forall x\in E)\qquad (fog)(x)=f(g(x))$$

قانون تركيب داخلي في $A(E,E)$.

9- ليكن T مجموعة إزاحة المستوى. و H_0 مجموعة التحاكيات التي مركزها O. و R_0 مجموعة الدورانات التي لها نفس المركز O. التركيب "o" قانون تركيب داخلي في كل من T وH_0 وR_0.
لأن:

$$T_{\vec u}\,o\,T_{\vec v}=T_{\vec u+\vec v}$$
$$h_{(O,R)}\,o\,h'_{(O,R')}=h_{(O,RR')}$$
$$R_{(o,\alpha)}\,o\,R_{(o,\beta)}=R_{(o,\alpha+\beta)}$$

10- القانون $*$ المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2)\ a*b=a^4+a^3-3a^2b$$

قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}$.

11- نعتبر المجموعة $E=\{1,2,3,6\}$

لنبين أن المضاعف المشترك الأصغر "$\vee$" قانون تركيب داخلي في E.
ولهذا نضع الجدول التالي الذي يسمى جدول القانون في E أو جدول (E,v).

$\vee$	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

نلاحظ أن مركب أي عنصر من E هو عنصر من E. وبالتالي القانون "$\vee$" قانون تركيب داخلي في E.

3- جزء مستقر بالنسبة لقانون تركيب داخلي:

a) تعريف:

لتكن E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$. وليكن S جزءا من E $(S\subset E)$.
نقول إن S جزء مستقر من $(E,*)$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall(x,y)\in S^2)\quad x*y\in S$$

b) أمثلة:

1- $\mathbb{R}^+$ جزء مستقر من $(\mathbb{R},\times)$

2- $\mathbb{R}_-$ ليس جزءا مستقرا من $(\mathbb{R},\times)$

3- نعتبر المجموعة: $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$

$$(\forall(z,z')\in U^2):|z.z'|=|z|.|z'|=1.1=1$$

إذن: $(\forall(z,z')\in U^2):zz'\in U$

إذن U جزء مستقر من $(\mathbb{C},\times)$

ملاحظة:

إذا كان S جزءا مستقرا من $(E,*)$ فإن $*$ قانون تركيب داخلي في S.

II) خاصيات قوانين التركيب الداخلي:

1- التجميعية والتبادلية:

a) تعريف:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E.

1) نقول إن القانون $*$تجميعي في E إذا وفقط إذا كان

$$\left(\forall(a,b,c)\in E^{3}\right)\ a*(b*c)=(a*b)*c$$

2) نقول إن القانون $*$ تبادلي في E إذا وفقط إذا كان

$$\left(\forall(a,b)\in E^{2}\right)\quad a*b=b*a$$

ملاحظة:

إذا كان القانون $*$ تجميعي فإن:

$$a*(b*c)=a*b*c$$

b) أمثلة:

القوانين (1)، (3)، (6)، (7) و (9) التي رأيناها في أمثلة قوانين التركيب الداخلية كلها تجميعية وتبادلية (الفقرة I).

. لنبين على (7) و (9) :

لنبين أن الجمع تجميعي في $F(X,\mathbb{R})$:

ليكن f و g و h من $F(X,\mathbb{R})$. لنبين أن:

$$f+(g+h)=(f+g)+h$$

يعني: $(f+(g+h))(x)=((f+g)+h)(x)$

لدينا :

$$\begin{aligned}(\forall x\in X)(f+(g+h))(x)&=f(x)+(g+h)(x)\\&=f(x)+g(x)+h(x)\\&=(f(x)+g(x))+h(x)\\&=(f+g)(x)+h(x)\\&=((f+g)+h)(x)\end{aligned}$$

(لأن الجمع تجميعي في $\mathbb{R}$).

إذن $f+(g+h)=(f+g)+h$ ومنه الجمع تجميعي في $F(X,\mathbb{R})$.

لنبين أن o تجميعي في T

نعتبر $t_{\vec{u}}$ و $t_{\vec{v}}$ و $t_{\vec{w}}$ من T لنبين أن:

$$t_{\vec{u}}o(t_{\vec{v}}ot_{\vec{w}})=(t_{\vec{u}}ot_{\vec{v}})ot_{\vec{w}}$$

لدينا:

$$\begin{aligned}t_{\vec{u}}o(t_{\vec{v}}ot_{\vec{w}})&=t_{\vec{u}}ot_{\vec{v}+\vec{w}}\\&=t_{\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})}=t_{(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}}=t_{\vec{u}+\vec{v}}ot_{\vec{w}}\\&=(t_{\vec{u}}ot_{\vec{v}})ot_{\vec{w}}\end{aligned}$$

(لأن الجمع تجميعي في V_3).

إذن:

$$\left(\forall(t_{\vec{u}},t_{\vec{v}},t_{\vec{w}})\in T^{3}\right);t_{\vec{u}}o(t_{\vec{v}}ot_{\vec{w}})=(t_{\vec{u}}ot_{\vec{v}})ot_{\vec{w}}$$

إذن o تجميعي في T.

ملاحظة:

. الجداد المتجهي ليس تجميعيا ولا تبادليا في V_3

. ليكن $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم م.م مباشر.

← لدينا $\vec{i}\wedge\vec{j}=-\vec{j}\wedge\vec{i}$ إذن "$\wedge$" ليس تبادليا.

← لدينا $(\vec{i}\wedge\vec{j})\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$

و $\vec{i}\wedge(\vec{j}\wedge\vec{j})=\vec{i}\wedge\vec{0}=\vec{0}$

إذن $(\vec{i}\wedge\vec{j})\wedge\vec{j}\neq\vec{i}\wedge(\vec{j}\wedge\vec{j})$

ومنه "$\wedge$" (الجداد المتجهي) ليس تجميعيا في V_3.

تمرين تطبيقي:

نعتبر القانون $*$ المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$x*y=x+y+xy$$

ادرس تجميعية وتبادلية القانون $*$.

. التبادلية:

لدينا: $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{2}\right)x*y=x+y+xy$

$$=y+x+yx=y*x$$

إذن $x*y=y*x$ ومنه $*$ تبادلي.

. التجميعية:

ليكن x و y و z من $\mathbb{R}$ لنتحقق هل:

$$(x*y)*z=x*(y*z)$$

لدينا:

$$\begin{aligned}(x*y)*z&=(x+y+xy)*z\\&=x+y+xy+z+(x+y+xy)z\\&=x+y+xy+z+xz+yz+xyz\quad(1)\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}x*(y*z)&=x*(y+z+yz)\\&=x+y+z+yz+x(y+z+yz)\\&=x+y+z+yz+xy+xz+xyz\quad(2)\end{aligned}$$

وبما أن (2) و (1) فإن $*$ تجميعي:

$$\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^{3}\right)\ (x*y)*z=x*(y*z)$$

c) تجميعية مركب تطبيقي:

خاصية:

نعتبر التطبيقات من:

$$E\to F\to G\to H$$

لدينا: $ho(gof)=(hog)of$

هذا لا يعني أن o تجميعي.

– لنبين أن: $ho(gof)=(hog)of$

يعني:

$$(\forall x\in E)\ \ (ho(gof))(x)=((hog)of)(x)$$

– ليكن $x\in E$

نضع $y=f(x)$ و $z=g(y)$ و $h(z)=t$

لدينا:

$$\begin{aligned}((hog)of)(x)&=(hog)(f(x))=(hog)(y)\\&=h(g(y))=h(z)=t\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}(ho(gof))(x)&=h((gof)(x))\\&=h(g(f(x)))=h(g(y))\\&=h(z)=t\end{aligned}$$

إذن:

$$(\forall x\in E)((hog)of)(x)=(ho(gof))(x)$$

ومنه: $(hog)of=ho(gof)$

حالة خاصة:

ليكن $A(E,E)$ مجموعة التطبيقات من E نحو E.
لدينا "o" قانون تجميعي غير تبادلي في $A(E,E)$.

2- العنصر المحايد:

a) تعريف:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E. و $e\in E$.
نقول إن e عنصر محايد في E بالنسبة للقانون $*$ أو عنصر محايد في $(E,*)$ إذا وفقط إذاكان:
$$(\forall x\in E)\ e*x=x \ \ et\ \ x*e=x$$

ملاحظة:

إذا كان القانون $*$ تبادلي فإن e عنصر محايد إذا وفقط إذا كان:
$$(\forall x\in E)\ \ x*e=x$$

b) أمثلة:

← العدد 0 هو العنصر المحايد في كل من $(\mathbb{C},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{Z},+),(\mathbb{N},+)$

← العدد 1 هو العنصر المحايد في كل من $(\mathbb{C},\times),(\mathbb{R},\times),(\mathbb{Q},\times),(\mathbb{Z},\times),(\mathbb{N},\times)$

← $\vec{0}$ هو العنصر المحايد في كل من: $(V_3,+),(V_2,+)$

← $\varnothing$ هو العنصر المحايد في $(P(E),\cup)$

← E هو العنصر المحايد في $(P(E),\cap)$

← $\varnothing$ هو العنصر المحايد في $(P(E),\Delta)$

← الدالة $\theta:x\to 0$ هو العنصر المحايد في $(F(X,\mathbb{R}),+)$

← الدالة $f:x\to 1$ هو العنصر المحايد في $(F(X,\mathbb{R}),\times)$

← التطبيق المطابق $Id_E:x\to x$ عنصر محايد في $(A(E,E),o)$ $(foId_E=Id_Eof=f)$

ملاحظة:

نعتبر القانون $*$ المعرف على $\mathbb{N}^*$ بما يلي:
$$(\forall(a,b)\in\mathbb{N}^{*2})\ \ a*b=a^b$$
لدينا: $(\forall a\in\mathbb{N}^*)a*1=a^1=a$ (1)

ولدينا: $1*a=1^a=1$

إذن 1 ليس عنصر محايدا.

وبما أنه يحقق (1) نقول إن 1 محايد على اليمين.

تعريف:

← نقول إن e عنصر محايد على اليمين في $(E,*)$ إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in E)\ x*e=x$

← نقول إن e عنصر محايد على اليسار في $(E,*)$ إذا وفقط إذا كان $(\forall x\in E)\ e*x=x$

← يكون e محايدا إذا وفقط إذا كان محايد E على اليمين وعلى اليسار.

c) وحدانية العنصر المحايد:

خاصية:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E. إذا كان للقانون $*$ عنصرا محايد فإنه وحيد.

برهان:

نفترض أن $*$ يقبل عنصرين محايدين e و e'

– لدينا e عنصر محايد و $e'\in E$ إذن: $e*e'=e'$

ولدينا e' عنصر محايد و $e\in E$ إذن: $e*e'=e$

إذن $e'=e$

ومنه العنصر المحايد وحيد. (إذا كان موجودا).

تمارين تطبيقي:

تمرين (1):

نعتبر $*$ القانون المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)x*y=xy-4x-4y+20$$
– هل للقانون $*$عنصر محايد؟

. لنبحث عن e من $\mathbb{R}$ بحيث: $(\forall x\in\mathbb{R})e*x=x*e=x$

ونلاحظ أن $*$تبادلي. إذن يكفي أن نبحث عن e بحيث:
$$(\forall x\in\mathbb{R})e*x=x$$
لدينا:
$$(\forall x\in\mathbb{R})e*x=x \Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{R})ex-4e-4x+20-x=0$$
$$\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R})x(e-5)-4e+20=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}e-5=0\\20-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e=5\\e=5\end{cases}$$
إذن $e=5$ هو العنصر المحايد للقانون $*$.

تمرين (2):

نعتبر القانون $*$ المعرف على $\mathbb{R}$ ب:
$$(\forall x,y\in\mathbb{R})x*y=x+4y-1$$
هل للقانون $*$ عنصر محايد؟

. لنبحث عن e من $\mathbb{R}$ بحيث $(\forall x\in\mathbb{R})x*e=e*x=x$

يعني: $(\forall x\in\mathbb{R})x*e=x\ \ et\ \ e*x=x$

– لدينا:
$$(\forall x\in\mathbb{R})e*x=x\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R})e+4x-1=x$$
$$\Leftrightarrow(\forall x\in\mathbb{R})e+3x-1=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}3=0\\e-1=0\end{cases}$$
وهذا مستحيل.

إذن $*$ لا يقبل عنصرا محايدا في $\mathbb{R}$.

3- العنصر المماثل:

a) تعريف:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E. نفترض أن $*$ يقبل عنصرا محايدا e.
نقول إن عنصرا x من E يقبل مماثلا بالنسبة ل $*$ إذا وفقط إذا وجد عنصر x' من E بحيث:
$$x*x'=x'*x=e$$

ملاحظة:

إذا كان القانون $*$ تبادلي نكتفي بإحدى المتساويتين.

b) أمثلة:

← في كل من $(\mathbb{C},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{Z},+)$ كل عنصر x يقبل مماثلا هو $-x$.

← في $(\mathbb{C}^*,\times);(\mathbb{R}^*,\times);(\mathbb{Q}^*,\times)$ كل عنصر x يقبل مماثلا هو $\frac{1}{x}$.

لأن: $x.\frac{1}{x}=\frac{1}{x}x=1$

← ليكن $B(E,E)$ مجموعة التقابلات من E نحو E.

لدينا "o" قانون تركيب داخلي في $B(E,E)$ العنصره المحايد هو التطبيق الطابق Id_E.

كل عنصر f من $B(E,E)$ له مماثل هو تقابله العكسي f^{-1}

لأن: $fof^{-1} = f^{-1}of = Id_E$

c) خاصيات:

خاصية (1):

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E.
نفترض أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا e وتجميعي. إذا كان لعنصر x مماثل x' فإن هذا المماثل وحيد.

برهان:

نفترض أن x يقبل مماثلين x' و x''.

يعني: $x*x'=x'*x=e$

$x*x''=x''*x=e$

– لدينا:

$$x'=x'*e=x'*(x*x'')=(x'*x)*x''$$
$$=e*x''=x''$$

إذن $x'=x''$.

خاصية (2):

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E.
نفترض أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا e وتجميعي.
إذا كان لعنصرين x و y مماثلان x' و y' فإن: $x*y$ يقبل مماثلا هو $y'*x'$.
يعني: $(x*y)'=y'*x'$.

برهان:

لدينا:

$$(x*y)*(y'*x')$$
$$=x*(y*y')*x'=x*e*x'$$
$$=(x*e)*x'=x*x'=e$$

وبنفس الطريقة نجد: $(y'*x')*(x*y)=e$

استنتاج:

ليكن f و g من $B(E,E)$.

مماثل f هو f^{-1} ومماثل g هو g^{-1}.

مماثل fog هو $g^{-1}of^{-1}$.

ونعلم أن مماثل fog هو $(fog)^{-1}$

إذن: $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$

تمرين:

نعتبر القانون $*$ المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$x*y=xy-4x-4y+20$

من خلال ما سبق 5 هو العنصر المحايد.
– حدد العناصر التي تقبل مماثلا.

ليكن $x\in\mathbb{R}$

لنتحقق هل x يقبل مماثلا.

لنبحث عن x' بحيث $x*x'=5$ (القانون تبادلي).

لدينا: $x*x'=5 \Leftrightarrow xx'-4x-4x'+20=5$

$\Leftrightarrow x'(x-4)=4x-15$

← إذا كان $x\neq 4$

فإن: $x'=\dfrac{4x-15}{x-4}$ ومنه x يقبل مماثلا هو $\dfrac{4x-15}{x-4}$

← إذا كان $x=4$

فإن $o=1$ ومنه 4 لا يقبل مماثلا

إذن مجموعة العناصر التي تقبل مماثلا هي: $\mathbb{R}-\{4\}$

والمماثل هو: $\dfrac{4x-15}{x-4}$.

4– العنصر المنتظم:

a) تعريف:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E. نقول إن عنصرا a من E منتظم إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall(x,y)\in E^2)\begin{cases}a*x=a*y\Rightarrow x=y\\ x*a=y*a\Rightarrow x=y\end{cases}$$

ملاحظة:

إذا كان القانون $*$ تبادلي فإن أحد الاستلزامين كاف.

b) أمثلة:

← جميع عناصر كل من المجموعات $\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ منتظمة بالنسبة للجمع لأن: $a+x=a+y\Rightarrow x=y$

← في كل من $\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ كل عنصر $a\neq 0$ منتظم بالنسبة للضرب لأن: $ax=ay\Rightarrow x=y$

تمرين:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E، تجميعي.
e العنصر المحايد في $(E,*)$. ليكن $a\in E$.
– بين أنه إذا كان a يقبل مماثلا فإن a منتظم.

نفترض أن a يقبل مماثلا a'

لنبين أن a منتظم أي: $(\forall(x,y)\in E^2)$

$a*x=a*y\Rightarrow x=y$

$x*a=y*a\Rightarrow x=y$

لدينا:

$$a*x=a*y\Rightarrow a'*(a*x)=a'*(a*y)$$
$$\Rightarrow(a'*a)*x=(a'*a)*y$$
$$\Rightarrow e*x=e*y$$
$$\Rightarrow x=y$$

وبنفس الطريقة نبين أن: $x*a=y*a\Rightarrow x=y$

إذن a منتظم.

III) التشاكل:

1– تعريف وأمثلة:

a) تعريف:

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E.
و $\top$ قانون تركيب داخلي في F.
نسمي تشاكل من $(E,*)$ نحو $(F,\top)$ كل تطبيق $f:E\rightarrow F$ يحقق ما يلي:
$(\forall(x,y)\in E^2):f(x*y)=f(x)\top f(y)$.

b) أمثلة:

1- نعتبر التطبيق: $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R},+)$

$$x\to ax$$

لنبين أن f تشاكل.

يعني: $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\, f(x+y)=f(x)+f(y)$

- لدينا: $f(x+y)=a(x+y)=ax+ay$
$$=f(x)+f(y)$$

إذن:

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\, f(x+y)=f(x)+f(y)$$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(\mathbb{R},+)$.

2- نعتبر $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$

$r\to a^r$ مع $(a\in\mathbb{R}_+^*)$

بين أن f تشاكل من $(\mathbb{Q},+)$ نحو $(\mathbb{R},\times)$

- ليكن r و r' من $\mathbb{Q}$.

لنبين أن: $f(r+r')=f(r)\times f(r')$

لدينا:

$$f(r+r')=a^{r+r'}=a^r\times a^{r'}=f(r)\times f(r')$$

إذن: $(V(r,r')\in\mathbb{Q}^2)\, f(r+r')=f(r).f(r')$

ومنه f تشاكل من $(\mathbb{Q},+)$ نحو $(\mathbb{R},\times)$.

تمارين تطبيقية:

تمرين 1:

نعرف في $\mathbb{R}^2$ جمع زوجين وجداء زوجين بما يلي:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$
$$(x,y).(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y)$$

ونعتبر التطبيق $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$

$$z=a+ib\to(a,b)$$

بين أن f تشاكل من $(\mathbb{C},+)$ نحو $(\mathbb{R}^2,+)$

بين أن f تشاكل من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(\mathbb{R}^2,\times)$

← لنبين أن f تشاكل من $(\mathbb{C},+)$ نحو $(\mathbb{R}^2,+)$.

ليكن $z'=a'+ib'$ et $z=a+ib$

لنبين أن: $f(z+z')=f(z)+f(z')$

لدينا:

$$z+z'=(a+ib)+(a'+ib')$$
$$=(a+a')+i(b+b')$$

إذن:

$$f(z+z')=(a+a',b+b')$$
$$=(a,b)+(a',b')=f(z)+f(z')$$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{C},+)$ نحو $(\mathbb{R}^2,+)$.

← لنبين أن f تشاكل من $(\mathbb{C},+)$ نحو $(\mathbb{R}^2,+)$.

ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ ولنبين أن: $f(z.z')=f(z).f(z')$

لدينا:

$$z.z'=(a+ib).(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$$

إذن:

$$f(z.z')=(aa'-bb',ab'+a'b)$$

ولدينا:

$$f(z).f(z')=(a,b).(a',b')$$
$$=(aa'-bb',ab'+a'b)$$

إذن $f(z.z')=f(z).f(z')$

ومنه f تشاكل من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(\mathbb{R}^2,\times)$

تمرين 2:

نعتبر المجموعة $A=\{f_{(a,b)}:x\to ax+b\ /\ (a,b)\in IR^2\}$

ونعرف على IR^2 القانون T بمايلي $(a,b)T(a',b')=(aa',ab'+b)$ ونعتبر التطبيق

$$\varphi:(A,\circ)\to(IR\ ,T)$$
$$f_{(a,b)}\to(a,b)$$

بين أن φ تشاكل

يكون φ تشاكل من (A,o) نحو $(\mathbb{R}^2,\mathrm{T})$ إذا وفقط إذا كان:

$$\left(\forall\left(f_{(a,b)},f_{(a',b')}\right)\in A^2\right):$$
$$\varphi\left(f_{(a,b)}of_{(a',b')}\right)=\varphi\left(f_{(a,b)}\right)\mathrm{T}\varphi\left(f_{(a',b')}\right)$$

لدينا

$$(\forall x\in\mathbb{R})\left(f_{(a,b)}of_{(a',b')}\right)(x)=f_{(a,b)}\left(f_{(a',b')}(x)\right)$$
$$=f_{(a,b)}(a'x+b')$$
$$=a(a'x+b')+b$$
$$=aa'x+ab'+b$$

إذن:

$$\varphi\left(f_{(a,b)}of_{(a',b')}\right)=(aa',ab'+b)$$
$$=(a,b)T(a',b')$$
$$=\varphi(f_{(a,b)})T\,\varphi(f_{(a',b')})$$

ومنه: φ تشاكل

2- خاصيات:

خاصية1

> ليكن f تشاكل من $(E,*)$ نحو (F,T)
> لدينا $f(E)$ جزء مستقر من (F,T).

برهان:

$f:(E,*)\to(F,\mathrm{T})$ تشاكل.

لنبين أن $f(E)$ مستقر من (F,T)

*) لدينا $f(E)\subset F$

*) ليكن x' و y' من $f(E)$. لنبين أن: $x'\mathrm{T}y'\in f(E)$.

لدينا x' و y' من $f(E)$. إذن يوجد x و y من E بحيث:

$$x'=f(x) \text{ و } y'=f(y)$$

إذن:

$$x'\mathrm{T}y'=f(x)\mathrm{T}f(y)=f(x*y)$$

ولدينا $x*y\in E$

إذن $f(x*y)\in f(E)$ يعني: $x'\mathrm{T}y'\in f(E)$

إذن $f(E)$ مستقر من (F,T).

ملاحظة:

إذا كان f تشاكل من $(E,*)$ نحو (F,T) فإن T قانون تركيب داخلي في $f(E)$.

خاصية (2):

ليكن $f:(E,*)\to(F,\top)$ تشاكلا.

*) إذا كان $*$ تجميعي في E فإن $\top$ تجميعي في $f(E)$.

*) إذا كان $*$ تبادلي في E فإن $\top$ تبادلي في $f(E)$.

*) إذا كان ل $*$ عنصر محايد e في E فإن $\top$ يقبل مماثلا في $(f(E),\top)$ هو $f(x')$ يعني: $(f(x))'=f(x')$.

برهان:

$f:(E,*)\to(F,\top)$ تشاكل.

← نفترض أن $*$ تجميعي في E. لنبين أن $\top$ تجميعي في $f(E)$.

ليكن x',y',z' من $f(E)$. لنبين أن $x'\top(y'\top z')=(x'\top y')\top z'$.

لدينا $x',y',z'\in f(E)$. إذن يوجد z,y,x من E بحيث:

$$x'=f(x)\ ;\ y'=f(y)\ ;\ z'=f(z)$$

إذن:

$$\begin{aligned}(x'\top y')\top z' &= (f(x)\top f(y))\top f(z)\\ &= f(x*y)\top f(z)\\ &= f\left[(x*y)*z\right]\\ &= f\left[x*(y*z)\right]=f(x)\top f(y*z)\\ &= f(x)\top(f(y)\top f(z))\end{aligned}$$

إذن: $(x'\top y')\top z'=x'\top(y'\top z')$

ومنه $\top$ تجميعي في (E)

+ بنفس الطريقة نبين أن $\top$ تبادلي في $f(E)$.

+ نفترض أن e عنصر محايد في $(E,*)$. لنبين أن $f(e)$ عنصر محايد في $f(E)$.

ليكن x' من $f(E)$. لنبين أن: $x'\top f(e)=f(e)\top x'=x'$

لدينا $x'\in f(E)$ إذن يوجد x من E بحيث $x'=f(x)$.

بنفس الطريقة نجد: $f(e)\top x'=x'$

إذن $f(e)$ هو العنصر المحايد في $f(E)$.

← نفترض أن x' هو مماثل x في $(E,*)$. لنبين أن $f(x')$ هو مماثل $f(x)$ في $(f(E),\top)$.

يعني: $f(x)\top f(x')=f(x')\top f(x)=f(e)$

لدينا:

$$f(x)\top f(x')=f(x*x')=f(e)$$
$$f(x')\top f(x)=f(x'*x)=f(e)$$

إذن $f(x')$ هو مماثل $f(x)$ في $(f(E),\top)$.

ملاحظة:

1) إذا كان $f:(E,*)\to(F,\top)$. تشاكلا فإن f ينقل خاصيات $*$في E إلى $\top$ في $f(E)$.

وإذا كان f شمولي فإن $f(E)=F$ وبالتالي f ينقل خاصيات $*$ في E إلى $\top$ في F.

2) نقول إن مجموعتين E وF متشاكلتان إذا وفقط إذا وجد تشاكل من E نحو F.

– ونقول إن E وF متشاكلتان تقابليا إذا وفقط إذا وجد تشاكل تقابلي من E نحو F.

IV) الزمرة: Groupe

1- تعريف:

لتكن G مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي * نقول إن $(G,*)$ زمرة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

← " * " تجميعي في G

← " * " يقبل عنصرا محايدا.

← كل عنصرمن G يقبل مماثلا.

ملاحظات:

ليكن $(G,*)$ زمرة.

← إذا كان " * " تبادلي، نقول إن $(G,*)$ زمرة تبادلية أو أبيلية (Abelien).

← إذا كانت G منتهية. نقول إن $(G,*)$ زمرة منتهية.

← يمكن أن نرمز للقانون " * " بالجمع " + " (دون أن يكون هو الجمع المعتاد) وفي هذه الحالة نرمز للعنصر المحايد ب " 0 ". ونرمز لمماثل xب $-x$.

← يمكن أن نرمز للقانون " * " بالضرب " . " (دون أن يكون هو الضرب الاعتيادي). وفي هذه الحالة نرمز للعنصر المحايد ب 1. ولمماثل xب x^{-1}.

2 – أمثلة:

← كل من $(\mathbb{C},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{Z},+)$ زمرة تبادلية.

← كل من $(\mathbb{C}^*,\times),(\mathbb{R}^*,\times),(\mathbb{Q}^*,\times)$ زمر تبادلية.

← كل من $(V_2,+)$ و $(V_3,+)$ زمرة تبادلية.

← $(F(X,\mathbb{R}),+)$ زمرة تبادلية.

← $(B(E,E),o)$ (مجموعة التقابلات)، زمرة غير تبادلية.

← كل من $(R_o,o),(H_o,o),(T,o)$ زمر تبادلية.

← $(P(E),\cup)$ و $(P(E),\cap)$ ليسا زمرتين.

← $(P(E),\Delta)$ زمرة تبادلية.

3- خاصيات

خاصية (1):

لتكن $(G,*)$ زمرة. لدينا ما يلي:

← " * " تجميعي.

← " * " يقبل عنصرا محايدا.

← كل عنصر x من G يقبل مماثلا x' في G.

← كل عنصر a من G منتظم (لأنه يقبل مماثلا).

← $(\forall(a,x,y)\in G^3)\quad a*x=a*y\Leftrightarrow x=y$

$$x*a=y*a\Leftrightarrow x=y$$

نلخص هذه الخاصية بقولنا: يمكن الاختزال في زمرة وبدون شروط.

خاصية (2):

لتكن $(G,*)$ زمرة. وليكن a وb من G.

كل من المعادلتين: $a*x=b\ (1)$ و $x*a=b\ (2)$ تقبل حلا وحيدا في G.

برهان:

$$(1) \Leftrightarrow a * x = b$$
$$\Leftrightarrow a' * a * x = a' * b$$
$$\Leftrightarrow e * x = a' * b$$
$$\Leftrightarrow x = a' * b$$

إذن (1) تقبل حلا وحيدا في G هو $a' * b$

– بنفس الطريقة نجد أن (2) تقبل حلا وحيدا في G : $b * a'$

استنتاج:

ليكن $(G,*)$ زمرة. وليكن $a \in G$.

نعتبر التطبيق $f : G \to G$ ، $x \to a * x$ و $g : G \to G$ ، $x \to x * a$

التطبيقان f و g تقابلان.

4- زمرة جزئية: Sous - groupe

a) تعريف:

لتكن $(G,*)$ زمرة. و H جزء مستقر من $(G,*)$.

نقول إن $(H,*)$ زمرة جزئية ل $(G,*)$ أو H زمرة جزئية ل G:
إذا وفقط إذا كان $(H,*)$ زمرة.

b) أمثلة:

← $(\mathbb{Q},+)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{R},+)$.

← $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{C}^*,\times)$.

← لتكن $B(P,P)$ مجموعة تقابلات المستوى.

كل من $(R_o,o),(H_o,o),(T,o)$ زمرة جزئية ل $(B(P,P),o)$.

← ليكن $(G,*)$ زمرة عنصرها المحايد e.

لدينا $(\{e\},*)$ زمرة جزئية ل $(G,*)$.

و $(G,*)$ زمرة جزئية ل $(G,*)$.

وكل زمرة جزئية H تخالف هتين الزمرتين تسمى زمرة جزئية فعلية (non trivial)

ملاحظة:

يمكن لزمرة G أن تكون غير تبادلية لكن الزمرة الجزئية تبادلية.

– **مثال:** $(B(P,P),o)$ غير تبادلية.

لكن (T,o) تبادلية.

c) خاصيات:

خاصية (1):

لتكن $(G,*)$ زمرة عنصرها المحايد e ولتكن H زمرة جزئية ل $(G,*)$.

لدينا ما يلي:

← $H \neq \varnothing$

← e هو العنصر المحايد في H.

← إذا كان $x \in H$ و x' مماثل x في G، فإن $x' \in H$.

← $(\forall (x,y) \in H^2) : x * y' \in H$

حيث y' مماثل y في G.

برهان:

*) لدينا $H \neq \varnothing$ لأنها تضم العنصر المحايد.

*) لنبين أن e هو العنصر المحايد في H:

ليكن e' العنصر المحايد في H.

لنبين أن $e = e'$:

ليكن $x \in H$

لدينا e' هو العنصر المحايد في H. إذن: $x * e' = x$ (1)

ولدينا $H \subset G$ إذن $x \in G$. ولدينا e هو العنصر المحايد في G إذن $x * e = x$ (2).

من (1) و (2) نجد: $x * e' = x * e$

إذن: $e' = e$

إذن e هو العنصر المحايد في H.

*) ليكن $x \in H$ و x' مماثل x في G.

لنبين أن x' ينتمي ل H.

ليكن x'' مماثل x في H.

لدينا: $\begin{cases} x * x' = e \\ x * x'' = e' = e \end{cases}$ إذن $x * x' = x * x''$

إذن $x' = x''$

ومنه $x' \in H$

*) ليكن x و y من H. و y' مماثل y في G.

لنبين أن $x * y' \in H$.

لدينا $y \in H$. ومن خلال ما سبق $y' \in H$.

إذن: $\begin{cases} x \in H \\ y' \in H \end{cases}$ إذن $x * y' \in H$ لأن H جزء مستقر من G.

خاصية (2):

ليكن $(G,*)$ زمرة. و H جزء من G.

تكون H زمرة جزئية ل $(G,*)$ إذا وفقط إذا كان:

*) $H \neq \varnothing$.

*) $(\forall (x,y) \in H^2)\ x * y' \in H$

حيث y' مماثل y في G.

برهان:

*) نفترض أن H زمرة جزئية ل $(G,*)$.

من خلال الخاصية السابقة لدينا:

$H \neq \varnothing$

و $(\forall (x,y) \in H^2)\ x * y' \in H$ مع y' مماثل y في G.

*) نفترض أن

$H \neq \varnothing$ و $(\forall (x,y) \in H^2)\ x * y' \in H$ (II)

لنبين أن H زمرة جزئية ل $(G,*)$.

1- لدينا $H \neq \varnothing$ إذن يوجد a : $a \in H$.

لدينا $(a,a) \in H^2$

إذن من خلال (II): $a * a' \in H$

يعني: $e \in H$

2- ليكن $x \in H$.

لدينا $(e,x) \in H^2$ إذن: $e * x' \in H$

يعني: $x' \in H$

إذن $(\forall x \in H) :\ x' \in H$

حيث x' هو مماثل x في G.

3- ليكن x و y من H

من خلال ما سبق نستنتج أن $y' \in H$.

إذن $(x, y') \in H^2$ ومن (II) نجد: $x*(y')' \in H$

يعني: $x*y \in H$

إذن H جزء مستقر.

ومنه القانون * قانون تركيب داخلي في H.

4- لنبين أن $(H,*)$ زمرة:

- * تجميعي في G إذن * تجميعي في H

- $e \in H$ و $(\forall x \in H): e*x = x*e = x$:

إذن e العنصر المحايد في H.

- ليكن $x \in H$.

لدينا $x \in G$ إذن x يقبل مماثل x' في G. يعني: $x*x' = x'*x = e$ ومن خلال ما سبق لدينا $x' \in H$.

إذن x' هو مماثل x في H. وبالتالي $(H,*)$ زمرة جزئية.

ملاحظة:

1- *) إذا رمزنا للقانون " * " ب " + " فإن الخاصية المميزة تصبح:

- $H \neq \varnothing$

- $(\forall (x,y) \in H^2) x - y \in H$

*) إذا رمزنا للقانون * ب " $\times$ " فإن الخاصية المميزة تصبح:

- $H \neq \varnothing$

- $(\forall (x,y) \in H^2) x.y^{-1} \in H$

2- لتكن $(G,*)$ زمرة و $H \subset G$

تكون $(H,*)$ زمرة جزئية ل $(G,*)$ إذا وفقط إذا كان:

*) $H \neq \varnothing$

*) $(\forall (x,y) \in H^2)\ x + y \in H$

*) $(\forall x \in H): x' \in H$ (x' مماثل x في G).

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

نعتبر المجموعة: $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

بين أن $(U,\times)$ زمرة تبادلية.

*) لنبين أن $(U,\times)$ زمرة تبادلية:

نعلم أن $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية.

إذن يكفي أن نبين أن $(U,\times)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{C}^*,\times)$.

← لدينا:

$$(\forall z \in U): |z| = 1$$

إذن: $z \neq 0$

إذن: $z \in \mathbb{C}^*$

إذن: $U \in \mathbb{C}^*$

← لدينا $U \neq \varnothing$ (لأن $1 \in U$).

← ليكن z_1 و z_2 من U. لنبين أن: $z_1 \times z_2^{-1} \in U$

لدينا: $|z_1 \times z_2^{-1}| = |z_1| \times \left|\frac{1}{z_2}\right|$

$$= |z_1| \times \frac{1}{|z_2|} = 1$$

لأن $|z_1| = 1$

و $|z_2| = 1$

إذن: $z_1 \times z_2^{-1} \in U$

وبالتالي فإن U زمرة جزئية ل $(\mathbb{C}^*,\times)$.

ومنه فإن $(U,\times)$ زمرة تبادلية.

تمرين (2):

ليكن $n \in \mathbb{N}$. نعتبر المجموعة:

$$n\mathbb{Z} = \{nk / k \in \mathbb{Z}\}$$

بين أن $(n\mathbb{Z},+)$ زمرة تبادلية.

*) لنبين أن: $(n\mathbb{Z},+)$ زمرة تبادلية.

لدينا $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. ونعلم أن $(\mathbb{Z},+)$ زمرة تبادلية.

إذن يكفي أن نبين أن $(n\mathbb{Z},+)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{Z},+)$:

← لدينا $n\mathbb{Z} \neq \varnothing$ (لأن $0 \in n\mathbb{Z}$).

← ليكن x و y من $n\mathbb{Z}$. لنبين أن: $x - y \in n\mathbb{Z}$.

لدينا x و y من $n\mathbb{Z}$ إذن يوجد k_1 و k_2 بحيث:

$$x = nk_1 \text{ و } y = nk_2$$

إذن:

$$x - y = nk_1 - nk_2 = n(k_1 - k_2)$$

$$= nk_3$$

مع $k_3 = k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$

إذن: $x - y \in n\mathbb{Z}$

ومنه $(\forall (x,y) \in n\mathbb{Z}^2): x - y \in n\mathbb{Z}$

وبالتالي $(n\mathbb{Z},+)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{Z},+)$.

إذن $(n\mathbb{Z},+)$ زمرة تبادلية.

تمرين (3):

لتكن $(G,.)$ زمرة عنصرها المحايد e.

ليكن $a \in G$.

نضع: $C_a = \{x \in G / a.x = x.a\}$ (centralisateur de a)

$$Z(G) = \{x \in G / (\forall y \in G): x.y = y.x\}$$

(centre de G)

بين أن C_a و $Z(G)$ زمرتان جزئيتان ل $(G,.)$.

*) لنبين أن: C_a زمرة جزئية ل $(G,.)$:

← لدينا: $a.e = e.a = a$

إذن: $e.a = a.e$ إذن $e \in C_a$

ومنه: $C_a \neq \varnothing$.

← ليكن x و y من C_a. لنبين أن: $x.y^{-1} \in C_a$

يعني: $a.(x.y^{-1}) = (x.y^{-1}).a$

لدينا x و y من C_a إذن:

$$\begin{cases} x.a = a.x & (1) \\ y.a = a.y & (2) \end{cases}$$

لدينا من (2): $(y.a)^{-1} = (a.y)^{-1}$

يعني:

$$a^{-1}.y^{-1} = y^{-1}.a^{-1}$$

إذن:

$$\begin{cases} x.a = a.x \\ a^{-1}.y^{-1} = y^{-1}.a^{-1} \end{cases}$$

إذن: $x.a.a^{-1}.y^{-1} = a.x.y^{-1}.a^{-1}$

يعني: $x.e.y^{-1} = a.x.y^{-1}.a^{-1}$

يعني: $x.y^{-1} = a.x.y^{-1}.a^{-1}$

يعني: $x.y^{-1}.a = a.x.y^{-1}.a^{-1}.a$

يعني: $x.y^{-1}.a = a.x.y^{-1}.e$

يعني: $x.y^{-1}.a = a.x.y^{-1}$

إذن: $\left(\forall (x,y) \in C_a^2\right)\ x.y^{-1} \in C_a$

ومنه C_a زمرة جزئية ل $(G,.)$

*) لنبين أن $Z(G)$ زمرة جزئية ل $(G,.)$:

← لدينا: $(\forall y \in G): e.y = y.e = y$

إذن $e \in Z(G)$

← ليكن a و b من $Z(G)$. لنبين أن: $a.b^{-1} \in Z(G)$

يعني: $(\forall y \in G):\ \ (a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1})$

ليكن $y \in G$. لنبين أن: $(a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1})$

- لدينا a و b من $Z(G)$. إذن:

$$\begin{cases} a.y = y.a & (1) \\ b.y = y.b & (2) \end{cases}$$

وبنفس الطريقة السابقة نجد:

$$(a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1})$$

إذن:

$$(\forall y \in G):\ \ (a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1})$$

إذن $a.b^{-1} \in Z(G)$.

ومنه $Z(G)$ زمرة جزئية ل $(G,.)$.

5- تشاكل زمرة:

خاصية:

لتكن $(G,*)$ زمرة. E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي T. و $f:(G,*) \to (E,\mathrm{T})$ تشاكل.

لدينا ما يلي:

*) $(f(G),\mathrm{T})$ زمرة.

*) إذا كانت $(G,*)$ زمرة تبادلية فإن $(f(G),\mathrm{T})$ زمرة تبادلية.

*) إذا كان f تشاكل شمولي، فإن: $f(G) = E$ إذن: (E,T) زمرة.

نقول إن التشاكل يحول زمرة إلى زمرة.

تمرين:

لتكن $(G,.)$ زمرة.

نعتبر التطبيق: $f_a : G \to G$

$$x \to a.x.a^{-1}$$

1) بين أن f_a تشاكل تقابلي من $(G,.)$ إلى $(G,.)$

2) نعتبر المجموعة:

$$F = \{f_a / a \in G\}$$

a) بين أن " o " قانون تركيب داخلي في F.

b) نعتبر التطبيق $h : G \to F$

$$a \to f_a$$

← بين أن h تشاكل شمولي من $(G,.)$ نحو (F,o)

← استنتج أن (F,o) زمرة.

1) *) لنبين أن f_a تشاكل من $(G,.)$ نحو $(G,.)$

ليكن x و y من G.

لنبين أن: $f_a(x.y) = f_a(x).f_a(y)$

لدينا:

$$\begin{aligned} f_a(x.y) &= a.x.y.a^{-1} \\ &= a.x.e.y.a^{-1} \\ &= a.x.a^{-1}.a.y.a^{-1} \\ &= (a.x.a^{-1}).(a.y.a^{-1}) \\ &= f_a(x).f_a(y) \end{aligned}$$

إذن f_a تشاكل.

*) لنبين أن f_a تقابل:

ليكن $y \in G$. لنبحث عن x من G بحيث: $f_a(x) = y$

لدينا:

$$\begin{aligned} f_a(x) = y &\Leftrightarrow a.x.a^{-1} = y \\ &\Leftrightarrow a^{-1}.a.x.a^{-1} = a^{-1}.y.a \\ &\Leftrightarrow e.x.a^{-1}.a = a^{-1}.y.a \\ &\Leftrightarrow x.a^{-1}.a = a^{-1}.y.a \\ &\Leftrightarrow x = a^{-1}.y.a \in G \end{aligned}$$

إذن كل عنصر y من G يقبل سابق وحيد $x = a^{-1}.y.a$

إذن f_a تقابل.

ومنه f_a تشاكل تقابلي من $(G,.)$ نحو $(G,.)$.

2) a) لنبين أن " o " قانون تركيب داخلي في F.

ليكن f_a و f_b من F. لنبين أن $f_a o f_b \in F$

ليكن $x \in G$. لنحسب $f_a o f_b(x)$:

$$\begin{aligned} f_a o f_b(x) &= f_a(f_b(x)) \\ &= f_a(b.x.b^{-1}) \\ &= a.b.x.b^{-1}.a^{-1} = a.b.x.(a.b)^{-1} = f_{ab}(x) \end{aligned}$$

إذن: $(\forall x \in G): f_a o f_b(x)\ f_{ab}(x)$

إذن: $f_a o f_b = f_{ab}$

ولدينا: $\begin{cases} a \in G \\ b \in G \end{cases}$ إذن $a.b \in G$

إذن $f_{ab} \in F$

وبالتالي $\left(\forall (f_a, f_b) \in F^2\right): f_a o f_b \in F$

إذن " o " قانون تركيب داخلي في F .

b) *) لنبين أن h تشاكل شمولي من $(G,.)$ نحو (F,o) .

← ليكن a و b من G . لنبين أن: $h(a.b) = h(a) o h(b)$

لدينا: $h(a.b) = f_{ab} = f_a o f_b = h(a) o h(b)$

إذن h تشاكل.

← ولدينا h شمولي لأن كل عنصر f_a من F له سابق على الأقل a من G .

ومنه h تشاكل شمولي من $(G,.)$ نحو (F,o) .

*) لنبين أن (F,o) زمرة.

- لدينا $(G,.)$ زمرة.

- و h تشاكل شمولي من $(G,.)$ نحو (F,o) .

إذن (F,o) زمرة.

V) الحلقة:

1) توزيعية قانون بالنسبة لآخر.

تعريف:

لتكن E مجموعة مزودة بقانونها تركيب داخليين * و T .
نقول إن T توزيعي بالنسبة ل * إذا وفقط إذا كان:

$$\left(\forall (x,y,z) \in E^3\right) x\mathrm{T}(y*z) = (x\mathrm{T}y)*(x\mathrm{T}z) \quad (1)$$
$$(x*y)\mathrm{T}z = (x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z) \quad (2)$$

ملاحظة:

*) إذا كان القانون T تبادلي فإن إحدى الخاصيتين (1) أو (2) كافية.
*) إذا تحققت الخاصية (1) نقول إن T توزيعي بالنسبة ل * على اليمين.

أمثلة:

1- الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في كل من $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$.

2- الجمع ليس توزيعيا بالنسبة للضرب:

$$x + (y \times z) \neq (x+y) \times (x+z)$$

3- الاتحاد توزيعي بالنسبة للتقاطع. والتقاطع توزيعي بالنسبة للاتحاد في $P(E)$.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4- الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في $F(X, \mathbb{R})$

2) تعريف حلقة:

تعريف:

لتكن A مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين * و T نقول إن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

*) $(A,*)$ زمرة تبادلية.

*) T تجميعي.

*) T توزيعي بالنسبة ل *

ملاحظات:

*) إذا كان القانون T تبادلي. نقول إن الحلقة A تبادلية.
*) إذا كان للقانون T عنصر محايد، نقول إن الحلقة A واحدية.
*) نرمز عادة للقانون * ب " + " وللقانون T ب "$\times$" ونرمز في هذه الحالة للعنصر المحايد ل * ب 0 أو 0_A ويسمى صفر حلقة. ونرمز للعنصر المحايد ل T ب 1 أو 1_A.

3) أمثلة:

1- كل من $(\mathbb{Z},+,\times),(\mathbb{Q},+,\times),(\mathbb{R},+,\times),(\mathbb{C},+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

2- $(F(X,\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

4) خاصيات:

خاصية (1):

لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة صفرها e

لدينا: $(\forall a \in A): a\mathrm{T}e = e\mathrm{T}a = e$.

ملاحظة:

إذا رمزنا ل $(A,*,\mathrm{T})$ ب $(A,+,\times)$ الخاصية تصبح:

$$(\forall a \in A): a \times 0 = 0 \times a = 0$$

برهان:

لدينا: $a\mathrm{T}(e*e) = a\mathrm{T}e$ (لأن $e*e=e$)

يعني: $(a\mathrm{T}e)*(a\mathrm{T}e) = a\mathrm{T}e$

يعني: $(a\mathrm{T}e)*(a\mathrm{T}e) = (a\mathrm{T}e)*e$

يعني: $a\mathrm{T}e = e$ (لأن $(A,*)$ زمرة)

إذن: $a\mathrm{T}e = e$

وبنفس الطريقة نبين أن $e\mathrm{T}a = e$

ومنه $e\mathrm{T}a = a\mathrm{T}e = e$

خاصية (2):

لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ صفرها e

نرمز ل a' لمماثل a في $(A,*)$.

لدينا: $\left(\forall (a,b) \in A^2\right): a\mathrm{T}b' = a'\mathrm{T}b = (a\mathrm{T}b)'$

ملاحظة:

إذا رمزنا ل $(A,*,\mathrm{T})$ ب $(A,+,\times)$ الخاصية تصبح:

$$\left(\forall (a,b) \in A^2\right): a \times (-b) = (-a) \times b = -(a.b)$$

برهان:

لنبين أن: $(a\mathrm{T}b)' = a\mathrm{T}b'$

يعني: $(a\mathrm{T}b)*(a\mathrm{T}b') = e$ (لأن * تبادلي).

- لدينا :

$$(a\mathrm{T}b)*(a\mathrm{T}b')=a\mathrm{T}(b*b')$$
$$=a\mathrm{T}e$$
$$=e$$

إذن $(a\mathrm{T}b)'=a\mathrm{T}b'$

بنفس الطريقة نبين أن $(a\mathrm{T}b)'=a'\mathrm{T}b$

5) العناصر القابلة للمماثلة:

تعريف:

لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة واحدية وحدتها ε .

نقول إن عنصرا a من A قابل للمماثلة أو يقبل مقلوبا إذا كان له مماثل بالنسبة للقانون T في A .

خاصية:

لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة واحدية وحدتها ε .

ولتكن U مجموعة العناصر القابلة للمماثلة.

لدينا : (U,T) زمرة.

برهان:

- لدينا $U\neq\varnothing$ لأن $\varepsilon\in U$.
- لنبين أن T قانون تركيب داخلي في U .

ليكن x و y من U لنبين أن $(x\mathrm{T}y)\in U$

لدينا x و y من U إذن يقبلان مماثلين x'' و y'' في (A,T) .

إذن $x\mathrm{T}y$ له مماثل هو $y''\mathrm{T}x''$.

إذن $x\mathrm{T}y\in U$

ومنه T قانون تركيب داخلي في U .

- لدينا T تجميعي في A . إذن تجميعي في U .
- لدينا : $(\forall a\in U):\varepsilon\mathrm{T}a=a\mathrm{T}\varepsilon=a$

و $\varepsilon\in U$

إذن ε هو العنصر المحايد في U .

- ليكن $x\in U$ لنبين أنه يقبل مماثلا x'' في (U,T) .

لدينا $x\in U$ إذن يقبل مماثلا x'' في (A,T) .

ولدينا x'' يقبل مماثلا هو x إذن $x''\in U$

إذن x يقبل مماثلا هو x'' في (U,T) .

وبالتالي (U,T) زمرة.

6) قواسم الصفر في حلقة:

مثال:

نعتبر الحلقة $(F(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\times)$ صفرها : $\theta:x\to 0$

ونعتبر الدالتين: $f:x\to|x|-x$

و : $g:x\to|x|+x$

لدينا :

$$(\forall x\in\mathbb{R}):(f.g)(x)=f(x).g(x)$$
$$=(|x|-x)(|x|+x)$$
$$=|x|^2-x^2$$
$$=x^2-x^2=0=\theta(x)$$

إذن: $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f.g=\theta$

لدينا إذن $f\neq\theta\ ,\ g\neq\theta\ ,\ f.g=\theta$

نقول إن f و g قاسمين للصفر في الحلقة $(F(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$.

تعريف (1):

ليكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة صفرها 0_A

نقول إن عنصرا a من A قاسم للصفر إذا وفقط إذا كان:

$a\neq 0_A$ ويوجد $b\neq 0_A$ بحيث: $a\mathrm{T}b=0_A$

تعريف (2):

لتكن $(A,*,\mathrm{T})$ حلقة

نقول إن الحلقة $(A,*,\mathrm{T})$ كاملة (intègre) إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر .

ملاحظة:

نعتبر الحلقة $(A,+,\times)$ صفرها 0_A .

1- يكون a قاسم للصفر إذا كان:

$a\neq 0_A$ ويوجد $b\neq 0_A$ بحيث $a\times b=0_A$

2- تكون $(A,*,\mathrm{T})$ كاملة إذا وفق إذا كان:

$$(\forall(x,y)\in A^2)\begin{cases}x\neq 0_A\\ y\neq 0_A\end{cases}\Rightarrow x.y\neq 0_A$$

يعني:

$$(\forall(x,y)\in A^2)x.y=0_A\Rightarrow\begin{cases}x=0_A\\ \text{أو}\\ y=0_A\end{cases}$$

أمثلة:

1- كل من $(\mathbb{C},+,\times);(\mathbb{R},+,\times);(\mathbb{Q},+,\times);(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة كاملة.

2- $(F(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة غير كاملة.

7) حلقتان هامتان:

a) حلقة المصفوفات المربعة:

← حلقة المصفوفات المربعة من الرتبة 2:

تعريف:

نسمي مصفوفة مربعة من الرتبة 2 بمعاملات حقيقية كل جدول على شكل: $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ حيث a,b,c,d من $\mathbb{R}$.

ونرمز لمجموعة هذه المصفوفات ب $M_2(\mathbb{R})$

- نعرف على $M_2(\mathbb{R})$ الجمع والضرب كما يلي:

$$\leftarrow)\quad \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+a' & b+b'\\ c+c' & d+d'\end{pmatrix}$$

$$\leftarrow)\quad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa'+cb' & ac'+cd'\\ ba'+db' & bc'+dd'\end{pmatrix}$$

خاصية:

$(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة غير تبادلية وواحدية.

صفرها المصفوفة المنعدمة: $0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

وحدتها المصفوفة الوحدة: $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ وغير كاملة.

← حلقة المصفوفات المربعة من الرتبة 3:

تعريف:

نسمي مصفوفة مربعة من الرتبة 3 بمعاملات حقيقية كل جدول على شكل:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix} \quad a_{ij}\in\mathbb{R} \text{ حيث}$$

ونرمز لمجموعة هذه المصفوفات ب $M_3(\mathbb{R})$

- نعرف الجمع والضرب في $M_3(\mathbb{R})$ بما يلي:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&a_{13}+b_{13}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&a_{23}+b_{23}\\a_{31}+b_{31}&a_{32}+b_{32}&a_{33}+b_{33}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}&&\\&&\\&&\end{pmatrix}$$

باستعمال الترميز يمكن أن نعرف الجمع والضرب كما يلي:

نعتبر المصفوفة:

$$A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 3}} \quad ; \quad B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 3}}$$

*) لدينا $A+B$ هي المصفوفة $S=(S_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 3}}$

حيث: $S_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

*) ولدينا $A.B$ هي المصفوفة $C=(C_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 3}}$

حيث $C_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{jk}$

مثال:

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&1&-2\\1&2&-1\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&7&-1\\-2&2&-2\\3&3&2\end{pmatrix}$$

خاصية:

$(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة غير تبادلية، غير كاملة وواحدية صفرها المصفوفة المنعدمة: $0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ووحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) الحلقة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

سبق وأن عرفنا الجمع والضرب في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ كما يلي:

$$\overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y}$$
$$\overline{x}.\overline{y}=\overline{x.y}$$

خاصية:

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية صفرها $\overline{0}$ ووحدتها $\overline{1}$.

ملاحظة:

*) نعتبر $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ لدينا:

$$\overline{2}.\overline{3}=\overline{0}$$

و

$$\overline{2}\neq\overline{0} \text{ و } \overline{3}\neq\overline{0}$$

إذن $\overline{2}$ و $\overline{3}$ قاسمان للصفر.

إذن $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة غير كاملة.

*) نعتبر $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ حيث n أولي.

$$(\forall\overline{x},\overline{y}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned}\overline{x}.\overline{y}=\overline{0} &\Rightarrow \overline{x.y}=\overline{0}\\ &\Rightarrow xy\equiv 0[n]\\ &\Rightarrow n/xy\\ &\Rightarrow n/x \text{ أو } n/y\\ &\Rightarrow x\equiv 0[n] \text{ أو } y\equiv 0[n]\\ &\Rightarrow \overline{x}=\overline{0} \text{ أو } \overline{y}=\overline{0}\end{aligned}$$

إذن $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة كاملة.

*) نعتبر الحلقة $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ حيث n غير أولي.

إذن n يقبل قاسم فعلي موجب n_1 .

يعني: $n=n_1+n_2$

n_1 قاسم فعلي موجب إذن n_2 قاسم فعلي موجب.

لدينا $1<n_1<n$ إذن $n\times n_1$ يعني $n_1\not\equiv 0[n]$

و $1<n_2<n$ و $n\times n_2$ و $n_2\not\equiv 0[n]$

يعني: $\overline{n_2}\neq\overline{0}$ و $\overline{n_1}\neq\overline{0}$

ولدينا: $n_1.n_2=n$

يعني: $\overline{n_1.n_2}=\overline{n}$

يعني: $\overline{n_1}.\overline{n_2}=\overline{0}$

إذن $\overline{n_1}$ و $\overline{n_2}$ قاسمان للصفر.

ومنه: $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة غير كاملة.

خاصية:

الحلقة $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ كاملة إذا وفقط إذا كان n أولي.

تمرين:

نعتبر الحلقة $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$، $n\in\mathbb{N}^*$

حدد العناصر القابلة للمسائلة.

- لدينا :

$\overline{x}$ قابلة للمماثلة) $\Leftrightarrow (\exists \overline{x'} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) : \overline{x}.\overline{x'} = \overline{1}$ (

$$\Leftrightarrow (\exists x' \in \mathbb{Z}) : x.x' \equiv 1[n]$$
$$\Leftrightarrow (\exists x', k \in \mathbb{Z}) : xx' = 1 + nk$$
$$\Leftrightarrow (\exists x', k \in \mathbb{Z}) : xx' - nk = 1$$
$$\Leftrightarrow x \wedge n = 1$$

إذن مجموعة العناصر التي تقبل مقلوبا هي:

$$U = \{\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} / x \wedge n = 1\}$$

ملاحظة:

لدينا $(U, \times)$ زمرة تبادلية.

VI) الجسم: Corps

1) تعريف:

لتكن k مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين * و T .

نقول إن $(K,*,\mathrm{T})$ جسم إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

*) $(K,*,\mathrm{T})$ حلقة واحدية.

*) كل عنصر يخالف صفر الحلقة يقبل مماثلا بالنسبة ل T .

ملاحظة:

1- إذا كان القانون T تبادلي نقول إن الجسم K تبادلي.

2- يكون $(K,*,\mathrm{T})$ جسما إذا وفقط إذا كان:

*) $(K,*)$ زمرة.

*) $(K-\{0_k\},\mathrm{T})$ زمرة.

*) T توزيعي بالنسبة ل * .

2) أمثلة:

1- كل من $(\mathbb{Q},+,\times), (\mathbb{R},+,\times), (\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

2- نعتبر الحلقة $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ حيث p أولي.

لنبين أنها جسم.

- لدينا $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة واحدية.

- ليكن $\overline{x} \neq \overline{0}$

يعني $x \not\equiv 0[p]$ يعني $p \times x$

وبما أن p أولي فإن $p \wedge x = 1$

إذن حسب Bezout يوجد U و V بحيث:

$$pu + xv = 1$$

يعني: $\overline{p}\,\overline{u} + \overline{x}.\overline{v} = \overline{1}$

يعني: $\overline{x}.\overline{v} = \overline{1}$ $\qquad (\overline{0} = \overline{p})$

إذن $\overline{x}$ يقبل مماثلا هو $\overline{v}$.

إذن كل عنصر $\overline{x} \neq \overline{0}$ يقبل مقلوبا.

ومنه $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ جسم.

خاصية:

إذا كان p أولي فإن $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ جسم تبادلي.

3- نعتبر الحلقة $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$

- لدينا $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية.

- نعتبر المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

لنتحقق هل A تقبل مقلوبا.

لنبحث عن $A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ بحيث: $A.A' = A'.A = I$

لدينا :

$$A.A' = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ c+d=0 \\ a+b=0 \\ c+d=0 \end{cases}$$

وهذا مستحيل.

إذن A لا تقبل مقلوبا A' .

ومنه $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ ليس جسما.

وبنفس نجد أن $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ ليس جسما.

3) خاصيات:

خاصية (1):

ليكن $(K,+,\times)$ جسما.

لدينا كل عنصر من $K-\{0_k\}$ منتظم بالنسبة للضرب.

يعني: $(\forall a \in K-\{0_k\})(\forall (x,y) \in K^2):$

$$\begin{cases} a.x = a.y \Rightarrow x = y \\ x.a = y.a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

خاصية (2):

ليكن $(K,+,\times)$ جسما.

لدينا :

$(\forall (x,y) \in K^2) : x.y = 0_k \Rightarrow x = 0_k$ أو $y = 0_k$

استنتاج: كل جسم هو حلقة كاملة.

خاصية (3):

ليكن $(K,+,\times)$ جسما.

نعتبر المعادلة $a \times x = b$

*) إذا كان $a \neq 0_k$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا $x = a^{-1}b$.

*) إذا كان $a = 0_k$ و $b \neq 0_k$ فإن المعادلة ليس لها حل.

*) إذا كان $a = 0_k$ و $b = 0_k$ فإن $S = K$

نفس الشيء بالنسبة للمعادلة $x \times a = b$.

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

نعتبر: $L=\left\{\begin{array}{l} f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \quad x\to ax\,/\,a\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$

بين أن: $(L,+,o)$ جسم تبادلي.

تمرين (2):

نعتبر $E=\left\{M_{(a,b)}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b\end{pmatrix}/\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$

بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.