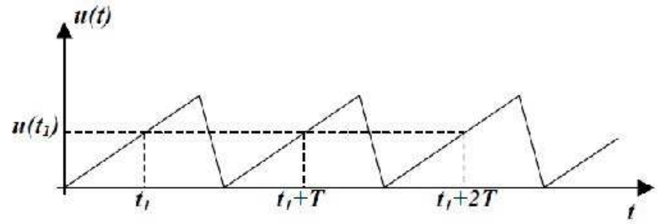
II. GRANDEURS VARIABLES PERIODIQUES

1. Définition



Une grandeur analogique (tension ou intensité) **périodique** est constituée par une suite de motifs identiques.

2. Période

La période **T** est la durée correspondant à ce motif ; elle s'exprime en seconde (**s**).

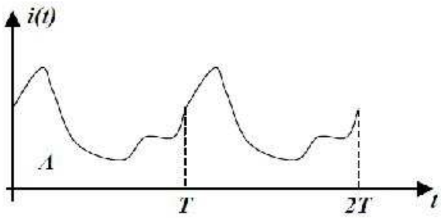
3. Fréquence

La **fréquence** du signal est le nombre de périodes par secondes. Elle s'exprime en fonction de la période par la relation suivante : ***f = 1/T*** s'exprime en en **Hertz (Hz)**.

4. Valeur instantanée

La valeur instantanée est une grandeur *variable* est la valeur qu'elle prend à tout instant ; on la note par une minuscule : ***u(t)*** ou ***u***.

5. Valeur moyenne



On dispose d'une intensité périodique **i(t)** de période **T**.
Pendant une période **T**, le courant périodique **i** transporte la quantité d'électricité **Q** (cette quantité d'électricité représente l'aire **A** entre la courbe et l'axe des abscisses).
La même quantité d'électricité peut être transportée par un courant d'intensité constante **<i> ou** $\bar{i}$ avec $\bar{i} = A/T$

Mesure

Pour mesurer la valeur moyenne d'une tension ou de l'intensité d'un courant on utilise des appareils à aiguille ***magnétoélectriques*** en position ***DC***, ou des appareils numériques en position ***DC***.

Signal alternatif

Un signal est dit **alternatif** si sa valeur moyenne est **nulle**.

6. Valeur efficace

On appelle intensité efficace, notée **I**, du courant variable **i**, l'intensité du courant continu qui dissiperait la même énergie dans la même résistance pendant la même durée. On peut montrer que : $I = \sqrt{\overline{i^2}(t)}$

I est la valeur efficace en ampères (**A**) — **i** est la valeur instantanée en ampères (**A**).

Mesure

Pour mesurer la valeur efficace d'une tension ou de l'intensité d'un courant on utilise des appareils à aiguille ***ferromagnétiques***, ou des appareils numériques ***RMS*** (ou ***TRMS***) en position ***AC***.

III. GRANDEURS PERIODIQUES SINUSOÏDALES

1. Définitions

L'expression temporelle de la tension est :

$$u(t) = \hat{U}.\sin(\omega t+\varphi_u)$$

$$u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_u).$$

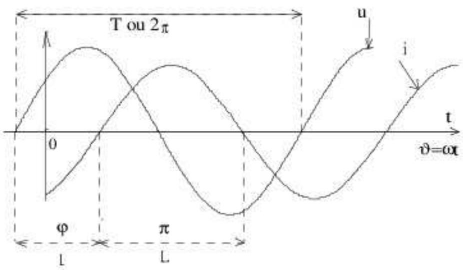
L'expression temporelle du courant est :

$$i(t) = \hat{I}.\sin(\omega t+\varphi_i)$$

$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_i).$$

u, i sont les ***valeurs instantanées*** de la tension et du courant.
$\hat{U}$, $\hat{I}$ sont ***les valeurs maximales ou amplitudes de u et i.***
U, I sont ***les valeurs efficaces de u et i.***
ω ***est la pulsation ou vitesse angulaire en rad/s***
$\omega = 2.\pi.f = 2.\pi/T$ *avec* $f = 1/T$: ***fréquence en Hertz*** (Hz)
et T ***période en seconde*** (s).
$\omega t+\varphi_i$ ou $\omega t+\varphi_u$ ***est la phase à l'instant t exprimée en radian.***
φ_i, φ_u ***est la phase à l'origine.(t=0)***

2. Représentation instantanée.



- ***φ = φ*** $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ ***est le déphasage entre u et i***
- *On mesure le déphasage à l'oscilloscope : règle de 3 :*

$$\varphi\ (rad) = l\,.\pi / L$$

$$\varphi\ (°) = l\,.180 / L.$$

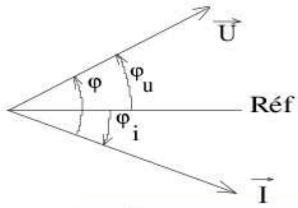
3. Représentation vectorielle de Fresnel.

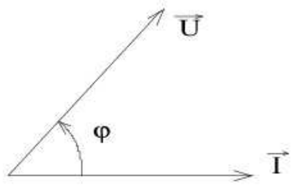
$u = U\sqrt{2}\sin\ (\omega t+\varphi_u)$.

$\vec{U}$: module **U** et phase φ_u $\rightarrow \vec{U}$ **(U, φ_u)**

$i = I\sqrt{2}\sin\ (\omega t+\varphi_i)$

$\vec{I}$: module I et phase φ_i $\rightarrow \vec{I}$ **(I, φ_i)**





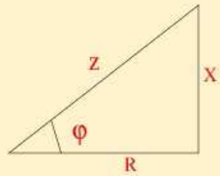
si $\vec{I}$ référence $\varphi_i = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_u$

Somme de grandeurs sinusoïdales : $u = u_1+u_2 \Rightarrow \vec{U} = \vec{U_1} + \vec{U_2}$ ou $i = i_1+i_2 \Rightarrow \vec{I} = \vec{I_1} + \vec{I_2}$

4. Représentation complexe.

Rappels sur les complexes .

- $\underline{Z} = [Z\ ;\theta] = [x + jy]$ **Z** module, **θ** argument, **a** partie réelle, b partie imaginaire
- $Z = [Z\ ,\theta] = Z\cos\theta + j\ Z\sin\theta$ et $Z = x + jy = [\sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ \theta = \text{arctg}(y/x)]$.
- Addition $\underline{Z} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2} = (x_1 + x_2) + j\ (y_1 + y_2)$.
- multiplication $\underline{Z} = \underline{Z_1}.\underline{Z_2} = [Z1.Z2\ ;\ \theta_1+\theta_2]$ θ_1 et θ_2 arguments de $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$.
- Division $\underline{Z} = \underline{Z_1}/\underline{Z_2} = [Z_1/Z_2;\ \theta_1-\theta_2]$.
- Dérivée de $\underline{Z}$: $(\underline{Z})' = j.\omega.\underline{Z}$



Utilisation en électricité :

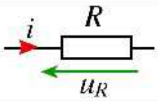
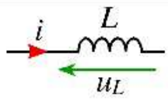
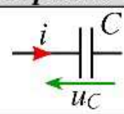
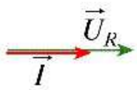
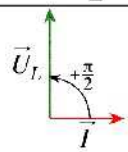
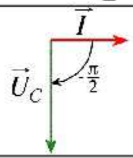
$u = \mathbf{U}\sqrt{2}\sin\ (\omega t+\varphi_u) \Rightarrow \underline{U} = [U;\ \varphi_u] \Rightarrow$ forme **Polaire**

$\underline{U} = U\cos\varphi_u + j\ U\sin\varphi_u = x + j\ y \Rightarrow$ forme **Rectangulaire**

Remarque : *le passage d'une forme à l'autre (**rectangulaire** ⇄ **polaire**) se fait rapidement avec les calculatrices scientifiques*

5. Dipôles élémentaires passifs linéaires.

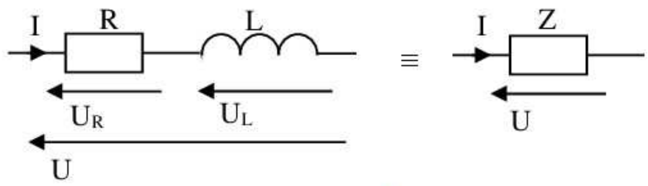
Un dipôle élémentaire peut être une résistance, une bobine parfaite ou un condensateur.

	Résistance R	***Inductance L***	***Capacité C***
Schéma			
Equation fondamentale	$u_R = Ri$	$u_L = L\dfrac{di}{dt}$	$i = C\dfrac{du_C}{dt}$
Impédance Z (Ω)	$Z_R = R$	$Z_L = L\omega$	$Z_C = \dfrac{1}{C\omega}$
Relation entre les valeurs efficaces	$U_R = R.I$	$U_L = L\omega.I$	$U_C = \dfrac{1}{C\omega}.I$
Déphasage φ (rad)	$\varphi_R = 0$	$\varphi_L = \dfrac{\pi}{2}$	$\varphi_C = -\dfrac{\pi}{2}$
Représentation de Fresnel			

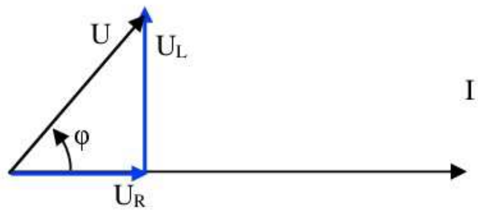
6. Modèle équivalent d'un dipôle passif linéaire.

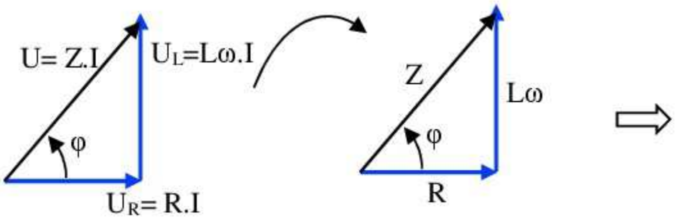
6.1. Modèle série :

Groupement série R, L : (bobine réelle)



Construction de Fresnel :





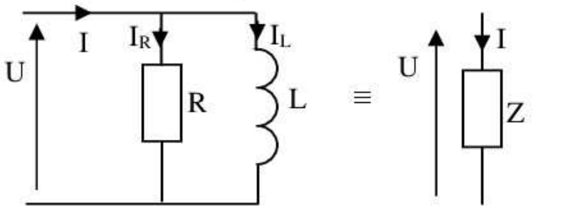
$$Z = \sqrt{R^2+(L\omega)^2}$$
$$\varphi = \tan^{-1}(L\omega/R)$$

$\varphi = (\vec{I},\vec{U})$ *déphasage de i sur u*

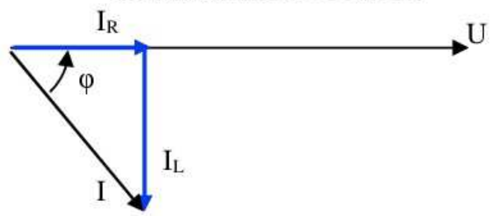
Groupement série	*R, L*	*R, C*	*R, L, C*
Impédance du groupement	$Z = \sqrt{R^2+(L\omega)^2}$	$Z = \sqrt{R^2+(1/C\omega)^2}$	$Z = \sqrt{R^2+(L\omega-1/C\omega)^2}$
Déphasage φ de i sur u	$\varphi = \tan^{-1}(L\omega/R)$	$\varphi = \tan^{-1}(-1/RC\omega)$	$\varphi = \tan^{-1}((L\omega-1/C\omega)/R)$
Impédance complexe	$\underline{Z}_{RL} = R+jL\omega$	$\underline{Z}_{RC} = R-j/C\omega$	$\underline{Z}_{RC} = R+j(L\omega-1/C\omega)$

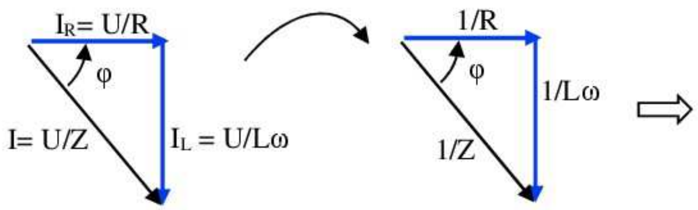
Remarque : X>0 φ>0 le dipôle est ***inductif*** et $\vec{I}$ ***est en retard par rapport à*** $\vec{U}$
X<0 φ<0 le dipôle est ***capacitif*** et $\vec{I}$ ***est en avance par rapport à*** $\vec{U}$
X= 0 φ=0 le dipôle est ***résistif*** et $\vec{I}$ ***est en phase avec*** $\vec{U}$

6.2. Modèle parallèle : **Admittance : Y=1/Z ⇒ I = Y.U**



Construction de Fresnel :





$$1/Z = \sqrt{(1/R)^2+(1/L\omega)^2}$$
$$\varphi = \tan^{-1}(R/L\omega)$$

Les Dipôles élémentaires	La Résistance R	L'inductance L	Le condensateur C
Admittance (**siemens**)	$Y_R = 1/R$	$Y_L = 1/L\omega$	$Y_c = C\omega$
Admittance complexe	$\underline{Y}_R = 1/R$	$\underline{Y}_L = 1/jL\omega = -j/L\omega$	$\underline{Y}_c = 1/-j/C\omega = jC\omega$

Groupement parallèle	*R, L*	*R, C*	*R, L, C*
Impédance du groupement	$Z = 1/\sqrt{Y_R^2+Y_L^2}$	$Z = 1/\sqrt{Y_R^2+Y_C^2}$	$Z = 1/\sqrt{Y_R^2+(Y_L-Y_C)^2}$
Déphasage φ de i sur u	$\varphi = \tan^{-1}(R/L\omega)$	$\varphi = \tan^{-1}(-RC\omega)$	$\varphi = \tan^{-1}(R(1/L\omega - C\omega))$

Groupement parallèle : $\underline{Y} = \sum \underline{Y}_i$ cas de 2 dipôles $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ *ou* $\underline{Z} = \underline{Z}_1.\underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$

7. Puissances en alternatif. Théorème de Boucherot. Facteur de puissance.

7.1. Puissances

La puissance électrique **instantanée** est le produit de la tension par le courant.

$u(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t$ et $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)$.

$p(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t.\ I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi) = 2UI\sin\omega t.\sin(\omega t - \varphi) = U.I.\cos\varphi - U.I.\cos(2\omega t+\varphi)$

On constate que la puissance instantanée est la somme :

- d'un terme constant "$U.I.\cos\varphi$"
- et d'un terme variant périodiquement "$U.I.\cos(2\omega t+\varphi)$".

Puissance active

La puissance active est la moyenne de la puissance instantanée. La valeur moyenne du terme périodique est nulle (c'est une fonction périodique alternative). Il reste donc le terme constant.

$P = U.I.\cos\varphi$ unité : le *watt* (W).

Puissance réactive

$Q = U.I.\sin\varphi$ unité : le *voltampère réactif* (VAR).

Puissance apparente

La puissance apparente ne tient pas compte du déphasage entre u(t) et i(t).

$S = U.I$ unité : le *voltampère* (VA).

Puissances consommées par les dipôles passifs élémentaires

	Résistance R	***Inductance L***	***Capacité C***
Puissance active (W) ***P =U.I.cosφ***	$P = RI^2 = U^2/R$ R absorbe la puissance active	$P = 0$	$P = 0$
Puissance réactive(VAR) ***Q =U.I.sinφ***	$Q_R = 0$	$Q_L = U_L I = L\omega I^2$ *L absorbe la puissance réactive*	$Q_C = -U_C I = -C\omega U_C^2$ *C fournit la puissance réactive*
Puissance apparente(VA) ***S =U.I***	$S = P$	$S = Q_L$	$S = -Q_C$

7.2. Théorème de Boucherot :

Les puissances active et réactive absorbées par un groupement de dipôles sont respectivement égales à la somme des puissances actives et réactives absorbées par chaque élément du groupement.

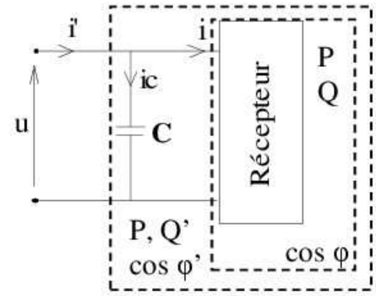
$$P_t = \Sigma P_i \quad \text{et} \quad Q_t = \Sigma Q_i \quad .$$

(On présente les résultats dans un tableau et on calcul I_t et $\cos\varphi_t$.)

$\mathrm{tg}\varphi_t = Q_t/P_t \Rightarrow \cos\varphi_t$ et $I_t = P_t/U\cos\varphi_t$ ou $S_t = \sqrt{Q_t^2 + P_t^2} \Rightarrow I_t = S_t/U$ et $\cos\varphi_t = P_t/S_t$.

7.3. Relèvement du facteur de puissance.

Pour diminuer le courant en ligne, on ajoute un condensateur en parallèle sur le récepteur.



	Puissance active	*Puissance réactive*
Récepteur seul	P	$Q = P.\mathrm{tg}\,\varphi$
condensateur	0	$Q_C = -C\omega U^2$
L'ensemble	P	$Q' = Q + Q_C = P.\mathrm{tg}\,\varphi'$

On en déduit la capacité du condensateur de la manière suivante :

$$Q_C = -C\omega U^2 = Q' - Q$$
$$-C\omega U^2 = P.\mathrm{tg}\,\varphi' - P.\mathrm{tg}\,\varphi \quad \Longrightarrow \quad \text{Finalement : } C = \frac{P(\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\varphi')}{U^2\omega}$$