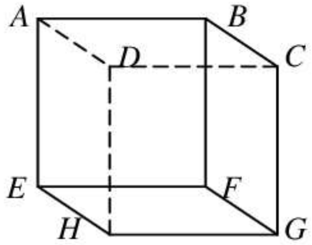
الجداء السلمي في V_3

I- الجداء السلمي

أنشطة :

1- ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا في الفضاء $\mathcal{E}$ طول حرفه 1 ومركزه O.

أحسب الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EC}$ ، $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DH}$ ، $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{HF}$.



$$\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EC}=EG^2=EH^2+HG^2=2$$

$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{DF}=DH^2=1$$

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \quad \left(\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AC}\right)$$ لأن

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

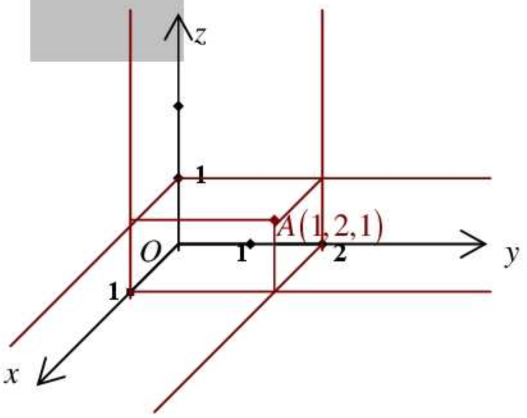
$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{HF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HF}$$

$$=\frac{1}{2}HF^2$$

$$=1$$

2- الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

أنشئ النقطة $A(1,2,1)$.



تذكير :

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى المتجهي V_2 و A ، B ، C ثلاث نقط من المستوى P بحيث :

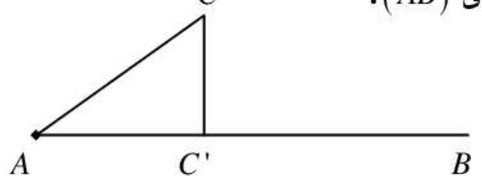
$$\vec{u}=\overrightarrow{AB} \quad \text{و} \quad \vec{v}=\overrightarrow{AC}$$

فإن :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$$

بحيث : C' هي المسقط العمودي للنقطة C على (AB).



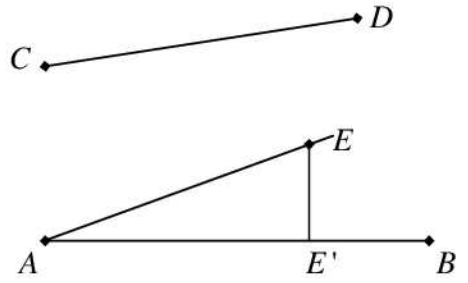
تعريف :

يمكن تحديد تعريف الجداء السلمي من المستوى إلى الفضاء وذلك كما يلي :

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_3 و A ، B ، C و D أربع نقط من الفضاء ξ بحيث $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ و $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ فإنه توجد نقطة وحيدة E بحيث $\vec{v} = \overrightarrow{AE}$. والجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ بحيث :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overline{AB} \cdot \overline{AE'}$$

بحيث E' هو المسقط العمودي للنقطة E على (AB).

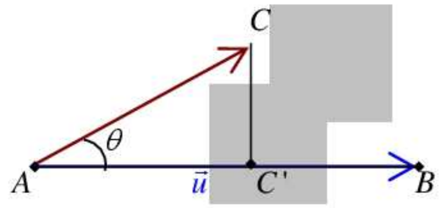


الصيغة التحليلية للجداء السلمي :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_3 ، $\vec{u} \neq 0$ و $\vec{v} \neq 0$.

- A ، B و C ثلاث نقط من ξ حيث : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

وليكن θ قياسا للزاوية $[B\hat{A}C]$.



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$= \overline{AB} \cdot \overline{AC'}$$

الحالة① : $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

$$\cos\theta = \frac{AC'}{AC}$$

إذن : $AC' = AC \cdot \cos\theta$

ومنه : $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AC'$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AC \cdot \cos\theta$$

أو

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta}$$

الحالة② : $\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \cdot AC'$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{AC'}{AC}$$

إذن : $AC' = AC \cos(\pi - \theta)$

إذن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \cdot AC \cdot \cos(\pi - \theta)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AC \cdot \cos\theta$$

$$= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

خاصيــة :

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء المتجهي V_3
و A ، B و C ثلاث نقط من الفضاء ξ بحيث : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ و θ قياس الزاوية $\left[B\hat{A}C\right]$.
فإن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AC \cdot \cos\theta$

خاصيات الجداء السلمي :

1- تعامد متجهتين :

خاصية :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_3.
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}$ أو $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$

2- منظم متجهة :

لتكن $\vec{u}$ متجهة من V_3.

منظم المتجهة $\vec{u}$ هو العدد الحقيقي الموجب $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$ ($\vec{u}^2$ هو المربع السلمي للمتجهة $\vec{u}$).

3- الأساس والمعلم المتعامدان :

لتكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات من V_3 غير مستوائية.

نقول أن $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ أساس متعامد في V_3.

إذا كانت المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى، وإذا كانت المتجهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ واحدية فإن الأساس $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ متعامد وممنظم.

$\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ أساس متعامد وممنظم

$$\Updownarrow$$

-1 $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

-2 $\vec{j} \perp \vec{k}$ و $\vec{i} \perp \vec{k}$ و $\vec{i} \perp \vec{j}$

ونقول أن المعلم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ متعامد وممنظم، إذا وفقط إذا كان الأساس $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ متعامد وممنظم.

الصيغة التحليلية للجداء السلمي لمتجهتين في الفضاء :

الفضاء المتجهي V_3 موزد بالأساس المتعامد والممنظم $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

نعتبر المتجهتين :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)\left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right)$$
$$= xx' + yy' + zz'$$

R

خاصيــة :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_3.

حيث : $\vec{v}(x',y',z')$ و $\vec{u}(x,y,z)$

لدينا : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$

خاصيــة :

لتكن (x,y,z) و (x',y',z') هما مثلوثي إحداثيات المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بالنسبة للأساس المتعامد والممنظم $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$$\vec{u}\perp\vec{v} \quad\Leftrightarrow\quad xx'+yy'+zz'=0$$

ملاحظة :

1- إذا كانت : $\vec{u}(x,y,z)$

فإن : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

2- إذا كانت : $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$

فإن : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

II- تطبيقات الجداء السلمي :

تطبيق 1 :

ليكن (D) المستقيم المار من النقطة A حيث : $\overrightarrow{OA} = \vec{i}+\vec{j}$

و $\vec{u}$ متجهة موجهة له حيث :

$$\vec{u} = \vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

1- اعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D).

2- اعط معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من O والذي يحقق : $(D)\perp(P)$

3- استنتج تمثيلا بارامتريا للمستوى (P).

الجواب :

1- الحالة العامة :

لدينا : $M\in D \quad\Leftrightarrow\quad \exists t\in\mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix} \qquad t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

الحالة الخاصة :

$$D : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

-2
$$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \vec{u}$$
$$\Leftrightarrow x - y + z = 0$$
ومنه معادلة : $(P) : x - y + z = 0$

-3 لدينا : $x - y + z = 0$

إذن : $x = y - z$

نضع : $y = \alpha$ و $z = \beta$

إذن : $\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \quad / \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

وهذا تمثيل بارامتري للمستوى (P).

تطبيق 2 :

تحديد مستوى بنقطة ومتجهة منظمية.

حدد مجموعة النقط M من الفضاء ξ. بحيث : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{k}$ في الحالات التالية :

-a $k = 0$ ، $A(1,1,1)$ و $\vec{u}(1,2,-1)$.

لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-1, y-1, z-1)$

و : $\vec{u}(1,2,-1)$

و : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

إذن : $1(x-1) + 2(y-1) - 1(z-1) = 0$

إذن : مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ هي المستوى ذو المعادلة : $x + 2y - z - 2 = 0$

-b $k = 2$ ، $A(1,0,1)$, $\vec{u}(1,1,2)$

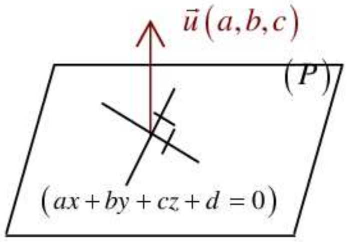
لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-1, y, z-1)$

و : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 2$

$$1(x-1) + y + 2(z-1) = 2$$
$$x + y + 2 - 5 = 0$$

خاصية :

- إذا كانت $\vec{n}(a,b,c)$ حيث $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ منظمية على المستوى (P) ، فإن $ax + by + cz + d = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P) حيث $d \in \mathbb{R}$.
- إذا كانت معادلة (P) تكتب على شكل $ax + by + cz = 0$ فإن المتجهة $\vec{u}(a,b,c)$ منظمية على (P).



تطبيق 3 :

نعتبر في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى م م م $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ المستوى (P) الذي معادلته هي : $P(3x-y+2z-4=0)$

والنقطة $A(0,-2,1)$ من (P).

1- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) الذي يمر من A ويقبل $\vec{u}(1,-1,-2)$ متجهة موجهة له.

تحقق أن : $(D)\subset(P)$

2- H و K هما المسقطان العموديان على التوالي للنقطة $B\left(1,0,\dfrac{-41}{2}\right)$ على (P) و (D).

حدد إحداثيات كل من H و K.

3- أحسب الجداء السلمي $\vec{u}\cdot\overrightarrow{KH}$ واستنتج أن المستقيم (D) عمودي على المستوى (BKH).

الجواب :

1-

$$D\ :\ \begin{cases} x=t \\ y=-2-t \\ z=1-2t \end{cases}$$

لنتحقق أن : $(D)\subset(P)$

$$3t(-2-t)+2(1-2t)-4=3t+2+t+2-4t-4$$
$$=0$$

إذن : $(D)\subset(P)$

2- لدينا : $H\in(\Delta)\cap(P)$

حيث : (Δ) هو المستقيم المار من B والعمودي على (P).

ولدينا :

$$(\Delta)\ :\ \begin{cases} x=1+3t \\ y=-t \qquad / \quad t\in\mathbb{R} \\ z=\dfrac{-41}{2}+2t \end{cases}$$

و : $(P)\ :\ 3x-y+2z-4=0$

إذن :

$$3(1+3t)-(-t)+2\left(\frac{-41}{2}+2t\right)-4=0$$
$$3+9t+t-41+4t-4=0$$
$$14t=42$$
$$t=3$$

ومنه : $H\left(10,-3,\dfrac{-29}{2}\right)$

3- لنحسب : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{KH}$

لدينا : $\vec{u}(1,-1,-2)$

$$\overrightarrow{KH}\left(3,6,\frac{-3}{2}\right)$$

إذن : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{KH}=3-6+3=0$

وبما أن : $\overrightarrow{BK}\perp\vec{u}$

و : $\overrightarrow{KH}\perp\vec{u}$

فإن : $(D)\perp(BKH)$

R

خاصية وتذكير :

> لتكن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D) . و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان موجهتان للمستوى (P).
> - يكون $(P)\perp(D)$ إذا وفقط إذا كان $\vec{n}\perp\vec{u}$ و $\vec{n}\perp\vec{v}$.
> - يكون $(P)\perp(D)$ إذا وفقط إذا كانت $\vec{n}$ منظمية على (P).

تطبيق 4 : تعامد مستويين.

① أعط معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقطتين $A(-1,2,0)$ و $B(3,1,-2)$ وعمودي على المستوى (Q) ذوالمعادلة $3x-7y+2z=0$.

لدينا :

$$\overrightarrow{AB}(4,-1,-2)$$
$$\vec{n}(3,-7,2)$$
$$M\in(P) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\vec{n},\overrightarrow{AB}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 \\ y-2 & -7 & -1 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

ط1 :

$$(x+1)\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}=0$$
$$16(x+1)+14(y-2)+25z=0$$
$$16x+14y+25z-12=0$$

ط2 :

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 \\ y-2 & -7 & -1 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} x+1 & 3 \\ y-2 & -7 \\ z & 2 \end{matrix}$$
$$14(x+1)-3z+8(y-2)+28z+2(x+1)+6(y-2)=0$$
$$16x+14y+25z-12=0$$

② أدرس تعامد المستويين (P) و (Q) في الحالتين التاليتين :

-a
$$(P):2x-5y-z=0$$
$$(Q):x+2z-3=0$$

لدينا : $\vec{n}_1(2,-5,-1)$ منظمية على (P).

ولدينا : $\vec{n}_2(1,0,2)$ منظمية على (Q).

و : $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=2-2=0$

إذن : $(P)\perp(Q)$

-b
$$(P):3x-y-2z-5=0$$
$$(Q):x+4y-3z+2=0$$

لدينا : $(3\times1)+(-1\times4)+(-2\times-3)=3-4+6$

$= 5 \neq 0$

ومنه : (P) و (Q) غير متعامدان.

خلاصة :

> يكون المستويين $P(ax+by+cz+d=0)$ و $Q(a'x+b'y+c'z+d'=0)$
> متعامدين إذا وفقط إذا كان :
> $$aa'+bb'+cc'=0$$

تطبيق 5 : تعامد مستقيمين.

أدرس تعامد المستقيمين (D) و (Δ) في الحالات التالية :

-a $D(A,\vec{u})$

حيث : $A(0,1,-1)$

$\vec{u}(1,1,1)$

و : $$\Delta = \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=1+t \end{cases} \quad / \quad (t\in\mathbb{R})$$

لدينا : $\vec{u}(1,1,1)$ موجهة لـ (D).

و : $\vec{v}(1,-2,1)$ موجهة لـ (Δ).

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1-2+1=0$$

ومنه : $(\Delta)\perp(D)$

-b $(D)=(A,\overrightarrow{AB})$ حيث $A(0,1,-1)$ و $B(1,0,1)$.

و (Δ) يمر من أصل المعلم ومتجهته الموجهة هي : $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(1,-1,2)$

و $\vec{v}(1,1,0)$

إذن : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v} = 1-1+0=0$

ومنه : $(D)\perp(\Delta)$

خلاصة :

> يكون المستقيمين $D(A,\vec{u})$ و $\Delta(B,\vec{v})$ متعامدين
> إذا وفقط إذا كان : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

تطبيق 6 : مسافة نقطة عن مستوى.

ليكن (P) مستوى و $\vec{n}$ متجهة منظمية عليه ، و M نقطة من الفضاء ξ.

-1 بين أن لكل B من (P) : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$

حيث : H هي المسقط العمودي للنقطة A على (P).

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)\cdot\vec{n}$$
$$= \overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$$
$$\left(\overrightarrow{HB}\perp\vec{n}\right)$$

R

2- بين أن : $$AH=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

لدينا : $$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$$
$$\pm\overrightarrow{AH}\cdot\|\vec{n}\|=\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}$$

إذن : $$AH\cdot\|\vec{n}\|=\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|$$

إذن : $$AH=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

3- لتكن $(x+y+z+1=0)$ معادلة ديكارتية للمستوى (P) و $A(1,0,1)$ نقطة من $\mathcal{E}$.

- أحسب مسافة A عن المستوى (P). $d(A,(P))$

لدينا : $$B(1,1,-3)\in(P)$$

إذن : $$d(A,(P))=AH$$

حيث : H هو المسقط العمودي للنقطة A على (P).

$$AH=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$
$$\overrightarrow{AB}(0,1,-4)$$
$$\vec{n}(1,1,1)$$

إذن : $$AH=\frac{\left|(0\times1)+(1\times1)+(-4\times1)\right|}{\sqrt{1+1+1}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

4- لتكن $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على (P).

و : $(ax+by+cz+d=0)$ معادلة ديكارتية للمستوى (P).

و : $A(x_A,y_A,z_A)$ نقطة من الفضاء $\mathcal{E}$.

لدينا : $$d(A,(P))=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}\,/\,B(x_B,y_B,z_B)$$
$$d(A,(P))=\frac{\left|a(x_B-x_A)+b(y_B-y_A)+c(z_B-z_A)\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{\left|-ax_A-by_A-cz_A-d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

خلاصة وخاصية :

ليكن : $(P):ax+by+cz+d=0$

و : $A(x_A,y_A,z_A)$ نقطة من $\mathcal{E}$.

$$d(A,(P))=\frac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

La sphère الفلكـــة

I- الفلكة المعرفة بمركزها وشعاعها.

تعريف :

لتكن A نقطة من الفضاء ξ و R عدد حقيقي.
الفلكة التي مركزها A وشعاعها R هي مجموعة النقط M حيث : $AM = R$.
ونرمز لها بـ : $S(A,R)$

$$S(A,R) = \{M \in \xi \,/\, AM = R\}$$

معادلة فلكة :

1) معادلة فلكة معرفة بمركزها وشعاعها :

الفضاء ξ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

لتكن : $S(\Omega,R)$ فلكة مركزها $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ وشعاعها R حيث $R \succ 0$.

لدينا :
$$M(x,y,z) \in S(\Omega,R) \Leftrightarrow \Omega M = R$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$$
$$\Leftrightarrow \boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2}$$

وهذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة $S(\Omega,R)$

أمثلـة :

1) $\Omega(3,0,1)$, $R=2$

$$S_1 : (x-3)^2+(y)^2+(z-1)^2 = 4$$

2) $\Omega(1,2,-3)$, $R=1$

$$S_2 : (x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2 = 1$$

3) $$\left(x+\sqrt{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

S_1 هي فلكة مركزها $\Omega\left(-\sqrt{2},1,\frac{1}{2}\right)$ وشعاعها $R=\sqrt{2}$.

4) $\Omega(0,0,0)$ و $R=1$

$$S_4 : x^2+y^2+z^2 = 1$$

2) معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها.

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء ξ.
توجد فلكة وحيدة S أحد أقطارها $[AB]$.
لتكن S فلكة أحد أقطارها هو $[AB]$.

$$M \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$$

لتكن : $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$
و : $M(x,y,z)$.

و S فلكة أحد أقطارها هو $[AB]$.

لدينا : $M \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0}$$

وهذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة S التي أحد أقطارها هو $[AB]$.

ملاحظة :

إذا كان $[AB]$ قطر للفلكة S فإن منتصف $[AB]$ هو مركزها وشعاعها هو : $\frac{AB}{2}$.

3) دراسة المعادلة : $(E): x+y+z-2ax-2by-2cz+d=0$

لدينا : $(E) \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = a^2+b^2+c^2-d$

الحالة① : $a^2+b^2+c^2-d \prec 0$

$$S=\varnothing$$

الحالة② : $a^2+b^2+c^2-d=0$

$$S=\{\Omega(a,b,c)\}$$

الحالة③ : $a^2+b^2+c^2-d \succ 0$

نضع : $R^2=a^2+b^2+c^2-d$ حيث $R \succ 0$

$$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$$

$$S=S(\Omega(a,b,c),R)$$

مثال :

$$(E): x^2+y^2+z^2-2y+z-3=0$$

ط1 :

لدينا :

$$a=0$$
$$b=1$$
$$c=-\frac{1}{2}$$
$$d=-3$$

إذن : $a^2+b^2+c^2-d=1+\frac{1}{4}+3=\frac{17}{4} \succ 0$

إذن : S فلكة مركزها : $\Omega\left(0,1,-\frac{1}{2}\right)$ وشعاعها $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

ط2 :

لدينا : $(E): x^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=1+\frac{1}{4}+3$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$$

$$S=S\left(\Omega\left(0,1,\frac{-1}{2}\right),\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

II- تقاطع فلكة ومستوى :

الوضع النسبي لمستوى وفلكة :

ليكن P مستوى و S فلكة مركزها Ω وشعاعها R.
لدراسة الوضع النسبي للمستوى P والفلكة S،
نحسب المسافة d بين (P) و Ω. $\quad d = d(\Omega,(P))$

الحالة① : $d(\Omega,(P)) \succ R$

$$S \cap P = \varnothing$$

الحالة② : $d(\Omega,(P)) = R$

$$(S) \cap (P) = \{H\}$$

بحيث H هي المسقط العمودي للنقطة Ω على (P).
في هذه الحالة نقول ان المستوى (P) مماس للفلكة (S).

الحالة③ : $d(\Omega,(P)) \prec R$

في هذه الحالة تقاطع (S) و (P) هو دائرة ℓ مركزها H.
(حيث H هو المسقط العمودي للنقطة Ω على (P)). وشعاعها r حيث : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.
علما أن : $d = d(\Omega,(P)) = \Omega H$

مثـال :

$$(P): 2x - y + z + 1 = 0$$

و : $S\{\Omega, 2\}$

حيث : $\Omega(1,-1,1)$

لدينا :
$$d(\Omega,(P)) = \frac{|2+1+1+1|}{\sqrt{4+1+1}}$$
$$= \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} \succ 2$$

إذن : $S \cap P = \varnothing$

معادلة المستوى المماس للفلكة في نقطة معينة.

لتكن A نقطة من الفلكة S ذات المركز Ω والشعاع R.
وليكن (P) المستوى المماس للفلكة S في A .

لدينا : $M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

ملاحظة :

$\overrightarrow{\Omega A}$ منظمية على (P).

مثـال :

(S) فلكة معادلتها : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

و : $A(1,1,0)$

حدد معادلة المستوى المماس للفلكة S في A.

لدينا : $A \in S$

إذن : $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

وبماأن : $\Omega(1,-,1,0)$

$A(1,1,0)$

$M(x,y,z)$

R

فإن : $\overrightarrow{A\Omega}(0,-2,0)$

$\overrightarrow{AM}(x-1,y-1,z)$

إذن : $-2(y-1)=0$

ومنه : $y=1$ هي معادلة المستوى المماس للفلكة S في النقطة A.

III- تقاطع فلكة ومستقيم :

مثـال 1 :

أدرس تقاطع الفلكة S والمستقيم (D).

حيث : $(S): x^2+y^2+z^2-3x+2y-4z-5=0$

و : $(D):\begin{cases} x=t \\ y=t+1 \\ z=2 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

الجـواب :

لدراسة تقاطع الفلكة (S) والمستقيم (D)،

نحل النظمة : $\begin{cases} x=t \\ y=t+1 \\ z=2 \\ x^2+y^2+z^2-3x+2y-4z-5=0 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

$$t^2+(t+1)^2+4-3t+2(t+1)-8-5=0$$

$$2t^2+t-6=0$$

لنحل المعادلة : $\Delta=1-4(2)\times(-6)$

$=49\succ 0$

إذن : $t_1=\dfrac{-1-7}{4}=-2$

$t_2=\dfrac{-1+7}{4}=\dfrac{3}{2}$

ومنه تقاطع الفلكة S والمستقيم (D) هي النقطتين : $A(-2,-1,2)$

و : $B\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2},2\right)$.

مثـال 2 :

أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) والفلكة (S).

حيث : $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=-4$

$(D):\begin{cases} x=t+1 \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases} \quad / \quad (t\in\mathbb{R})$

الجـواب :

$$(1+t-1)^2+(-1+2t+1)^2+t^2=-4$$

$$t^2+4t^2+t^2=-4$$

$$6t^2=-4$$

$$6t^2+4=0$$

$$\Delta=-96\prec 0$$

ومنه : $(S)\cap(D)=\varnothing$

الجـداء المتجـهــي
Produit vectoriel

توجيه الفضاء

1- المعلم الموجه في الفضاء.
Repère orienté dans l'espace

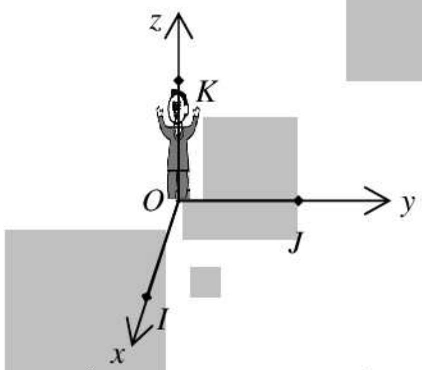
ليكن $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلما للفضاء ξ ، ولتكن I ، J و K ثلاث نقط من ξ.

بحيث : $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ ، $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ ، $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$

رجل أمبير هو رجل خيالي، رجلاه في O ورأسه في K وينظر في اتجاه النقطة I.

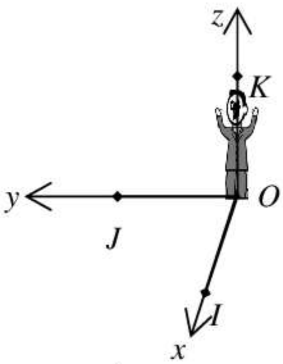
إذن لدينا حالتين :

الحالـة 1



النقطة J توجد على يسار رجل أمبير

الحالـة 2



النقطة I توجد على يمين رجل أمبير.

إذا كانت J على يسار رجل أمبير، نقول أن المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ مباشرا.

وإذا كانت J على يمين رجل أمبير، نقول أن المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ غير مباشر.

أمثلـة :

نفترض أن المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ مباشر.

إذن : المعلم $\left(O,\vec{j},\vec{k},\vec{i}\right)$ مباشر.

المعلم $\left(O,\vec{k},\vec{i},\vec{j}\right)$ مباشر.

المعلم $\left(O,\vec{j},\vec{i},\vec{k}\right)$ غير مباشر.

ملاحظة :

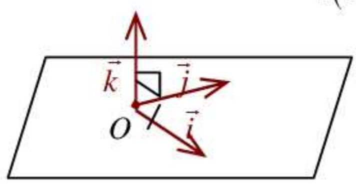
إذا كان المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ مباشر.

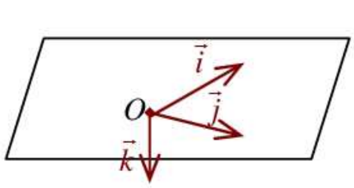
فإن : الأساس $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ مباشر.

2- توجيه مستوى في الفضاء.

ليكن (P) مستوى في الفضاء ξ و $\vec{k}$ متجهة واحدية منظمية على (P).

لتكن O نقطة من (P).





يمكن إنشاء معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ مباشر، بحيث $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متجهتان موجهتان للمستوى (P).

ملاحظة :
يتم توجيه المستوى بتوجيه متجهة منظمية عليه.

II- الجداء المتجهي.

تعريف :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_3. و A و B نقطتان من ξ بحيث : $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.

الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من هذا الترتيب هو المتجهة التي نرمز لها بـ : $\vec{u}\wedge\vec{v}$ والمعرفة كما يلي :

- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين :
  - المتجهة $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ تحقق $\vec{w}\perp\vec{v}$ و $\vec{w}\perp\vec{u}$
  - $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ أساس مباشر.
  - $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\sin\theta$ / حيث θ قياس الزاوية $[A\hat{O}B]$

أمثلــة :

نفترض أن المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما متعامدا ممنظما مباشرا.

$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k} \qquad \vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$$
$$\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i} \qquad \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$$
$$\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j} \qquad \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$$

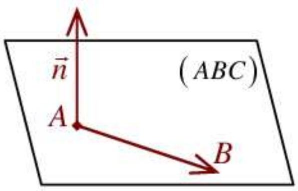
تطبيـق :

بين أن : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2$

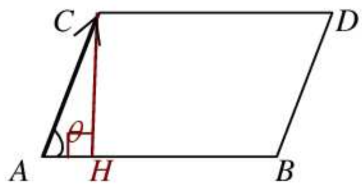
لدينا :
$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2\cdot\sin^2\theta+\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2\cdot\cos^2\theta$$
$$=\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2$$

خاصيات :

1) إذا كانت A ، B و C ثلاث نقط غير مستقيمية فإن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).



2) ليكن θ قياسا للزاوية $[B\hat{A}C]$.



لدينا : $\sin\theta=\dfrac{CH}{AC}$

إذن : $CH=AC\sin\theta$

إذن : $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=AB\cdot CH$

استنتاج :

العدد $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$ هو مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على القطعتين $[AB]$ و $[AC]$.

خاصية :

مساحة المثلث ABC هي العدد : $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$.

R

3) يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا وفقط إذا كان : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

4) الجداء المتجهي والعمليات :

لتكن $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات و α عدد حقيقي.

- $\vec{v}\wedge\vec{u}=-\vec{u}\wedge\vec{v}$
- $(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge\alpha\vec{v}=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$

III- الصيغة التحليلية للجداء المتجهي في معلم متعامد ممنظم مباشر.

L'ex pression analytique du produit vectoriel dans un repère orthonormé direct.

نعتبر المتجهتان $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$.

لدينا :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\wedge\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$$
$$=xy'\vec{k}-xz'\vec{j}-yx'\vec{k}+yz'\vec{i}+zx'\vec{j}-zy'\vec{i}$$
$$=(yz'-zy')\vec{i}-(xz'-x'z)\vec{j}+(xy'-x'y)\vec{k}$$
$$=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$$

استنتاج :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}z & z'\\ x & x'\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

أمثلـــة :

1) $\vec{v}(-1,0,1)$ و $\vec{u}(1,2,1)$

لدينا :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=2\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$$

2) $C(1,1,0)$ ، $B(0,1,1)$ ، $A(1,0,1)$

لدينا : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

إذن :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

إذن : $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{3}$

ومنه : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (وحدة القياس) هي مساحة المثلث ABC .

IV- تطبيقات الجداء المتجهي.

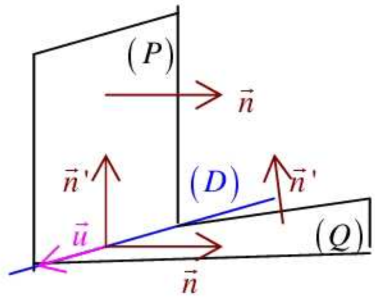
1- حساب مساحة المثلث.

2- معادلة مستوى معرف بـ 3 نقط غير مستقيمية.

المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).

3- تقاطع مستويين.

لتكن $\vec{n}$ منظمية على (P) و $\vec{n}'$ منظمية على (Q).



إذا كانت $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير مستقيميتين،

فإن المتجهة $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$ هي متجهة موجهة للمستقيم (D) تقاطع (P) و (Q).

4- مسافة نقطة عن مستقيم.

ليكن : $D(A,\vec{u})$ مستقيما في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

ولتكن B نقطة من الفضاء $\mathcal{E}$، و H المسقط العمودي لـ B على (D).

لدينا :
$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) \wedge \vec{u}$$
$$= \overrightarrow{HB} \wedge \vec{u}$$

إذن :
$$\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HB} \wedge \vec{u}\right\|$$
$$= HB \cdot \|\vec{u}\|$$

إذن :
$$HB = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

إذن :
$$d(B,(D)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

خاصيـة :

الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم م.م.

مسافة النقطة B عن المستقيم $D(A,\vec{u})$ هي :

$$d(B,(D)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

مثـال :

$$A(2,1,0)$$

و
$$D \;:\; \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

لنحسب $d(A,(D))$

لدينا : $C(0,1,0) \in (D)$

و : $\vec{u}(1,1,-1)$ متجهة موجهة لـ (D).

R

إذن : $d\left(A,(D)\right)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{CA}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

وبما أن : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

فإن : $\overrightarrow{CA}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}0&1\\0&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&1\\0&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$

و : $=2\vec{j}+2\vec{k}$

إذن : $\left\|\overrightarrow{CA}\wedge\vec{u}\right\|=\sqrt{8}$

و : $\|\vec{u}\|=\sqrt{3}$

إذن : $d\left(A,(D)\right)=\sqrt{\dfrac{8}{3}}$

تمرين تطبيقي :

تمرين 5 (سلسلة الهندسة الفضائية) :

1- a- لدينا : $A(-3,0,0)$ ، $B(-1,0,-1)$ ، $C(-1,1,0)$ و $\Omega(1,-1,0)$.

لنحسب : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

لدينا : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

إذن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&0\\2&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&2\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$

$=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

بماأن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}==\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

فإن معادلة المستوى (ABC) تكتب على شكل $x-2y+2z+d=0$.

b- وبما أن : $A\in(ABC)$

فإن : $-3+0+0+d=0$

إذن : $d=3$

ومنه : $x-2y+2z+3=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

2- a- لدينا :

$$(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$$

b- لدينا : $d\left(\Omega,(ABC)\right)=\dfrac{|1+2+3|}{\sqrt{1+4+4}}$

$=2=R$

إذن : (ABC) مماس للفلكة (S).

3- a- لدينا : $(Q):2x+2y+z+3=0$

إذن : $d\left(\Omega,(Q)\right)=\dfrac{|2-2+3|}{\sqrt{4+4+1}}$

إذن : (Q) متقاطع مع (S) وفق دائرة.

b- لدينا : $(2\times1)+(2\times(-2))+(1\times2)=2-4+2=0$

إذن : $(ABC)\perp(Q)$

c- لدينا : (D) يمر من Ω و $(D)\perp(Q)$.

إذن : $(D)\ :\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

d- مركز الدائرة هو النقطة W تقاطع (D) و (Q).

لنحل النظمة :

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \\ z=t \\ 2x+2y+z+3=0 \end{cases}$$

إذن :

$$2(1+2t)+2(-1+2t)+t+3=0$$
$$9t+3=0$$
$$t=-\frac{1}{3}$$

ومنه : $W\left(\frac{1}{3},\frac{-5}{3},\frac{-1}{3}\right)$ مركز الدائرة (ℓ).

وبما أن : $2^2=4=\Omega W^2+r^2$

فإن : $r^2=4-1$

$r^2=3$

إذن : $r=\sqrt{3}$

تمريـن :

لدينا : $A(1,0,0)$ ، $B(0,2,1)$ ، $C(1,2,1)$.

1- أحسب الجداء $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ واستنتج معادلة المستوى (ABC).

2- لتكن (S) فلكة حيث تقاطعها مع المستوى (ABC) هو الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

a- بين أن O تنتمي إلى (S).

b- حدد معادلة الفلكة (S) علما أن : $H(0,0,3)\in(S)$

3- ليكن (P) المستوى المماس للفلكة (S) في H.

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P).

4- أحسب المسافة : $d(H,(AB))$.