الجـداء المتجـهــي

Produit vectoriel

توجيه الفضاء

1- المعلم الموجه في الفضاء.

Repère orienté dans l'espace

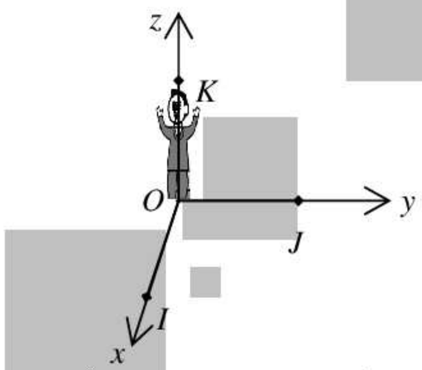
ليكن $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما للفضاء $\mathcal{E}$ ، ولتكن I ، J و K ثلاث نقط من $\mathcal{E}$.

بحيث : $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ ، $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ ، $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$

رجل أمبير هو رجل خيالي، رجلاه في O ورأسه في K وينظر في اتجاه النقطة I.

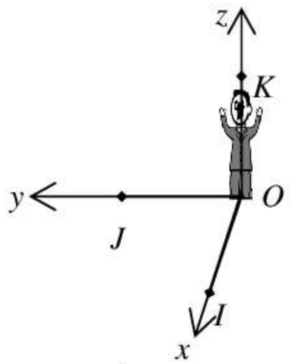
إذن لدينا حالتين :

الحالــة 1



النقطة J توجد على يسار رجل أمبير

الحالــة 2



النقطة I توجد على يمين رجل أمبير.

إذا كانت J على يسار رجل أمبير، نقول أن المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشرا.

وإذا كانت J على يمين رجل أمبير، نقول أن المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ غير مباشر.

أمثلــة :

نفترض أن المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشر.

إذن : المعلم $(O,\vec{j},\vec{k},\vec{i})$ مباشر.

المعلم $(O,\vec{k},\vec{i},\vec{j})$ مباشر.

المعلم $(O,\vec{j},\vec{i},\vec{k})$ غير مباشر.

ملاحظة :

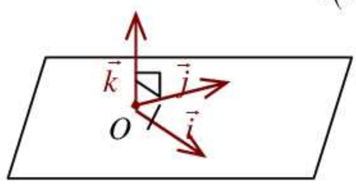
إذا كان المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشر.

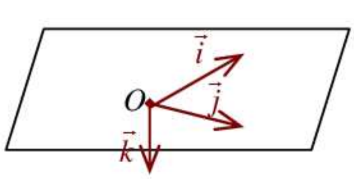
فإن : الأساس $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشر.

2- توجيه مستوى في الفضاء.

ليكن (P) مستوى في الفضاء $\mathcal{E}$ و $\vec{k}$ متجهة واحدية منظمية على (P).

لتكن O نقطة من (P).





يمكن إنشاء معلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مباشر، بحيث $\vec{j}$ و $\vec{k}$ متجهتان موجهتان للمستوى (P).

ملاحظة :

يتم توجيه المستوى بتوجيه متجهة منظمية عليه.

II- الجداء المتجهي.

تعريف :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من V_3. و A و B نقطتان من ξ بحيث : $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.

الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من هذا الترتيب هو المتجهة التي نرمز لها بـ : $\vec{u}\wedge\vec{v}$ والمعرفة كما يلي :

- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين :
  - المتجهة $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ تحقق $\vec{w}\perp\vec{v}$ و $\vec{w}\perp\vec{u}$
  - $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ أساس مباشر.
  - $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\sin\theta$ / حيث θ قياس الزاوية $[A\hat{O}B]$

أمثلـة :

نفترض أن المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما متعامدا ممنظما مباشرا.

$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k} \qquad \vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$$
$$\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i} \qquad \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$$
$$\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j} \qquad \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$$

تطبيـق :

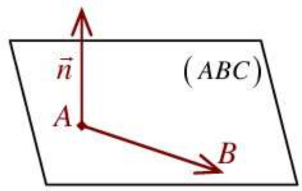
بين أن : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2$

لدينا :

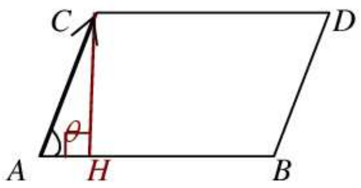
$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2\cdot\sin^2\theta+\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2\cdot\cos^2\theta$$
$$=\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2$$

خاصيات :

1) إذا كانت A ، B و C ثلاث نقط غير مستقيمية فإن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).



2) ليكن θ قياسا للزاوية $[B\hat{A}C]$.



لدينا : $\sin\theta=\dfrac{CH}{AC}$

إذن : $CH=AC\sin\theta$

إذن : $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=AB\cdot CH$

استنتاج :

العدد $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$ هو مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على القطعتين $[AB]$ و $[AC]$.

خاصية :

مساحة المثلث ABC هي العدد : $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$.

3) يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا وفقط إذا كان : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

4) الجداء المتجهي والعمليات :

لتكن $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات و α عدد حقيقي.

- $\vec{v}\wedge\vec{u}=-\vec{u}\wedge\vec{v}$
- $(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge\alpha\vec{v}=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$

III- الصيغة التحليلية للجداء المتجهي في معلم متعامد ممنظم مباشر.

L'ex pression analytique du produit vectoriel dans un repère orthonormé direct.

نعتبر المتجهتان $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$.

لدينا :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\wedge\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$$
$$=xy'\vec{k}-xz'\vec{j}-yx'\vec{k}+yz'\vec{i}+zx'\vec{j}-zy'\vec{i}$$
$$=(yz'-zy')\vec{i}-(xz'-x'z)\vec{j}+(xy'-x'y)\vec{k}$$
$$=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$$

استنتاج :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

أمثلــة :

1) $\vec{v}(-1,0,1)$ و $\vec{u}(1,2,1)$

لدينا :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=2\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$$

2) $C(1,1,0)$ ، $B(0,1,1)$ ، $A(1,0,1)$

لدينا : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

إذن :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

إذن : $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{3}$

ومنه : $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (وحدة القياس) هي مساحة المثلث ABC .

R

IV- تطبيقات الجداء المتجهي.

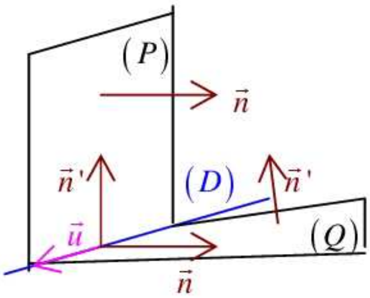
1- حساب مساحة المثلث.

2- معادلة مستوى معرف بـ 3 نقط غير مستقيمية.

المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).

3- تقاطع مستويين.

لتكن $\vec{n}$ منظمية على (P) و $\vec{n}\,'$ منظمية على (Q).



إذا كانت $\vec{n}$ و $\vec{n}\,'$ غير مستقيميتين،

فإن المتجهة $\vec{u}=\vec{n}\wedge\vec{n}\,'$ هي متجهة موجهة للمستقيم (D) تقاطع (P) و (Q).

4- مسافة نقطة عن مستقيم.

ليكن : $D(A,\vec{u})$ مستقيما في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

ولتكن B نقطة من الفضاء $\mathcal{E}$، و H المسقط العمودي لـ B على (D).

لدينا :
$$\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)\wedge\vec{u}$$
$$=\overrightarrow{HB}\wedge\vec{u}$$

إذن :
$$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|=\left\|\overrightarrow{HB}\wedge\vec{u}\right\|$$
$$=HB\cdot\|\vec{u}\|$$

إذن :
$$HB=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

إذن :
$$d\left(B,(D)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

خاصيـة :

الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم م.م.

مسافة النقطة B عن المستقيم $D(A,\vec{u})$ هي :

$$d\left(B,(D)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

مثـال :

$$A(2,1,0)$$

و
$$D\ :\ \begin{cases} x=t \\ y=1+t \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=-t \end{cases}$$

لنحسب $d\left(A,(D)\right)$

لدينا : $C(0,1,0)\in(D)$

و : $\vec{u}(1,1,-1)$ متجهة موجهة لـ (D).

إذن : $d\left(A,(D)\right)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{CA}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

وبما أن : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

فإن : $\overrightarrow{CA}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}0&1\\0&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&1\\0&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$

و : $=2\vec{j}+2\vec{k}$

إذن : $\left\|\overrightarrow{CA}\wedge\vec{u}\right\|=\sqrt{8}$

و : $\|\vec{u}\|=\sqrt{3}$

إذن : $d\left(A,(D)\right)=\sqrt{\dfrac{8}{3}}$

تمرين تطبيقي :

تمرين 5 (سلسلة الهندسة الفضائية) :

1- a- لدينا : $A(-3,0,0)$ ، $B(-1,0,-1)$ ، $C(-1,1,0)$ و $\Omega(1,-1,0)$.

لنحسب : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

لدينا : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

إذن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&0\\2&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&2\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$

$=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

بماأن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}==\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

فإن معادلة المستوى (ABC) تكتب على شكل $x-2y+2z+d=0$.

b- وبما أن : $A\in(ABC)$

فإن : $-3+0+0+d=0$

إذن : $d=3$

ومنه : $x-2y+2z+3=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

2- a- لدينا :

$$(S):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$$

b- لدينا : $d\left(\Omega,(ABC)\right)=\dfrac{|1+2+3|}{\sqrt{1+4+4}}$

$=2=R$

إذن : (ABC) مماس للفلكة (S).

3- a- لدينا : $(Q):2x+2y+z+3=0$

إذن : $d\left(\Omega,(Q)\right)=\dfrac{|2-2+3|}{\sqrt{4+4+1}}$

إذن : (Q) متقاطع مع (S) وفق دائرة.

b- لدينا : $(2\times1)+(2\times(-2))+(1\times2)=2-4+2=0$

R

إذن : $(ABC)\perp(Q)$

c- لدينا : (D) يمر من Ω و $(D)\perp(Q)$.

إذن : $(D)\ :\ \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

d- مركز الدائرة هو النقطة W تقاطع (D) و (Q).

لنحل النظمة :

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \\ z=t \\ 2x+2y+z+3=0 \end{cases}$$

إذن :

$$2(1+2t)+2(-1+2t)+t+3=0$$
$$9t+3=0$$
$$t=-\frac{1}{3}$$

ومنه : $W\left(\frac{1}{3},\frac{-5}{3},\frac{-1}{3}\right)$ مركز الدائرة (ℓ).

وبما أن : $2^2=4=\Omega W^2+r^2$

فإن : $r^2=4-1$

$r^2=3$

إذن : $r=\sqrt{3}$

تمريـن :

لدينا : $A(1,0,0)$ ، $B(0,2,1)$ ، $C(1,2,1)$.

1- أحسب الجداء $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ واستنتج معادلة المستوى (ABC).

2- لتكن (S) فلكة حيث تقاطعها مع المستوى (ABC) هو الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

a- بين أن O تنتمي إلى (S).

b- حدد معادلة الفلكة (S) علما أن : $H(0,0,3)\in(S)$

3- ليكن (P) المستوى المماس للفلكة (S) في H.

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P).

4- أحسب المسافة : $d(H,(AB))$.