

دراسة وتمثيل الدوال الحدودية من الدرجة الثانية و الثالثة و دوال متخاطة

مثال 1

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = x^2 - x - 1$

- (1) حدد مجموعة تعريف الدالة f
- (2) احسب نهايات الدالة f عند محداث مجموعة تعريف الدالة f
- (3) احسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R} ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
- (4) انشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

الجواب

(1)

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ لأن f دالة حدودية

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

(3)

لكل x من \mathbb{R} لدينا : $f'(x) = 2x - 1$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2x - 1$.

لكل x من \mathbb{R} :

$$x = \frac{1}{2} \text{ أي } 2x - 1 = 0 \text{ تكافئ } f'(x) = 0 \quad \blacklozenge$$

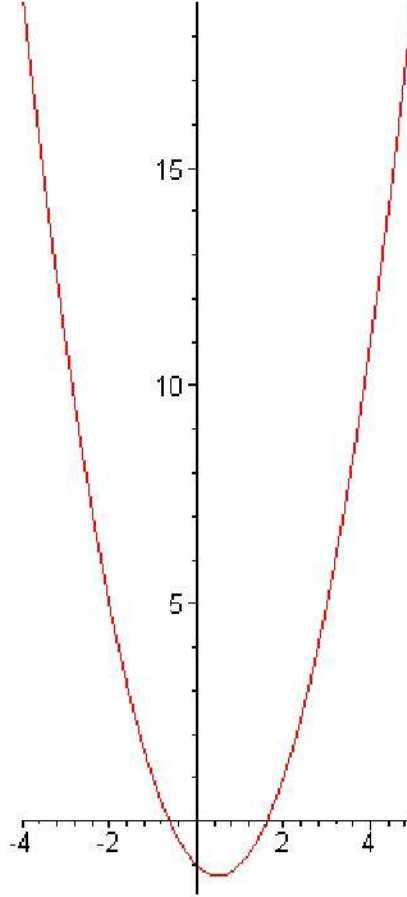
$$x > \frac{1}{2} \text{ أي } 2x - 1 > 0 \text{ تكافئ } f'(x) > 0 \quad \blacklozenge$$

$$x < \frac{1}{2} \text{ أي } 2x - 1 < 0 \text{ تكافئ } f'(x) < 0 \quad \blacklozenge$$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		\ominus	\oplus
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$

(4)



مثال 2

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

- (1) حدد مجموعة تعريف الدالة f
- (2) احسب نهايات الدالة f عند محددات مجموعة تعريف الدالة f
- (3) هل منحنى الدالة f يقبل مقاربات أفقية؟ عمودية؟
- (4) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R} - \{2\}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
- (5) انشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) مستعينا بجدول التغيرات و جدول لصور بعض القيم

الجواب

(1)

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-2 \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\}$$

$$= \mathbb{R} - \{2\}$$

$$=]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

(2)

$$\begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{2x-1}{x-2} \\ = +\infty \\ \text{لأن} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} 2x-1 = 3 \\ \text{و} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x-2 = 0^+ \end{array} \quad \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{2x-1}{x-2} \\ = -\infty \\ \text{لأن} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} 2x-1 = 3 \\ \text{و} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x-2 = 0^- \end{array} \quad \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-2} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} \\ = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x-2} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} \\ = 2 \end{array}$$

(3)
- بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ فإن المستقيم $y = 2$ مقارب أفقي لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$ و $+\infty$
- بما أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$ فإن $x = 2$ مقارب رأسي لمنحنى الدالة f بجوار 2 على اليسار و على

اليمين .

(4)

لكل $x \neq 2$

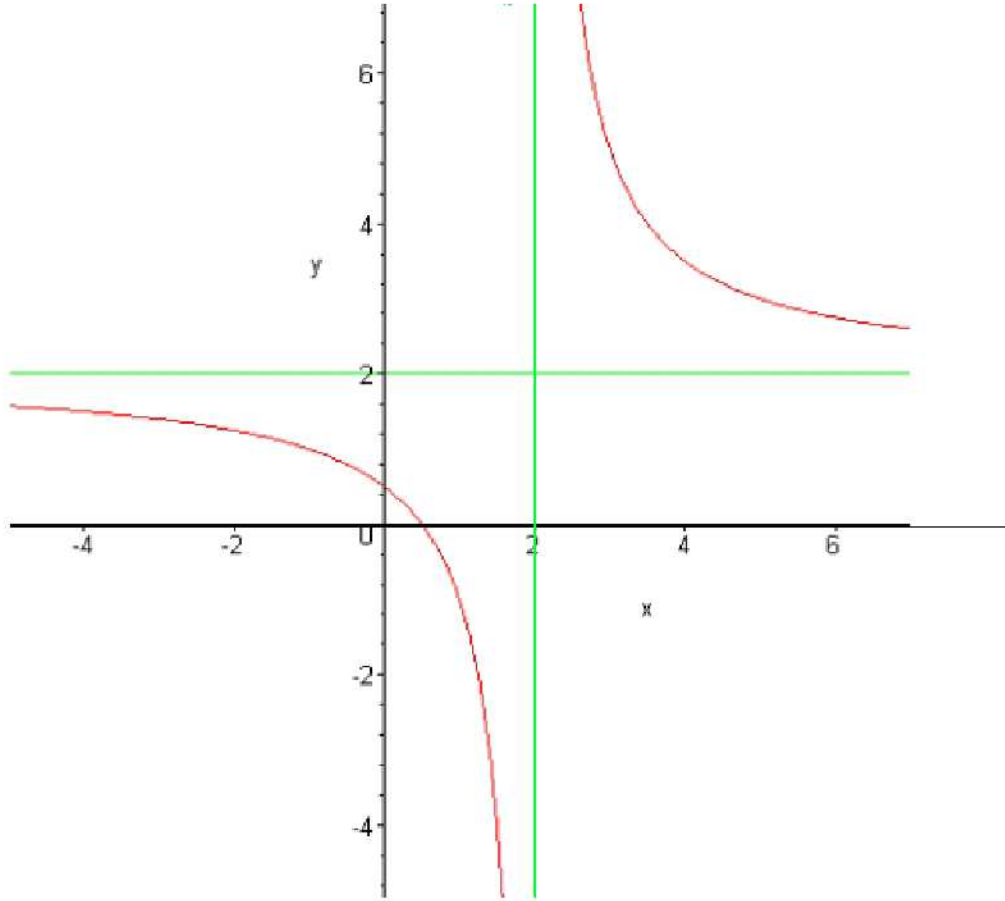
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2)(x-2) - (2x-1)(1)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x-4-2x+1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{-3}{(x-2)^2} < 0 \end{aligned}$$

إن الدالة f تناقصية قطعا على كل من المجالين $]-\infty; 2[$ و $]2; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	2	$+\infty$	2

(5)



مثال 3

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6$

- (1) حدد مجموعة تعريف الدالة f
- (2) احسب نهايات الدالة f عند محددات مجموعة تعريف الدالة f
- (3) احسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R} ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
- (4) انشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

الجواب

(
 $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ لأن f دالة حدودية
 (2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 \\ &= -\infty \end{aligned}$$

(3
 لكل x من \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 3x \\ &= -3x(x-1) \end{aligned}$$

الثلاثية $-3x^2 + 3x$ أي $-3x(x-1)$ تنعدم عند 1 أو 0 مع $f(1) = -1 + \frac{3}{2} + 6 = \frac{13}{2}$ و $f(0) = 6$
جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	↘ 6	↗ $\frac{17}{2}$	↘ $-\infty$	

(4)

