تمارين تطبيقية مصاحبة للدرس 7 مع حلولها

تمرين 1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

وليكن (Cf) منحناها في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

حدد معادلة المماس (Δ) للمنحنى (Cf) عند النقطة التي أفصولها $x_0 = 0$.

حل التمرين 1

نعلم أن معادلة المماس للمنحنى (Cf) في النقطة التي أفصولها x_0 هي : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

لدينا : $f(x) = x^2 - 3x + 1$

ومنه : $f'(x) = 2x - 3$

معادلة (Δ) هي :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

وبما أن : $f'(0) = -3$ و $f(0) = 1$

فإن : $(\Delta): y = -3x + 1$

تمرين 2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

1 – حدد Df مجموعة تعريف f.

2 – أحسب $f'(x)$ لكل x من Df .

3 – حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (Cf) عند النقطة التي أفصولها $x_0=2$.

حل التمرين 2

1 – لنحدد Df .

$$Df = \{x \in IR / x + 2 \neq 0\}$$

ومنه : $Df = \{x \in IR / x \neq -2\}$

$$Df = IR \{-2\}$$

2 – لنحسب $f'(x)$ لكل x من Df .

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)'(x+2) - (x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1.(x+2) - (x-1).1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$$

3 – معادلة المماس (T) للمنحنى (Cf) عند النقطة التي أفصولها $x_0=2$

$$(T): y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f'(2) = \frac{3}{(2+2)^2} = \frac{3}{16}$$

$$f(2) = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$(T): y = \frac{3}{16}(x-2) + \frac{1}{4}$$

$$(T): y = \frac{3}{16}x - \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$$

$$(T): y = \frac{3}{16}x - \frac{1}{8}$$

تمرين 3

أحسب مشتقة الدالة العددية f في كل حالة من الحالات التالية :

① $f(x) = x^3 - 3x + 5$

② $f(x) = -4x^2 + x + 13$

③ $f(x) = -x^3 + x^2 - 3x + 1$

④ $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$

⑤ $f(x) = \frac{1-3x}{x-1}$

⑥ $f(x) = (x+1)^{2012}$

حل التمرين 3

لنحسب مشتقة الدالة العددية f في كل حالة :

① $f(x) = x^3 - 3x + 5$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

② $f(x) = -4x^2 + x + 13$

$f'(x) = -4.2x + 1 = -8x + 1$

③ $f(x) = -x^3 + x^2 - 3x + 1$

$f'(x) = -3x^2 + 2x - 3$

④ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+5}$

$f'(x) = \dfrac{(2x+1)'(x+5) - (2x+1)(x+5)'}{(x+5)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2(x+5) - (2x+1).1}{(x+5)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x + 10 - 2x - 1}{(x+5)^2} = \dfrac{9}{(x+5)^2}$

⑤ $f(x) = \dfrac{1-3x}{x-1}$

$f'(x) = \dfrac{(1-3x)'(x-1) - (x-3x)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-3(x-1) - (1-3x).1}{(x-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-3x + 3 - 1 + 3x}{(x-1)^2} = \dfrac{2}{(x-1)^2}$

⑥ $f(x) = (x+1)^{2012}$

$f'(x) = 2012.(x+1)'(x+1)^{2012-1}$

$f'(x) = 2012(x+1)^{2011}$

تمرين 4

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$

1 – أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2 – أ – بين أن لكل x من IR :

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

ب – أدرس اشارة $3x^2 - 2x$

ج – اعط جدول تغيرات f.

حل التمرين 4

1 – لدينا : $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$

ومنه : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

2 – أ – لدينا :

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

ب – نعتبر المعادلة :

$3x^2 - 2x - 1 - 0$

$\Delta = 16 \quad ; x_1 = 1$ و $x_2 = -\dfrac{1}{3}$

ومنه إشارة $3x^2 - 2x - 1$ تلخص في الجدول :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-2x-1$		+	0	-	0	+	

ج – جدول تغيرات f هو :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{59}{27}$	↘	1	↗	$+\infty$

الاشتقاق

العدد المشتق في نقطة

1)نشاط

احسب $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ في كل حالة من الحالات التالية

أ- $f:x\mapsto x+1$ $\quad x_0=1$

ب- $f:x\mapsto x^2+x$ $\quad x_0=-2$

ج- $f:x\mapsto \dfrac{x-1}{2x+1}$ $\quad x_0=2$

2)الجواب

أ-

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}$$
$$=1$$

العددد **1** يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة **1** و نرمز له بالرمز $f'(1)$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

ب-

$$f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x-(-2)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2}x-1$$
$$=-3$$

بما أن $f'(-2)=-3$ عدد ينتمي إلى $\mathbb{R}$ أي منته فإن f دالة قابلة للاشتقاق في -2

ج-

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x-1}{2x+1}-\frac{1}{5}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{5x-5-2x-1}{5(2x+1)}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{3x-6}{5(2x+1)}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{5(2x+1)}\times\frac{1}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3}{5(2x+1)}$$

$$=\frac{3}{25}$$

3)تعريف

لتكن f دالة عددية و x_0 عددا حقيقيا من مجال ضمن مجموعة تعريفها D_f .

• نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 ، إذا كانت النهاية $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية.و تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 و نرمز له بالرمز $f'(x_0)$.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

• المعادلة $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ تسمى معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0

4)تمرين تطبيقي

حدد معادلة االمماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 .

1) $x_0=1; f(x)=x^2+1$

2) $x_0=0; f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x+1$

3) $x_0=2; f(x)=\frac{x-1}{x+2}$

5)الجواب

1) بما أن :

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}x+1$$
$$=2$$

فإن معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها 1 هي: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي

$y=2(x-1)+2$ أي $y=2x$

2) بما أن :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3-2x+1-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3-2x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{1}{3}x^2-2\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}x^2-2$$
$$=-2$$

فإن معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها 0 هي: $y=f'(0)x+f(0)$ أي

$y=-2x+1$

3) بما أن :

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x-1}{x+2}-\frac{1}{4}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{4x-4-x-2}{4(x+2)}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{3x-6}{4(x+2)}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{4(x+2)}\times\frac{1}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{3}{4(x+2)}$$
$$=\frac{3}{16}$$

فإن معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها 2 هي:

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$ أي $y=\frac{3}{16}(x-2)+\frac{1}{4}$ أي $y=\frac{3}{16}x-\frac{1}{8}$

6) الدالة المشتقة لبعض الدوال

أتعريف

لتكن f دالة عددية و E مجموعة قابلية اشتقاقها. الدالة التي تربط كل عنصر x من E بعدده المشتق تسمى الدالة المشتقة للدالة f

ب- الدالة المشتقة لبعض الدوال

1) | $f:x\mapsto a$ **(دالة ثابتة)** | $f':x\mapsto 0$ **(الدالة المشتقة منعدمة)** |
|---|---|

للبرهان على ذلك نختار عنصر x_0 من مجموعة قابلية اشتقاق الدالة f و نحسب $f'(x_0)$.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{a-a}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}0$$
$$=0$$

2) | $f:x\mapsto kx$ | $f':x\mapsto k$ |
|---|---|

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{kx-kx_0}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{k(x-x_0)}{x-x_0}$$
$$=k$$

3) $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)f:x\mapsto x^n$	$f':x\mapsto nx^{n-1}$

يمكنك التأكد من ذلك من أجل $n=2$ و $n=3$ مثلا.

7)العمليات على الدوال المشتقة

الدلة المشتقة	الدالة
$f'+g'$	$f+g$
$\lambda f'$	$(\lambda\in\mathbb{R})\lambda f$
$nf^{n-1}\times f'$	$\left(n\in\mathbb{N}^*\right)f^n$
$\frac{-f'}{f^2}$	$(f\neq 0)\frac{1}{f}$
$\frac{f'g-fg'}{g^2}$	$(g\neq 0)\frac{f}{g}$

8) تمرين

حدد الدالة المشتقة للدالة **f** في كل من الحالات التالية :

$$f(x)=(x-4)(x+3)$$
$$f(x)=(3x+2)^2(2x+1)$$
$$f(x)=\left(x^2-1\right)^5$$
$$f(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$$
$$f(x)=\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)^6$$

الجواب

$$f'(x)=\left[1\times(x+3)\right]+\left[(x-4)\times 1\right]$$
$$=x+3+x-4$$
$$=2x-1$$
$$f'(x)=\left[2(3x+2)\times 3\times(2x+1)\right]+\left[(3x+2)^2\times 2\right]$$
$$=2(3x+2)\left[3\times(2x+1)+(3x+2)\right]$$
$$=2(3x+2)(9x+5)$$
$$f'(x)=5\left(x^2-1\right)^4(2x)$$
$$=10x\left(x^2-1\right)^4$$
$$f'(x)=\frac{2(2x-1)-2(2x+1)}{(2x-1)^2}$$
$$=\frac{4x-2-4x-2}{(2x-1)^2}$$
$$=\frac{-4}{(2x-1)^2}$$
$$f(x)=6\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)^5\times\frac{2x(x+2)-\left(x^2-1\right)}{(x+2)^2}$$
$$=6\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)^5\times\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

9)رتابة دالة و إشارة مشتقتها

لتكن **f** دالة عددية لمتغير حقيقي قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح **I** ضمن مجموعة تعريفها D_f .

أ- تكون الدالة **f** تزايدية على المجال **I** إذا وفقط إذا كات لكل عنصر x من المجال **I** ، $f'(x)\geq 0$

ب- تكون الدالة **f** تناقصية على المجال **I** إذا وفقط إذا كات لكل عنصر x من المجال **I** ، $f'(x)\leq 0$

ت- تكون الدالة **f** ثابتة على المجال **I** إذا وفقط إذا كات لكل عنصر x من المجال **I** ، $f'(x)=0$

10)تمرين

ادرس رتابة الدالة **f** انطلاقا من إشارة مشتقتها في كل من الحالات التالية:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

$$f(x) = x^3 - 1$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{2x-3}$$

$$f(x) = \frac{-2x}{2x-3}$$