نهاية دالة عددية

1) نهاية دالة عددية في نقطة x_0

أ-نشاط (نأخذ $x_0 = 0$)

نعتبر الدالةالعددية f المعرفة على $I\!R$ بما يلي : $f(x) = x^2$ ، والدالة العددية g المعرفة على $I\!R^*$ بما يلي :

$g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

اتمم الجدول التالي :

x	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-4}	0	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
$f(x)$							
$g(x)$							

الجواب والتحليل

	x (اليسار) ⟶				⟵ x (اليمين)		
x	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-4}	0	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
$f(x)$	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}		10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}
$g(x)$	10^{4}	10^{6}	10^{8}		10^{8}	10^{6}	10^{4}

- نلاحظ أنه سواء اقتربت x من الصفر على اليمين أو على اليسار فإن العدد $f(x)$ يقترب من الصفر
  نقول إن العدد 0 هو نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى الصفر . و نكتب $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$
- نلاحظ أنه سواء اقتربت x من الصفر على اليمين أو على اليسار فإن العدد $g(x)$ يتحول من الأكبر إلى الأكبر أي في اتجاه موجب أي $+\infty$
  نقول أن $+\infty$ هو نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى الصفر . و نكتب $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

2) خاصية

لتكن P و Q دالتان حدوديتان و x_0 عددا حقيقيا .

- $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$
- إذا كان $Q(x_0) \neq 0$ فإن $\lim_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

تمرين تطبيقي

$$\lim_{x \to 1} 3x^2 - 1 ; \lim_{x \to 7} 3x^2 + x + 1 ; \lim_{x \to 0} \frac{2x^5 + 3x - 8}{x + 1}$$

الجواب

- $$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} 3x^2 - 1 &= 3(1)^2 - 1 \\ &= 3 \times 1 - 1 \\ &= 3 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 7} 3x^2+x+1 = 3(7)^2+7+1$$
$$= 3\times 49+7+1$$
$$= 147+8$$
$$= 155$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^5+3x-8}{x+1} = \frac{2(0)^5+3(0)-8}{0+1}$$
$$= \frac{-8}{1}$$
$$= -8$$

3) العمليات على النهايات

نهاية مجموع دالتين

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

نهاية جداء دالتين

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f\times g)$
l	l'	ll'
$l\ (l\neq 0)$	$+\infty$ أو $-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$
$+\infty$ أو $-\infty$	$l\ (l\neq 0)$	$+\infty$ أو $-\infty$
$+\infty$ أو $-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$
0	$+\infty$ أو $-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$ أو $-\infty$	0	شكل غير محدد

نهاية خارج دالتين

$\lim f$	$\lim g$	$\lim\left(\dfrac{f}{g}\right)$
$l \ (l \neq 0)$	0	$+\infty$ أو $-\infty$
$+\infty$ أو $-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$	شكل غير محدد
l	$+\infty$ أو $-\infty$	0
0	0	شكل غير محدد
$+\infty$ أو $-\infty$	l	$+\infty$ أو $-\infty$

تمرين تطبيقي

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^2-9} \qquad \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}$$

الجواب

لدينا $\lim_{x\to 2} x^2-4=4-4=0$ و $\lim_{x\to 2} x-2=2-2=0$ و بما أن الشكل $\frac{0}{0}$ غير محدد وجب علينا

تغيير صيغة النسبة $\frac{x^2-4}{x-2}$ أي تبسيطها ما أمكن .

لكل $x\neq 2$:

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4}{x-2}&=\frac{x^2-2^2}{x-2}\\&=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}\\&=(x+2)\end{aligned}$$

إذن $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$

3) النهاية على اليمين – النهاية على اليسا ر

أ-نشاط:

احسب $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$

- إذا كان $x\succ 1$ فإن $x-1\succ 0$ وبالتالي $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\frac{1}{x-1}=+\infty$ ($\frac{1}{0^+}\to+\infty$) هذه النهاية تسمى النهاية على يمين العدد 1
- إذا كان $x\prec 1$ فإن $x-1\prec 0$ وبالتالي $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\frac{1}{x-1}=-\infty$ ($\frac{1}{0^-}\to-\infty$) هذه النهاية تسمى النهاية على يسار العدد 1

ب-تعريف ص112 (مرشدي في الرياضيات)

ج-تمرين

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} x+\frac{1}{x};\lim_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}} x+\frac{1}{x};\lim_{\substack{x\to -2\\ x\succ -2}}\frac{3x-2}{x+2};\lim_{\substack{x\to -2\\ x\prec -2}}\frac{3x-2}{x+2}$$

الجواب :

• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+\frac{1}{x}=+\infty$ (لأن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$)

• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x+\frac{1}{x}=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$)

• $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\frac{3x-2}{x+2}=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} 3x-2=-8$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x+2=0^{+}$)

• $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\frac{3x-2}{x+2}=+\infty$ (لأن $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} 3x-2=-8$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x+2=0^{-}$)

نهاية دالة في $+\infty$ و $-\infty$

تعاريف (انظر مرشدي في الرياضيات)

مثال1

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ (انظر جدول جداء دالتين)

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

بصفة عامة $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

مثال2

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ (انظر جدول جداء دالتين)

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

بصفة عامة :

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ (n عدد صحيح طبيعي زوجي غير منعدم)

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ (n عدد صحيح طبيعي فردي غير منعدم)

نهاية دالة حدودية و دالة جذرية في $+\infty$ و $-\infty$

تعاريف (انظر مرشدي في الرياضيات ص 117)

أمثلة:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4+3x^3+1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^4$
$=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x-2x^4+x^3+5x^7=\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^7$
$=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x+1}{x^5-x^2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^5}$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}$
$=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^8+2x+1}{x^2-x^5-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^8}{-x^5}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-x^3 \quad \bullet$$
$$=-\infty$$

تمارين تطبيقية مصاحبة للدرس 6 مع حلولها

تمرين 1

أحسب النهايات التالية :

① $\lim\limits_{x\to(-1)} (4x^3 - 2x + 5)$

② $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x + 3}$

③ $\lim\limits_{x\to-\infty} (4x^3 - 5x^2 + x + 13)$

④ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x - x^3}{x + 1}$

⑤ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x + 3}{x^2 + 5}$

⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{13x^3 - x}{-x^3 + 7}$

تمرين 2

أحسب النهايات التالية :

① $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$

② $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

③ $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$

④ $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$

حل التمرين 1

لنحسب النهايات التالية :

① $\lim\limits_{x\to(-1)} (4x^3 - 2x + 5) = 4(-1)^3 - 2(-1) + 5$
$= -4 + 2 + 5 = 3$

② $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x + 3} = \dfrac{2^3 - 8}{2 + 5} = \dfrac{0}{7} = 0$

③ $\lim\limits_{x\to-\infty} (4x^3 - 5x^2 + x + 13) = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3$
$= -\infty$

④ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x - x^3}{x + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^3}{x}$
$= \lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty$

⑤ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x + 3}{x^2 + 5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2}$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{13x^3 - x}{-x^3 + 7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{13x^3}{-x^3}$
$= -13$

حل التمرين 2

لنحسب النهايات التالية :

① $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)}$
$= \dfrac{1}{1 + 1} = \dfrac{1}{2}$

② $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2}$
$= \lim\limits_{x\to-2} (x - 2) = -2 - 2$
$= -4$

③ $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x - 3)^2}{x - 3}$
$= \lim\limits_{x\to 3} (x - 3)$
$= 3 - 3$
$= 0$

④ $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(x + 1)(3x - 1)}{x + 1}$
$= \lim\limits_{x\to-1} (3x - 1)$
$= 3(-1) - 1$
$= -4$

تمرين 3

أحسب النهايات التالية :

① $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x-1}{x-1}$

② $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{8x+3}{x+1}$

③ $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x+3}{2-x}$

④ $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1-x}{3-x}$

حل التمرين 3

لنحسب النهايات التالية :

① $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x-1}{x-1}$

لدينا : $\lim\limits_{x \to 1^+} (2x-1) = 2(1) - 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0^+$

لأن جدول إشارة $(x-1)$ هو :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+

ومنه : $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x-1}{x-1} = +\infty$

② $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{8x+3}{x+1}$

لدينا : $\lim\limits_{x \to (-1)^-} 8x+3 = -8+3 = -5$

$\lim\limits_{x \to (-1)^-} (x+1 - = 0^-$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	-	0	+

ومنه : $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{8x+3}{x+1} = +\infty$

③ $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x+3}{2-x}$

لدينا : $\lim\limits_{x \to 2^+} (4x+3) = 11$

$\lim\limits_{x \to 2^+} (2-x) = 0^-$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	+	0	-

ومنه : $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x+3}{2-x} = -\infty$

④ $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1-x}{3-x}$

لدينا : $\lim\limits_{x \to 3^+} (1-x) = 1-3 = -2$

$\lim\limits_{x \to 3^+} (3-x) = 0^-$

ومنه : $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1-x}{3-x} = +\infty$

تمرين 4

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كمايلي : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+5}$

1 – حدد Df مجموعة تعريف f.

2 – أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to (-5)^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to (-5)^-} f(x)$

حل التمرين 4

1 – لنحدد Df.

$Df = \{x \in IR / x+5 \neq 0\} = IR - \{-5\}$

2 –

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

$\lim\limits_{x \to (-5)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-5)^+} \dfrac{2x-1}{x+5} = \dfrac{-11}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to (-5)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-5)^-} \dfrac{2x-1}{x+5} = \dfrac{-11}{0^-} = +\infty$