تمارين تطبيقية مصاحبة للدرس 3 مع حلولها

تمرين 1

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_n$ المعرفة بالصيغة الصريحة : $U_n = \frac{5n-3}{3}$ لكل n من IN :

1 – أحسب U_0 و U_1 و U_{10}.

2 – هل 72 حدٌّ من حدود المتتالية ؟

3 – حدد بدلالة n كل من U_{n+1} و U_{n-1} و U_{2n}.

حل التمرين 1

1 – لدينا : $U_n = \frac{5n-3}{3}$ $(\forall n \in IN)$;

ومنه :

• نعوض n بـ 0 :

$$U_0 = \frac{5.0-3}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

• نعوض n بـ 1 :

$$U_1 = \frac{5.1-3}{3} = \frac{5-3}{3} = \frac{2}{3}$$

• نعوض n بـ 10 :

$$U_{10} = \frac{5.10-3}{3} = \frac{50-3}{3} = \frac{47}{3}$$

2 – لنحل في المجموعة IN المعادلة : $U_n = 72$

أي :
$$\frac{5n-3}{3} = 72$$

ومنه :
$$5n - 3 = 72\times 3$$
$$5n - 3 = 216$$
$$5n = 216 + 3 = 219$$
$$n = \frac{219}{5} \notin IN$$

إذن 72 ليس حدا من حدود المتتالية $(U_n)_n$.

3 –
$$U_{n+1} = \frac{5(n+1)-3}{3} = \frac{5n+2}{3}$$
$$U_{n-1} = \frac{5(n-1)-3}{3} = \frac{5n-8}{3}$$
$$U_{2n} = \frac{5.2n-3}{3} = \frac{10n-3}{3}$$

تمرين 2

نعتبر المتتالية العددية $(V_n)_n$ المعرفة بالصيغة الترجعية التالية: $U_0=1$ و $U_{n+1} = 5\,U_n - 7$ لكل n من IN

1 – أحسب $U1$ و $U2$ و $U4$.

2 – حدد علاقة بين Un و $Un-1$.

حل التمرين 2

1 – حساب U_1 .

• نعوض n بـ 0 :

$$U_{0+1} = 5U_0 - 7$$
$$U_1 = 5.1 - 7 = -2$$

– حساب U_2 .

• نعوض n بـ 1 :

$$U_{1+1} = 5U_1 - 7$$
$$U_2 = 5(-2) - 7 = -17$$

– لحساب U_4 نحسب أولا U_3.

$$U_3 = 5U_2 - 7 = 5(-17) - 7$$
$$U_3 = -85 - 7 = -92$$

ومنه :

$$U_4 = 5U3 - 7$$
$$U_4 = 5(-92) - 7$$
$$U_4 = -460 - 7$$
$$U_4 = -467$$

2 – لنحدد علاقة بين Un و U_{n-1} :

لدينا : $U_{n+1} = 5U_1 - 7$

ومنه نعوض n بـ(n–1) نجد :

$$U_{n-1+1} = 5U_{n-1} - 7$$

ومنه :
$$Un = 5U_{n-1} - 7$$

تمرين 3

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_n$ المعرفة كما يلي :

$(\forall n \in IN);\ Un = 2n + 3$

1 – بين أن المتتالية $(U_n)_n$ حسابية محددا أساسها r.

2 – حدد قيمة المجموع : $S = U_0 + U_1 + ... + U_{13}$

حل التمرين 3

1 – لنبين أن $(U_n)_n$ متتالية حسابية.

لدينا : $U_n = 2n + 3$

ومنه : $U_{n+1} = 2(n+1) + 3$

$U_{n+1} = 2n + 2 + 3$

$U_{n+1} = 2n + 5$

إذن : $U_{n+1} - U_n = (2n+5) - (2n+3)$

$U_{n+1} - U_n = 2n + 5 - 2n - 3$

$U_{n+1} - U_n = 5 - 3$

$U_{n+1} - U_n = 2$

ومنه $(U_n)_n$ متتالية حسابية أساسها r=2

2 – لنحدد قيمة المجموع S :

$$S = \frac{(13-0+1)}{2}(U_0 + U_{13})$$

نعلم أن : $U_0 = 2.0 + 3 = 3$

و $U_{13} = 2.13 + 3 = 19$

ومنه : $S = \frac{14}{2}(3 + 19)$

$S = 7.22$

$S = 154$

تمرين 4

نعتبر المتتاليتين :

$(U_n)_n$ بحيث : $;(n \in IN)$ $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n + 6 \end{cases}$

و $(V_n)_n$ بحيث : $V_n = U_n + 3$

1 – أحسب U_1 و V_0 و V_1 ؟

2 – بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أساسها q.

3 – أ – أحسب Vn بدلالة n.

ب – أحسب Un بدلالة n.

حل التمرين 4

1 – • حساب U_1 :

$U_1 = 3U_0 + 6 = 3.1 + 6 = 9$

• حساب V_0 :

$V_0 = U_0 + 3 = 1 + 3 = 4$

• حساب V_1 :

$V_1 = U_1 + 3 = 9 + 3 = 12$

2 – لنبين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية .

نعلم أن : $V_n = Un + 3$

ومنه : $V_{n+1} = U_{n+1} + 3$

وبما أن : $U_{n+1} = 3U_n + 6$

فإن : $V_{n+1} = (3U_n + 6) + 3$

$V_{n+1} = 3U_n + 9$

ومنه : $V_{n+1} - 3(U_n + 3)$

إذن : $V_{n+1} = 3V_n$

وهذا يعني أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها q=3.

3 – أ – حساب Vn بدلالة n .

$(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q=3$ وحدها الأول $V_0=4$.

إذن : $(\forall n \in IN);\ V_n = V_0.q^n$

ومنه : $V_n = 4.3^n$

ب – حساب Un بدلالة n .

نعلم أن : $(\forall n \in IN);\ V_n = U_n + 3$

ومنه : $U_n = V_n - 3$

إذن : $U_n = 4.3^n - 3$

ومنه المطلوب.