تمارين تطبيقية مصاحبة للدرس 4 مع حلولها

تمرين 1

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$f(x) = -x^2 + 1$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 1 على IR.

حل التمرين 1

لنبين أن الدالة f مكبورة بالعدد 1 على IR.

لدينا : لكل x من IR :

$f(x) - 1 = (-x^2 + 1) - 1$
$f(x) - 1 = -x^2 + 1 - 1$
$f(x) - 1 = -x^2$

ونعلم أن $x^2 \geqslant 0$ لكل x من IR .

إذن : $-x^2 \leqslant 0$ لكل x من IR .

ومنه : $f(x) - 1 \leqslant 0$

ومنه المطلوب. $f(x) \leqslant 1$

تمرين 2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$f(x) = -x^2 - 2x + 3$

1 - تحقق أن مهما يكن x من IR.

$f(x) = (x-1)^2 + 2$

2 - استنتج أن الدالة f مصغورة بالعدد 2 على *IR*.

حل التمرين 2

1 - لنتحقق من المتساوية.

لكل x من *IR* لدينا :

$(x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 1 + 2$
$(x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$

إذن : $(x-1)^2 + 2 = f(x)$

إذن : $f(x) = (x-1)^2 + 2$

2 - لنبين أن f مصغورة بالعدد 2 على IR

لكل x من IR لدينا :

$f(x) - 2 = (x-1)^2 + 2 - 2$
$f(x) - 2 = (x+1)^2$

ونعلم أن : $(\forall x \in IR) ; (x-1)^2 \geqslant 0$

إذن : $f(x) - 2 \geqslant 0$

ومنه : $f(x) \geqslant 2$

تمرين 3

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$f(x) = x^2 + x$

1 - ليكن x و y من IR .

بين أن : $f(x) - f(y) = (x-y)(x+y+1)$

2 - استنتج أن f تناقصية على المجال $\left]-\infty, \frac{-1}{2}\right]$

وتزايدية على المجال $\left[\frac{-1}{2}, +\infty\right[$.

3 - اعط جدول تغيرات f.

حل التمرين 3

1 - ليكن x و y من IR .

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= (x^2 + x) - (y^2 + y) \\ &= x^2 + x - y^2 - y \\ &= x^2 - y^2 + x - y \\ &= (x-y)(x+y) + (x-y) \\ &= (x-y)(x+y+1) \end{aligned}$$

إذن : $f(x) - f(y) = (x-y)(x+y+1)$

2 – • على المجال $\left]-\infty,\frac{-1}{2}\right]$ لدينا :

$$\begin{cases} x\leq \frac{-1}{2} \\ y\leq \frac{-1}{2} \end{cases}$$ و منه : $$x+y\leq \frac{-1}{2}-\frac{1}{2}$$ $$x+y\leq -1$$

إذن : $\boxed{x+y+1\leq 0}$

ومنه : إذا كان $x\geq y$ فإن : $x-y\geq 0$

وبما أن : $x+y+1\leq 0$

فإن : $(x-y)(x+y+1)\leq 0$

وبالتالي : $f(x)\leq f(y)$

وهذا يعني أن f تناقصية على $\left]-\infty,\frac{-1}{2}\right]$.

• على المجال $\left[\frac{-1}{2},+\infty\right[$.

$$\begin{cases} x\geq \frac{-1}{2} \\ y\geq \frac{-1}{2} \end{cases}$$ و منه : $$x+y\geq \frac{-1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)$$ $$x+y\geq -1$$

إذن : $\boxed{x+y+1\geq 0}$

إذا كان $x\geq y$ فإن : $x-y\geq 0$

ومنه : $(x-y)(x+y+1)\geq 0$

إذ ن f تزايدية على $\left[\frac{-1}{2},+\infty\right[$.

3 – جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)$$
$$f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1-2}{4}=\frac{-1}{4}$$

تمرين 5

1 – تحقق من أن : لكل x من IR :

$$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$$

2 – أدرس إشارة x^3-3x+2

3 – نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كما يلي :

$$f(x)=x^2-3$$
$$g(x)=\frac{-2}{x}$$

أ – بين أن لكل x من IR^* :

$$f(x)-g(x)=\frac{x^3-3x+2}{x}$$

ب – استنتج مقارنة للدالتين f و g على IR^* :

حل التمرين 5

1 – التحقق من المتساوية :

$$(x-1)^2(x+2)=(x^2-2x+1)(x+2)$$
$$=x^3+2x^2-2x^2-4x+x+2$$
$$=x^3-3x+2$$

2 – إشارة x^3-3x+2

لدينا : $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$

وإشارة x^3-3x+2 تلخص في الجدول كما يلي :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		+	|	+	0	+	
$x+2$		-	0	+	|	+	
x^3-3x+2		-	0	+	0	+	

3 – أ – لكل x من IR^* لدينا :

$$f(x)-g(x)=x^2-3-\left(\frac{-2}{x}\right)$$
$$=x^2-3+\frac{2}{x}$$
$$=\frac{x^3-3x+2}{x}$$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
x^3-3x+2		-	0	+	0	+	0	+	
x		-	|	-	0	+	|	+	
$f(x)-g(x)$		-	0	-	||	+	0	+	

وبالتالي نستنتج المقارنة المطلوبة.