سلسلة 1	تحليلية الجداء السلمي	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر النقط : $A(2,2)$ و $B(-1,1)$ و $C(0,-1)$

1) أنشئ النقط A و B و C

2) أ) أوجد معادلة المستقيم (Δ) المار من B بحيث تكون $\overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية عليه.

ب) حدد زوج إحداثيتي H نقطة تقاطع (Δ) و (AC)

3) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ واستنتج قيمة $\cos\hat{C}$

4) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى (P)

أ) أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$ بدلالة x و y

ب) حدد تحليليا مجموعة النقط M بحيث $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=5$

ج) بين أن هذه المجموعة السابقة هي واسط القطعة $[AB]$

تمرين 2 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر النقط : $A(1,2\sqrt{3})$ و $B(0,\sqrt{3})$ و $C(1,0)$

1) أحسب : $\|\overrightarrow{AB}\|$ و $\|\overrightarrow{BC}\|$ ثم $\cos\hat{B}$ ثم قياس $\hat{B}$ ، ماهي طبيعة المثلث ABC ؟

2) حدد معادلة ديكارتية للارتفاع المنشأ من النقطة B

3) حدد معادلة ديكارتية للمتوسط المار من النقطة C

4) حدد إحداثيتي G مركز ثقل المثلث ABC

5) احسب مساحة المثلث ABC ثم مسافة A عن (BC)

تمرين 3 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر النقط : $A(-1,-5)$ و $B(5,-3)$ و $C(1,1)$

1) أ) بين أن $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ أساس للمستوى المتجهي ϑ_2

ب) لتكن $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}$ ، حدد إحداثيتي المتجهة $\vec{u}$ في الأساس $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

2) أ) أعط معادلة ديكارتية لـ (D) واسط القطعة $[BC]$

ب) تحقق أن : $A\in(D)$

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC

3) ليكن α قياس الزاوية $[B\hat{A}C]$ ، احسب $\sin\alpha$

4) ليكن H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (AC) ، حدد إحداثيتي H بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

تمرين 4 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر النقط : $A(1,-2)$ و $B(-1,3)$ و $C(-1,0)$

1) حدد تحليليا (Γ_1) مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق: $AM=BM$

2) حدد تحليليا (Γ_2) مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق: $AM^2+BM^2=CM^2+OM^2$

3) حدد تحليليا (Γ_3) مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق: $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$

4) حدد تحليليا (Γ_4) مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=CM^2$

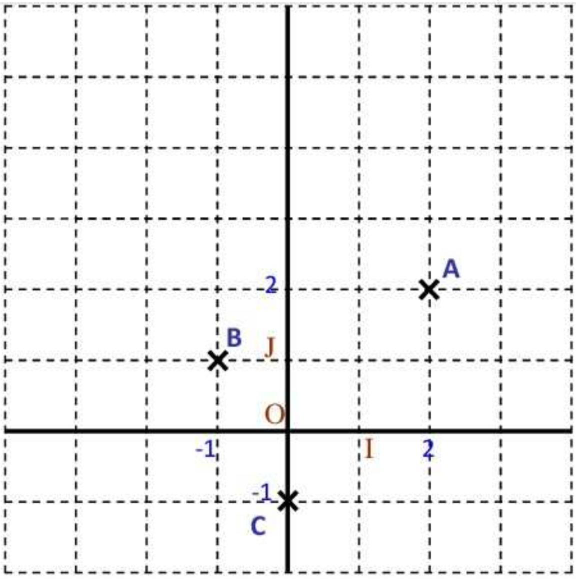
تمرين 5 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر النقطة : $A(1,-2)$ و المستقيم $(\Delta):\ 2x+y-3=0$

- حدد إحداثيتي A' مماثلة A بالنسبة للمستقيم (Δ)

سلسلة 1	تحليلية الجداء السلمي حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : $A(2,2)$ و $B(-1,1)$ و $C(0,-1)$

1



2

أ) لنحدد معادلة المستقيم (Δ) المار من B والعمودي على (AC).

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى، لدينا : $\overrightarrow{BM}(x+1\ ;\ y-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\ ;-3)$

$$M\in(\Delta)\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow -2(x+1)-3(y-1)=0\Leftrightarrow -2x-2-3y+3=0\Leftrightarrow -2x-3y+1=0$$

بالتالي : $\boxed{(\Delta):\ -2x-3y+1=0}$ أو أيضا : $\boxed{(\Delta):\ 2x+3y-1=0}$

ب) لنحدد زوج إحداثيتي H نقطة تقاطع (Δ) و (AC)، لنحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم (AC)

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى، لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-2\ ;\ y-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\ ;-3)$

$$M\in(AC)\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-2\\ -2 & -3\end{vmatrix}=0\ \Leftrightarrow -3(x-2)+2(y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow -3x+6+2y-4=0\Leftrightarrow -3x+2y+2=0$$

بالتالي : $\boxed{(AC):\ -3x+2y+2=0}$ أو أيضا : $\boxed{(AC):\ 3x-2y-2=0}$

الآن ولكي نحدد زوج إحداثيتي H نقطة تقاطع (Δ) و (AC)

علينا حل النظمة المكونة من معادلتي (Δ) و (AC)، أي : $\begin{cases}2x+3y=1\\ 3x-2y=2\end{cases}$

لدينا المحددة هي : $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-4-9=-13$ و $\Delta_x=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-2-6=-8$

و $\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4-3=1$ ، منه : $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{8}{13}$ و $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-1}{13}$ بالتالي : $\boxed{H\left(\dfrac{8}{13}\ ;\dfrac{-1}{13}\right)}$

3

لدينا : $\overrightarrow{CA}(\ 2\ \ ;\ 3\ )$ و $\overrightarrow{CB}(\ -1\ \ ;\ 2\ )$

إذن : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=-2+6=4$ و $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ و $\left\|\overrightarrow{CB}\right\|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$$\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}=\frac{4}{\sqrt{65}}=\frac{4\sqrt{65}}{65}$$

4

أ) لدينا : $\overrightarrow{AB}.(-3;-1)$ و $\overrightarrow{AM}.(x-2;y-2)$

منه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-3(x-2)-(y-2)=-3x+6-y+2=-3x-y+8$

ب) لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=5 \Leftrightarrow -3x-y+8=5 \Leftrightarrow 3x+y-3=0$

إذن مجموعة النقط M بحيث $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=5$ هي المستقيم (L) ذو المعادلة : $(L):\ 3x+y-3=0$

لدينا $\vec{u}(-1;3)$ هي متجهة موجهة لـ (L) و $\overrightarrow{AB}.(-3;-1)$ ، ومنه: $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=3-3=0$

إذن: $(L)\perp(AB)$

ج) نعتبر K منتصف $[AB]$ ، إذن : $K\left(\dfrac{2+(-1)}{2};\dfrac{2+1}{2}\right)$ أي : $K\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

بما أن : $3x_K+y_K-3=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}-3=0$ فإن : $K\in(L)$ بالتالي (L) هو واسط القطعة $[AB]$

- لإيجاد إحداثيتي نقطة تقاطع مستقيمين نحل النظمة المكونة من معادلتيهما الديكارتيتين
- مسقط نقطة على مستقيم هي نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المستقيم المار بالنقطة و العمودي على هذا المستقيم.
- لإيجاد معادلة ديكارتية لواسط قطعة نحدد أولا إحداثيتي منتصف هذه القطعة فيكون الواسط مستقيما مارا بهذه النقطة و تكون المتجهة التي طرفاها هما طرفي القطعة منظمية عليه . . .
- لكن للبرهان أن مستقيما معرف بمعادلة ديكارتية هو واسط قطعة نبين أنه متجهته الموجهة متعامدة مع متجهة (القطعة) و أن إحداثيتي منتصف القطعة يحقق معادلته.
- يستحسن جعل معامل x موجبا في معادلة مستقيم و ذلك بضرب جميع المعاملات في -1

تمرين 2 : $A\left(1,2\sqrt{3}\right)$ و $B\left(0,\sqrt{3}\right)$ و $C(1,0)$

1 لدينا : $\overrightarrow{AB}\left(-1\ ;-\sqrt{3}\right)$ و $\overrightarrow{BC}\left(1\ ;-\sqrt{3}\right)$ إذن: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{1+3}=2$ و $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{1+3}=2$

$\overrightarrow{BA}\left(1\ ;\sqrt{3}\right)$ ، $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\dfrac{1-3}{2\times2}=\dfrac{-1}{2}$

بما أن $AB=BC$ فإن ABC متساوي الساقين في النقطة B

- لو أننا حصلنا على $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{1}{2}$ لاستنتجنا أن ABC متساوي الأضلاع لأننا سنكون قد حصلنا على $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ أو $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\equiv\dfrac{-\pi}{3}[2\pi]$

2 ليكن (Δ) الارتفاع المنشأ من النقطة B للمثلث ABC

إذن (Δ) يمر من B و عمودي على (AC)

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى. لدينا : $\overrightarrow{AC}\left(0\,;-2\sqrt{3}\right)$ و $\overrightarrow{BM}\left(x\ ;\ y-\sqrt{3}\right)$

$$M\in(\Delta)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 0\times x-2\sqrt{3}\left(y-\sqrt{3}\right)=0\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\left(y-\sqrt{3}\right)=0\ \Leftrightarrow\ y-\sqrt{3}=0$$

بالتالي : $\boxed{(\Delta):\ y-\sqrt{3}=0}$

3 ليكن E منتصف $[AB]$ ، إذن المتوسط المار من النقطة C للمثلث ABC هو المستقيم (EC)

لنحدد إذن لنحدد حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (EC)، لدينا : $E\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى ، لدينا : $\overrightarrow{CM}(x-1\ ;\ y)$ و $\overrightarrow{EC}\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$M\in(EC)\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{EC}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}y=0$$

$$\Leftrightarrow-3\sqrt{3}(x-1)+y=0\Leftrightarrow\ -3\sqrt{3}\,x+y-3\sqrt{3}=0$$

	بالتالي : $\boxed{(EC):\ 3\sqrt{3}\,x-y+3\sqrt{3}=0}$	
4	لنحدد إحداثيتي G مركز ثقل المثلث ABC ، نعلم أن : $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{2}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\sqrt{3} \end{cases}$ منه: $\boxed{G\left(\dfrac{2}{3};\sqrt{3}\right)}$	
5	مساحة المثلث ABC هي: $S_{ABC}=\dfrac{\left\|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right\|}{2}$ ولدينا : $\overrightarrow{AB}\left(-1;-\sqrt{3}\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(0;-2\sqrt{3}\right)$ منه: $\boxed{S_{ABC}=\dfrac{\left\|\begin{vmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ 0 & -2\sqrt{3}\end{vmatrix}\right\|}{2}=\dfrac{\left\|2\sqrt{3}\right\|}{2}=\sqrt{3}}$	
	<u>طريقة 1</u> : لنحدد معادلة ديكارتية للمستقيم (BC)، لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى. لدينا : $\overrightarrow{CM}(x-1;\ y)$ و $\overrightarrow{BC}\left(1;-\sqrt{3}\right)$ $M\in(BC)\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{BC}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y\\ 1 & -\sqrt{3}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-\sqrt{3}(x-1)-y=0\ \Leftrightarrow-\sqrt{3}\,x-y+\sqrt{3}=0$ منه : $\boxed{(BC):\ \sqrt{3}\,x+y-\sqrt{3}=0}$ بالتالي: $d(A;(BC))=\dfrac{\left\|\sqrt{3}x_A+y_A-\sqrt{3}\right\|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}}=\dfrac{\left\|\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right\|}{2}=\sqrt{3}$	
	<u>طريقة 2</u> : لتكن H هي المسقط العمودي لـ A على (BC) فإن: $S_{ABC}=\dfrac{AH\times BC}{2}$ منه : $d(A,(BC))=AH=\dfrac{2\,S_{ABC}}{BC}=\dfrac{\left\|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right\|}{BC}$ منه : $\boxed{d(A,(BC))=\dfrac{\left\|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right\|}{BC}=\dfrac{\left\|2\sqrt{3}\right\|}{2}=\sqrt{3}}$	

<u>تمرين 3</u> : $A(-1,-5)$ و $B(5,-3)$ و $C(1,1)$

1	أ)	لدينا : $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}6 & 2\\ 2 & 6\end{vmatrix}=36-4=32\neq0$ إذن $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ أساس للمستوى المتجهي ϑ_2
	ب)	لدينا : $\overrightarrow{AB}=6\vec{i}+2\vec{j}$ و $\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+6\vec{j}$ منه : $-3\overrightarrow{AB}=-18\vec{i}-6\vec{j}$ و $-3\overrightarrow{AC}=-6\vec{i}-18\vec{j}$ منه : $\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}=-16\vec{i}$ و $\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=-16\vec{j}$ أي : $\vec{i}=\dfrac{-1}{16}\overrightarrow{AC}+\dfrac{3}{16}\overrightarrow{AB}$ و $\vec{j}=\dfrac{-1}{16}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{16}\overrightarrow{AC}$ إذن: $\vec{u}=2\left(\dfrac{-1}{16}\overrightarrow{AC}+\dfrac{3}{16}\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\dfrac{-1}{16}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{16}\overrightarrow{AC}\right)$ أي : $\vec{u}=\dfrac{3}{16}\overrightarrow{AB}+\dfrac{7}{16}\overrightarrow{AC}$ بالتالي إحداثيتي المتجهة $\vec{u}$ في الأساس $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ هي : $\left(\dfrac{3}{16},\dfrac{7}{16}\right)$
		إيجاد إحداثيتي $\vec{u}$ في الأساس $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ يعني إيجاد زوج (a,b) يحقق : $\vec{u}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ لذلك قمنا بالبحث عن تعبير كل من $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بطريقة تشبه طريقة حل نظمة
2	أ)	لتكن K منتصف $[BC]$ إذن : $K(3;-1)$ لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى.لدينا : $\overrightarrow{KM}(x-3;\ y+1)$ و $\overrightarrow{BC}(-4;4)$ $M\in(BC)\Leftrightarrow\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow-4(x-3)+4(y+1)=0\Leftrightarrow-(x-3)+y+1=0\ \Leftrightarrow-x+y+4=0$

بالتالي : $(D):\ x-y-4=0$

ب) لدينا : $x_A-y_A-4=-1+5-4=0 \Rightarrow A\in(D)$

ج) بما أن $A\in(D)$ و (D) واسط $[BC]$ فإن: $AC=AB$ بالتالي ABC مثلث متساوي الساقين في A

3

$$\sin\alpha=\sin(B\hat{A}C)=\left|\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|=\left|\frac{\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{AB\times AC}\right|=\left|\frac{32}{\sqrt{40}\times\sqrt{40}}\right|=\frac{32}{40}=\frac{4}{5}$$

يجب أن نميز بين الزاوية الهندسية والتي قياسها دائما عدد موجب و الزاوية الموجهة (الجبرية) و التي يمكن أن يكون قياسها سالبا أو موجبا.

4

أولا سنحدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من B و العمودي على (AC)

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى،لدينا : $\overrightarrow{BM}(x-5\ ;\ y+3)$ و $\overrightarrow{AC}(2;6)$

$$M\in(\Delta)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 2(x-5)+6(y+3)=0\Leftrightarrow(x-3)+3(y+3)=0\ \Leftrightarrow\ x+3y+6=0$$

الآن لدينا التمثيل البارامتري للمستقيم (AC) هو : $(AC):\begin{cases}x=1+2t\\ y=1+6t\end{cases}\ /t\in IR$

إذ إحداثيتي H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (AC) هي حل النظمة : $\begin{cases}x+3y+6=0\\ x=1+2t\\ y=1+6t\end{cases}$

منه $(1+2t)+3(1+6t)+6=0$ منه : $20t+10=0$ منه : $t=\frac{-1}{2}$ بالتالي : $\begin{cases}x_H=1-1=0\\ y_H=1-3=-2\end{cases}$ أي : $H(0;-2)$

فكرة السؤال سبق إدراجها في التمرين الأول 2 ب)، لكن هذه المرة فضلنا إدراج التمثيل البارامتري عوض معادلة ديكارتية لأنه يجعل النظمة أسهل

للتذكير التمثيل البارامتري لمستقيم مار من نقطة $A(x_A;y_A)$ و موجه بـ $\vec{u}(a;b)$ هو: $\begin{cases}x=x_A+at\\ y=y_A+bt\end{cases}\ /t\in IR$

يجب التمعن جيدا في هذه الطريقة فهي فعالة و تمكن من تحديد إحداثيتي المسقط العمودي لنقطة على مستقيم بسهولة.

تمرين 4 : $A(1,-2)$ و $B(-1,3)$ و $C(-1,0)$

1

لدينا :

$$AM=BM\ \Leftrightarrow\ AM^2=BM^2\ \Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=(x+1)^2+(y-3)^2$$

$$AM=BM\ \Leftrightarrow\ x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2+2x+1+y^2-6y+9$$

$$AM=BM\ \Leftrightarrow\ -4x+10y-5=0\Leftrightarrow 4x-10y+5=0$$

بالتالي (Γ_1) هي المستقيم ذو المعادلة : $4x-10y+5=0$

2

$$AM^2+BM^2=CM^2+OM^2\ \Leftrightarrow\ (x-1)^2+(y+2)^2+(x+1)^2+(y-3)^2=(x+1)^2+y^2+x^2+y^2$$

$$AM^2+BM^2=CM^2+OM^2\ \Leftrightarrow\ x^2-2x+1+y^2+4y+4+y^2-6y+9=2y^2+x^2$$

$$AM^2+BM^2=CM^2+OM^2\ \Leftrightarrow\ -2x-2y+14=0\ \Leftrightarrow\ x+y-7=0$$

بالتالي (Γ_2) هي المستقيم ذو المعادلة : $x+y-7=0$

3

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}\ \Leftrightarrow\ (x+1)(x+1)+(y-3)y=(1-x)(0-x)+(-2-y)(0-y)$$

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}\ \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-3y=-x+x^2+2y+y^2$$

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}\ \Leftrightarrow 3x-5y+1=0$$

بالتالي (Γ_3) هي المستقيم ذو المعادلة : $3x-5y+1=0$

4	$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=CM^2 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)+(y+2)(y-3)=(x+1)^2+y^2$ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=CM^2 \Leftrightarrow x^2-1+y^2-y-6=x^2+2x+1+y^2$ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=CM^2 \Leftrightarrow 2x+y+8=0$ بالتالي (Γ_4) هي المستقيم ذو المعادلة : $2x+y+8=0$	
	تمرين5 : $A(1,-2)$ ، (Δ): $2x+y-3=0$	
	لتكن H المسقط العمودي لـ A على المستقيم (Δ) وليكن (L) المستقيم المار من A و العمودي على (Δ) المتجهة $\vec{u}(2;1)$ المنظمية على (Δ) هي موجهة لـ (L) إذن التمثيل البارامتري لـ (L) هو : $(L):\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \end{cases} / t\in IR$ إذ إحداثيتي H هي حل النظمة : $\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x=1+2t \\ y=-2+t \end{cases}$ منه $2(1+2t)+(-2+t)-3=0$ منه : $5t-3=0$ منه : $t=\frac{3}{5}$ بالتالي : $\begin{cases} x_H=1+\frac{6}{5}=\frac{11}{5} \\ y_H=-2+\frac{3}{5}=\frac{-7}{5} \end{cases}$ أي : $H\left(\frac{11}{5};\frac{-7}{5}\right)$ الآن A' هي مماثلة A بالنسبة للنقطة H أي أن H منتصف $[AA']$ منه : $\begin{cases} x_H=\frac{x_A+x_{A'}}{2} \\ y_H=\frac{y_A+y_{A'}}{2} \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x_{A'}=2x_H-x_A=\frac{22}{5}-1=\frac{17}{5} \\ y_{A'}=2y_H-y_A=\frac{-14}{5}+2=\frac{-4}{5} \end{cases}$ بالتالي : $\boxed{A'\left(\frac{17}{5};\frac{-4}{5}\right)}$	

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	تحليلية الجداء السلمي	سلسلة 2

تمرين 1 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

نعتبر المستقيم : $(D): 6x-3y-3=0$ و الدائرة : $(C):\ x^2+y^2-6x+4y-3=0$

1) حدد مركز وشعاع الدائرة (C)

2) حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (D)

3) بين أن (C) و (D) يتقاطعان في نقطتين مختلفتين E و F

4) أوجد إحداثيتي E و F

تمرين 2 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

لتكن (ζ_m) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوى بحيث : $x^2+y^2+m\,x-m\,y-2m-2=0$

حيث m بارامتر حقيقي.

1) أدرس حسب قيم العدد m طبيعة المجموعة (ζ_m)

2) نعتبر فيما يلي أن : $m\neq -2$

3) بين أن جميع الدوائر (ζ_m) تمر من نقطة ثابتة A محددا إحداثيتيها.

4) حدد (Δ) مجموعة مراكز الدوائر (ζ_m)

5) أوجد معادلة المستقيم (L) المار من A و العمودي على (Δ)

6) تحقق أن (L) مماس لجميع الدوائر (ζ_m) في النقطة A

تمرين 3 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

نعتبر النقط : $\Omega(4,0)$ و $A(1,0)$ و $B(-1,1)$

1) أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) واسط $[AB]$

2) أكتب معادلة ديكارتية للدائرة (ζ) ذات المركز Ω والمارة من النقطة A

3) ادرس تقاطع (ζ) و (Δ)

4) تحقق أن النقطة O توجد خارج الدائرة (ζ)

5) أكتب معادلة ديكارتية لماسي الدائرة (ζ) المارين من النقطة O .

6) ناقش حسب قيم البارامتر m عدد نقط تقاطع الدائرة (ζ) و المستقيم $(D_m):\ y=mx$.

تمرين 4 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

نعتبر الدائرة (C) ذات المعادلة : $x^2+y^2-4x+6y+9=0$

1) حدد مركز و شعاع الدائرة (C)

2) ادرس تقاطع الدائرة (C) مع كل من محور الأفاصيل و محور الأراتيب

3) أكتب معادلتي المماسين للدائرة (C) بحيث المتجهة الموجهة لهما هي : $\vec{u}(-3,4)$

4) أكتب معادلتي المماسين للدائرة (C) المارين بالنقطة $A(2,1)$

تمرين 5 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

نعتبر النقط $A(2,1)$ و $B(1,-2)$ و $C(-1,2)$ و $P(3,-4)$ و المستقيم $(\Delta_1):\ x+2y+5=0$

1) بين أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في A .

2) استنتج معادلة ديكارتية للدائرة (ζ) المحيطة بالمثلث ABC

3) بين أن المستقيم (Δ_1) مماس للدائرة (ζ) ثم حدد زوج إحداثيتي نقطة التماس E

4) تحقق أن $P\in(\Delta_1)$ ثم حدد معادلة المماس الثاني (Δ_2) للدائرة (ζ) والمار من P .

تمرين 1 : $(D):\ 6x-3y-3=0$ ، $(C):\ x^2+y^2-6x+4y-3=0$

1 لدينا : $x^2+y^2-6x+4y-3=0 \Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+4y+4=3+9+4 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=16$

بالتالي (C) دائرة مركزها $\Omega(3;-2)$ و شعاعها $r=\sqrt{16}=4$

2 لدينا : $(D):\ 6x-3y-3=0$: منه $(D): 3y=6x-3$: بالتالي $(D):\ y=2x-1$

3 لدينا : $d(\Omega;(D))=\dfrac{|2x_\Omega-y_\Omega-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{\sqrt5}<4$ إذن (C) و (D) يتقاطعان في نقطتين مختلفتين

4 لنحل النظمة:

$$(S)\begin{cases}x^2+y^2-6x+4y-3=0\\ y=2x-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+(2x-1)^2-6x+4(2x-1)-3=0\\ y=2x-1\end{cases}$$

$$(S)\ \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4x^2-4x+1-6x+8x-4-3=0\\ y=2x-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x^2-2x-6=0\\ y=2x-1\end{cases}$$

$\Delta=4+120=124>0$: منه $x_1=\dfrac{2+\sqrt{120}}{10}=\dfrac{1+\sqrt{30}}{5}$ و $x_1=\dfrac{2-\sqrt{120}}{10}=\dfrac{1-\sqrt{30}}{5}$

منه :

$$(S)\ \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1+\sqrt{30}}{5}\ ou\ x=\dfrac{1-\sqrt{30}}{5}\\ y=2x-1\end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x=\dfrac{1+\sqrt{30}}{5}\\ y=\dfrac{-3+2\sqrt{30}}{5}\end{cases}\ ou\ \begin{cases}x=\dfrac{1-\sqrt{30}}{5}\\ y=\dfrac{-3-2\sqrt{30}}{5}\end{cases}\right)$$

بالتالي : $E\left(\dfrac{1+\sqrt{30}}{5};\dfrac{-3+2\sqrt{30}}{5}\right)$ و $F\left(\dfrac{1-\sqrt{30}}{5};\dfrac{-3-2\sqrt{30}}{5}\right)$

عمليا و خصوصا في الفروض نراعي أن تكون النتائج بسيطة، بمعنى أن لا تتضمن جذورا مربعة، لكننا آثرنا أن تتضمن الحلول الجذور المربع حتى يتم استيعاب الطريقة العامة لإيجاد إحداثيتي نقطتي تقاطع دائرة و مستقيم، و هي حل النظمة المكونة من معادلة الدائرة و المعادلة الديكارتية المختصرة أو التمثيل البارامتري للمستقيم.

تمرين 2 : $(\zeta_m):\ x^2+y^2+m\,x-m\,y-2m-2=0$

1 لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى، لدينا :

$$M\in(\zeta_m)\Leftrightarrow x^2+y^2+m\,x-m\,y-2m-2=0 \Leftrightarrow x^2+mx+\frac{m^2}{4}+y^2-my+\frac{m^2}{4}=2m+2+\frac{m^2}{4}+\frac{m^2}{4}$$

$$M\in(\zeta_m)\Leftrightarrow \left(x+\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{m}{2}\right)^2=\frac{m^2+4m+4}{2}=\left(\frac{m+2}{\sqrt2}\right)^2$$

إذن ، إذا كان $m=-2$ فإن (ζ_m) هي النقطة : $\Omega_m\left(\dfrac{-m}{2};\dfrac{m}{2}\right)$

و إذا كان $m\neq-2$ فإن (ζ_m) هي الدائرة ذات المركز $\Omega_m\left(\dfrac{-m}{2};\dfrac{m}{2}\right)$ و الشعاع $R_m=\left|\dfrac{m+2}{\sqrt2}\right|>0$

أحينا تكون هذه المجموعة فارغة إذا كان التعبير الموجود في الطرف الأيمن سالبا

للإجابة عن هذا السؤال سنبحث عن قيمة x و y حيث تكون العبارة :

$\forall m\in IR\quad x^2+y^2+mx-my-2m-2=0$ صحيحة حيث x و y أعداد ثابتة في هذه العبارة

العبارة السابقة تكافئ : $\forall m\in IR\quad x^2+y^2-2+m(x-y-2)=0$ مما يكافئ $\begin{cases}x^2+y^2-2=0\\ x-y-2=0\end{cases}$

لأن العبارة السابقة عبارة دالة تآلفية متغيرها m ، و الدالة التآلفية (أو بصفة عامة الحدودية) تنعدم إذا و فقط إذا كانت جميع معاملاتها منعدمة.

2

$$\begin{cases}x^2+y^2-2=0\\ x-y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2+4y+4+y^2-2=0\\ x=y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y^2+4y+2=0\\ x=y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2+2y+1=0\\ x=y+2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(y+1)^2=0\\ x=y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\ x=1\end{cases}$$

هذا يعني أن جميع الدوائر تمر من النقطة : $A(1;-1)$

يمكن إجراء عملية البحث عن النقطة في ورقة للبحث و إثبات أن إحداثيثيها تحققان معادلة الدوائر في ورقة التحرير : $x^2+y^2+mx-my-2m-2=1+1+m+m-2m-2=0$ ، و يعتبر ذلك برهانا كافيا

كما يمكن اتباع طريقة أخرى و هي حل نظمة دائرتين من هذه الدوائر مثل : (ζ_0) و (ζ_1) لإيجاد نقطة تقاطعهما (أو حتى إنشاؤهما لمعرفة نقطة التقاطع) ثم بعد ذلك إثبات أن هذه النقطة تحقق معادلة كل الدوائر كما أشرنا في الملاحظة السابقة.

3

لدينا : $\Omega_m\left(\dfrac{-m}{2};\dfrac{m}{2}\right)$ أي : $x_{\Omega_m}=\dfrac{-m}{2}$ و $y_{\Omega_m}=\dfrac{m}{2}$ منه : $y_{\Omega_m}=-x_{\Omega_m}$ إذن $\forall m\in IR\quad \Omega_m\in(\Delta)$

حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة : $(\Delta): y+x=0$

فكرة السؤال هي إيجاد علاقة مباشرة بين أفصول و أرتوب مراكز الدوائر عن طريق التخلص من البارامتر m

4

لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوى ، و نعتبر المتجهة $\vec{u}(-1;1)$ الموجهة للمستقيم (Δ) :

لدينا : $M\in(L)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0\Leftrightarrow-(x-1)+(y+1)=0\Leftrightarrow x-y-2=0$

بالتالي: $(L):\ x-y-2=0$

5

لدينا : $d(\Omega_m,(L))=\dfrac{|x_\Omega-y_\Omega-2|}{\sqrt2}=\dfrac{\left|\dfrac{-m}{2}-\dfrac{m}{2}-2\right|}{\sqrt2}=\dfrac{|-m-2|}{\sqrt2}=\dfrac{|m+2|}{\sqrt2}=R_m$

بالتالي مماس لجميع الدوائر (ζ_m) ، وبما أن $A\in(\zeta_m)$ و $A\in(L)$ فإن نقطة التماس هي النقطة A

تمرين 3 : $\Omega(4,0)$ و $A(1,0)$ و $B(-1,1)$

1

لتكن E منتصف $[AB]$ ، منه : $E\left(0,\dfrac12\right)$

لتكن $M(x;y)$ نقطة من المستوى، لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2;1)$ و $\overrightarrow{EM}\left(x;y-\dfrac12\right)$

$M\in(\Delta)\ \Leftrightarrow\ -2x+\left(y-\dfrac12\right)=0\Leftrightarrow-4x+2y-1=0$ بالتالي : $(\Delta): 4x-2y+1=0$

2

لدينا : $R=\Omega A=\sqrt{3^2+0^2}=3$ ، إذن المعادلة الديكارتية للدائرة (ζ) ذات المركز Ω والمارة من النقطة A

هي : $(\zeta):\ (x-4)^2+y^2=9$

3

لدينا : $d(\Omega,(\Delta))=\dfrac{|4x_\Omega-2y_\Omega+1|}{\sqrt{16+4}}=\dfrac{17}{\sqrt{20}}>R$ ، إذن (ζ) و (Δ) غير متقاطعين ($\dfrac{17}{\sqrt{20}}\approx3{,}8$)

4

لدينا : $O\Omega=\sqrt{16+0}=4>R$ إذن O توجد خارج الدائرة (ζ)

ليكن (L) أحد مماسي الدائرة (ζ) المارين من النقطة O.

إذا كان (L) موازيا لمحور الأراتيب فإن معادلته هي على الشكل : $x-a=0$ حيث $a\in IR$

وبما أن $O\in(L)$ فإن : $0-a=0$ منه : $a=0$ منه : $(L):\ x=0$

في هذه الحالة لدينا : $d(\Omega,(L))=R \Leftrightarrow \dfrac{|x_\Omega|}{\sqrt{1+0}}=3 \Leftrightarrow 4=3$

مما يعني أن كلا مماسي الدائرة لا يوازيان محور الأراتيب

إذن نستنتج أن (L) غير مواز لمحور الأراتيب إذن له معادلة مختصرة : $(L):\ y=ax+b$ حيث $(a,b)\in IR^2$

5 بما أن $O\in(L)$ فإن : $0=0+b$ منه : $b=0$ منه : $(L):\ y=ax$ أي : $(L):\ ax-y=0$

الآن :

$$d(\Omega,(L))=R \Leftrightarrow \frac{|ax_\Omega-y_\Omega|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=3 \Leftrightarrow |4a|=3\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow 16a^2=9(a^2+1)$$

$$d(\Omega,(L))=R \Leftrightarrow 7a^2=9 \Leftrightarrow a=\frac{3}{\sqrt7}\ ou\ a=\frac{-3}{\sqrt7}$$

بالتالي مماسا الدائرتين المارين من O هما : $(L_1):\ y=\dfrac{3}{\sqrt7}x$ و $(L_2):\ y=\dfrac{-3}{\sqrt7}x$

- هناك طرق أخرى لتحديد مماسي دائرة مارين من نقطة معلومة، لكن هذه أفضل طريقة ارتأيتها
- قد نجد حالة يكون فيها أحد المماسين موازيا لمحور الأراتيب و الآخر غير مواز له

لدينا :

$$d(\Omega,(D_m))-3=\frac{|mx_\Omega-y_\Omega|}{\sqrt{m^2+1}}-3=\frac{|4m|-3\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{16m^2-9(m^2+1)}{\left(|4m|-3\sqrt{m^2+1}\right)\sqrt{m^2+1}}$$

$$d(\Omega,(D_m))-3=\frac{7m^2-9}{\left(|4m|-3\sqrt{m^2+1}\right)\sqrt{m^2+1}}=\frac{7\left(m-\frac{3}{\sqrt7}\right)\left(m+\frac{3}{\sqrt7}\right)}{\left(|4m|-3\sqrt{m^2+1}\right)\sqrt{m^2+1}}$$

6 إذن :

- إذا كان : $m=\dfrac{3}{\sqrt7}$ أو $m=\dfrac{-3}{\sqrt7}$ فإن $d(\Omega,(D_m))=3$ أي (D_m) يقطع الدائرة (ζ) في نقطة وحيدة
- إذا كان : $m>\dfrac{3}{\sqrt7}$ أو $m<\dfrac{-3}{\sqrt7}$ فإن $d(\Omega,(D_m))>3$ أي (D_m) لا يقطع الدائرة (ζ) في أي نقطة
- إذا كان : $\dfrac{-3}{\sqrt7}<m<\dfrac{3}{\sqrt7}$ فإن $d(\Omega,(D_m))<3$ أي (D_m) يقطع الدائرة (ζ) في نقطتين مختلفتين

تمرين 4 : $(C):\ x^2+y^2-4x+6y+9=0$

1 لدينا : $x^2+y^2-4x+6y+9=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+6y+9=4 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=4$

بالتالي (C) دائرة مركزها $\Omega(2;-3)$ و شعاعها $R=2$

2 لدينا : $(Ox):\ y=0$ و $(Oy):\ x=0$، وبما أن : $d(\Omega;(Ox))=\dfrac{|y_\Omega|}{1}=3>R$ و $d(\Omega;(Oy))=\dfrac{|x_\Omega|}{1}=2=R$

فإن (Oy) مماس للدائرة (C) إذن فهو يقطعها في نقطة وحيدة، بينما (Ox) لا يتقاطع معها في أي نقطة.

ليكن (Δ) أحد مماسي الدائرة الموجه بالمتجهة $\vec{u}(-3,4)$، إذن له معادلة ديكارتية على شكل :

$4x+3y+c=0$ حيث $c\in IR$

3 إذن :

$$d(\Omega;(\Delta))=R \Leftrightarrow \frac{|4x_\Omega+3y_\Omega+c|}{\sqrt{16+9}}=2 \Leftrightarrow |-1+c|=10 \Leftrightarrow (-1+c=10)\ ou\ (-1+c=-10)$$

$$d(\Omega;(\Delta))=R \Leftrightarrow (c=11)\ ou\ (c=-9)$$

بالتالي : $(\Delta_1):4x+3y+11=0$ و $(\Delta_2):4x+3y-9=0$ هما مماسا الدائرة (C) بحيث المتجهة الموجهة

لهما هي : $\vec{u}(-3,4)$

4

ليكن (L) أحد مماسي الدائرة (C) المارين من النقطة $A(2,1)$.

إذا كان (L) موازيا لمحور الأراتيب فإن معادلته هي على الشكل : $x-a=0$ حيث $a\in IR$

وبما أن $A\in(L)$ فإن : $2-a=0$ منه : $a=2$ منه : $(L):\ x-2=0$

في هذه الحالة لدينا : $d(\Omega,(L))=R \Leftrightarrow \frac{|x_\Omega-2|}{1}=2 \Leftrightarrow 0=2$

مما يعني أن كلا مماسي الدائرة لا يوازيان محور الأراتيب

إذن نستنتج أن (L) غير مواز لمحور الأراتيب إذن له معادلة مختصرة : $(L):y=ax+b$ حيث $(a,b)\in IR^2$

بما أن $A\in(L)$ فإن : $1=2a+b$ منه : $b=1-2a$

منه : $(L):\ y=ax+(1-2a)$ أي : $(L):\ ax-y+1-2a=0$

الآن : $d(\Omega,(L))=R \Leftrightarrow \frac{|ax_\Omega-y_\Omega+1-2a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=2 \Leftrightarrow |2a+3+1-2a|=2\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow 16=4(a^2+1)$

$d(\Omega,(L))=R \Leftrightarrow 4a^2=12 \Leftrightarrow a=\sqrt{3}\ ou\ a=-\sqrt{3}$

بالتالي مماسا الدائرتين المارين من A هما : $(L_1):\ y=\sqrt{3}x+1-2\sqrt{3}$ و $(L_2):\ y=-\sqrt{3}x+1+2\sqrt{3}$

تمرين5 : $A(2,1)$ و $B(1,-2)$ ، $C(-1,2)$ ، $P(3,-4)$ ، $(\Delta_1):\ x+2y+5=0$

1

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1,-3)$ و $\overrightarrow{AC}(-3,1)$ ، منه :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3-3=0$ و $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$ و $AC=\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

بالتالي المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في A .

2

بما أن ABC قائم الزاوية في A فهو محاط بدائرة قطرها هو وتره، أي مركزها منتصف $[BC]$ و شعاعها $r=\frac{BC}{2}$

لتكن K منتصف $[BC]$ ، إذن: $K\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$ أي : $K(0\ ;\ 0)$

ولدينا : $BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(-2)^2+(2+2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

منه : $r=\sqrt{5}$ ، بالتالي : معادلة الدائرة (ζ) المحيطة بالمثلث ABC هي : $(\zeta):(x-x_K)^2+(y-y_K)^2=r^2$

أي : $(\zeta):x^2+y^2=5$

3

لدينا : $d(K;(\Delta_1))=\frac{|5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=r$ إذن المستقيم $(\Delta_1):x+2y+5=0$ مماس للدائرة (ζ)

4

لدينا : $x_P+2y_P+5=3-8+5=0$ ، إذن $P\in(\Delta_2)$

إذا كان (Δ_2) موازيا لمحور الأراتيب فإن معادلته هي على الشكل : $x-a=0$ حيث $a\in IR$

وبما أن $P\in(\Delta_2)$ فإن : $3-a=0$ منه : $a=3$ منه : $(\Delta_2):\ x-3=0$

في هذه الحالة لدينا : $d(\Omega,(\Delta_2))=R \Leftrightarrow \frac{|x_\Omega-3|}{1}=\sqrt{5} \Leftrightarrow 3=\sqrt{5}$

إذن نستنتج أن (Δ_2) غير مواز لمحور الأراتيب إذن له معادلة مختصرة : $(\Delta_2):y=ax+b$ حيث $(a,b)\in IR^2$

بما أن $P\in(\Delta_2)$ فإن : $-4=3a+b$ منه : $b=-3a-4$

منه : $(\Delta_2): \quad y = ax + (-3a-4)$ أي : $(\Delta_2): \quad ax - y - 3a - 4 = 0$

الآن :

$$d(\Omega,(\Delta_2)) = R \Leftrightarrow \frac{|ax_\Omega - y_\Omega - 3a - 4|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |-3a-4| = \sqrt{5}\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow 9a^2 + 24a + 16 = 5a^2 + 5$$

$$d(\Omega,(\Delta_2)) = R \Leftrightarrow 4a^2 + 24a + 11 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{2} \ ou \ a = -6$$

(لأن: $\Delta = 24^2 - 4\times4\times11 = 400$ ، $a_1 = \frac{-24+20}{8} = \frac{-1}{2}$ و $a_2 = \frac{-24-20}{8} = -6$)

بالتالي نجد أن: $(\Delta_2): \quad y = -6x + 14$ (القيمة $\frac{-1}{2}$ تعطينا معادلة المماس الأول).

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	تحليلية الجداء السلمي	سلسلة 3

تمرين 1 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر (C) مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق : $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ و المستقيم : $(\Delta): x+y=0$

1) أ- بين أن (C) دائرة محددا مركزها و شعاعها.

ب- أدرس الوضع النسبي للمسقيم (Δ) و الدائرة (C)

2) حل مبيانيا النظمة : $\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y+1<0 \\ x+y>0 \end{cases}$

تمرين 2 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر الدائرة (C) ذات المركز $\Omega(-3,1)$ وتمر من النقطة $A(-3,3)$ ، ونعتبر المستقيم $(D): y=x$

1) أكتب معادلة ديكارتية لـ (C)

2) أدرس تقاطع (C) و (D)

3) حدد معادلة ديكارتية لـ (Δ) العمودي على (D) و المار من Ω

4) حل مبيانيا النظمة : $\begin{cases} x^2+y^2+6x-2y+6\leq 0 \\ y-x>0 \\ x+y+2>0 \end{cases}$

تمرين 3 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$

حل مبيانيا المتراجحة : $6x-4y+3<x^2+y^2<2x+10y+10$

تمرين 4 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

حل مبيانيا المتراجحة : $(x^2+y^2+4y-12)(x^2+y^2-8x+7)<0$

تمرين 1 : $(\Delta): x+y=0$ ، $(C): \quad x^2+y^2-2x+4y+1=0$:

1

أ) لدينا : $x^2+y^2-2x+4y+1=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=4$

إذن (C) دائرة مركزها $\Omega(1,-2)$ و شعاعها $r=\sqrt{4}=2$

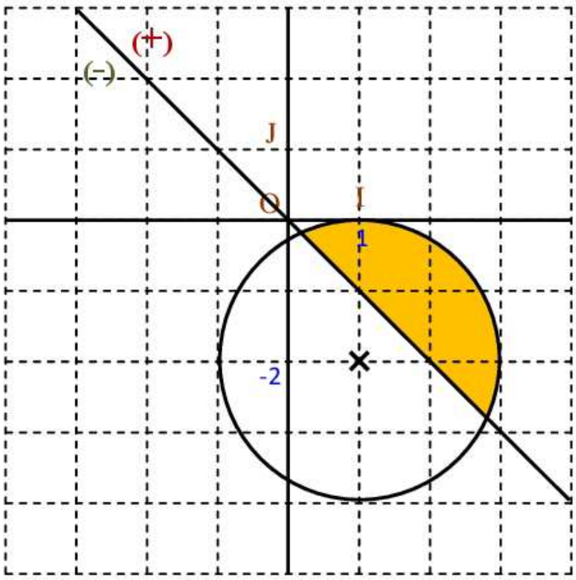
ب) لدينا : $d(\Omega,(\Delta))=\dfrac{|x_\Omega+y_\Omega|}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<2$ إذن (Δ) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين.

2

الحل المبياني للنظمة يعني البحث عن مجموعة النقط التي توجد داخل الدائرة (C) و في نفس الوقت توجد في نصف المستوى الموجب الذي يحدده المستقيم (Δ)

للتذكير لمعرفة هذا النصف مستوى نختار نقطة من أحد نصفي المستوى الذي يحددهما (Δ)، مثلا $J(0,1)$ نعوض إحداثيتيها في معادلة (Δ) فنجد: $0+1=1>0$ إذن J توجد في نصف المستوى الموجب.

إذن حلول النظمة $\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y+1<0 \\ x+y>0 \end{cases}$ مبيانيا هي مجموعة النقط الملونة باللون الأصفر أسفله.



تمرين 2 : $(D): x-y=0$ ، $A(-3,3)$ ، $\Omega(-3,1)$:

1 أكتب معادلة ديكارتية لـ $M(x,y)\in(C) \Leftrightarrow \Omega M^2=A\Omega^2 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=4$

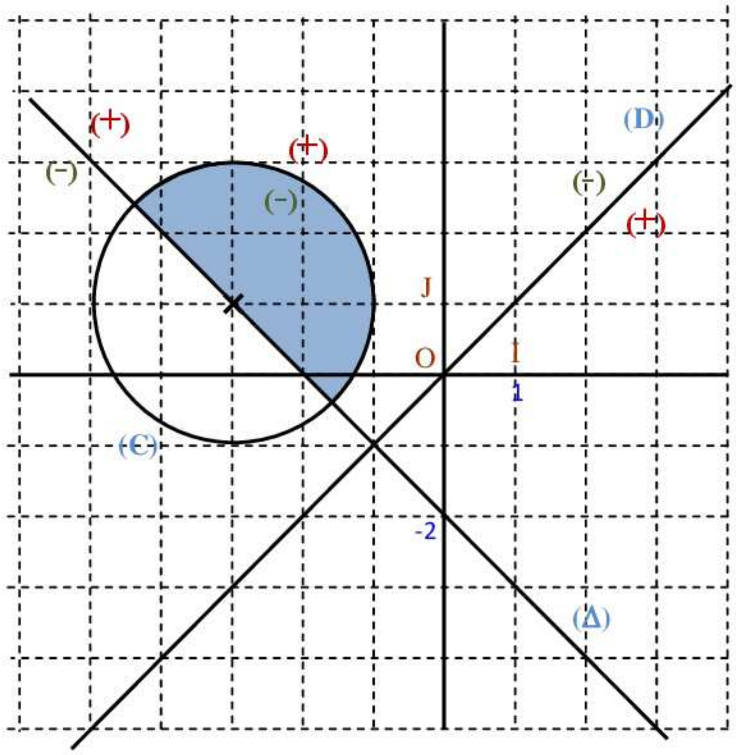
بالتالي: $(C): \quad x^2+y^2+6x-2y+6=0$

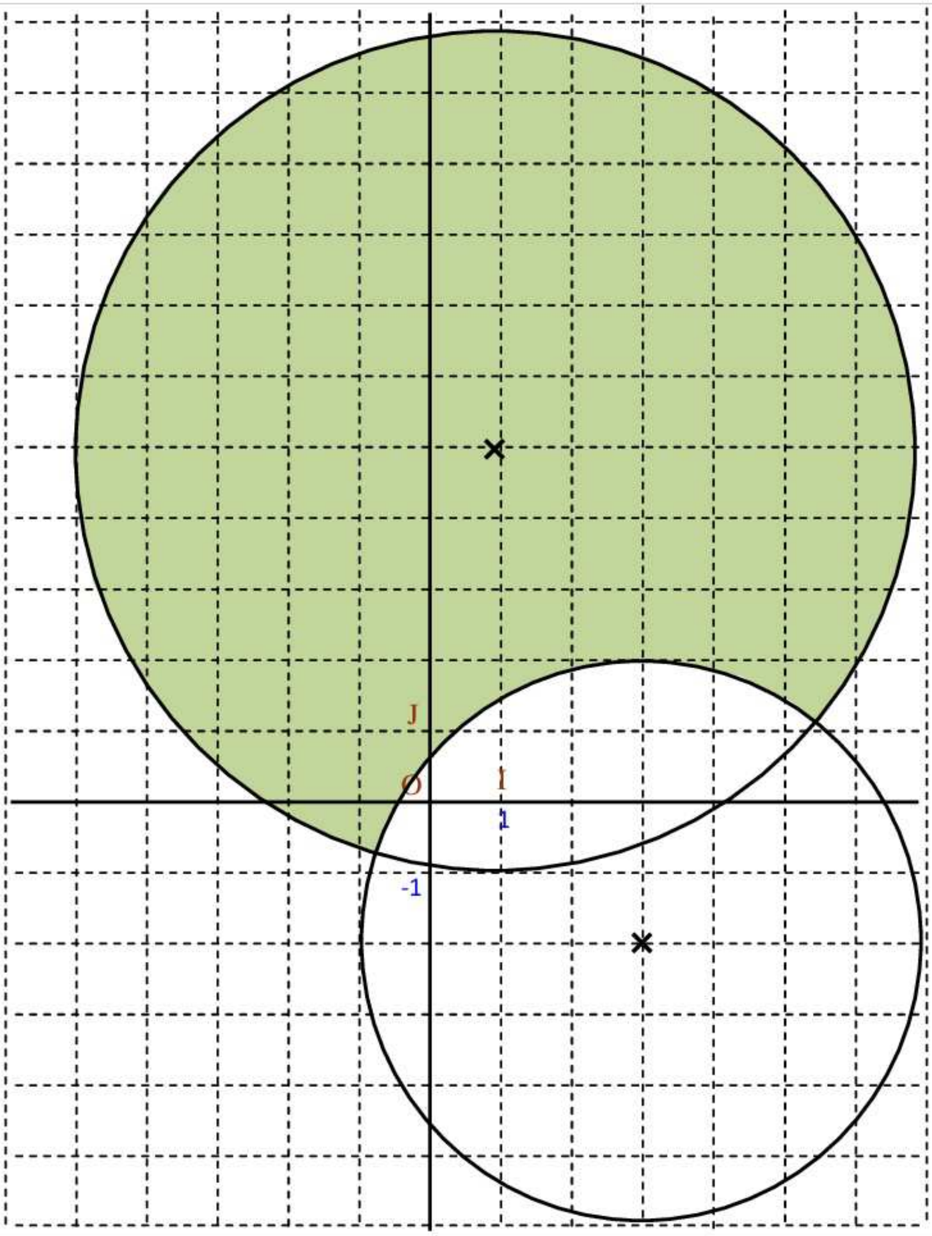
2 لدينا : $d(\Omega,(D))=\dfrac{|x_\Omega-y_\Omega|}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}>2$ إذن (D) و (C) غير متقاطعين

3 لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى، ونعتبر المتجهة $\vec{u}(1,1)$ الموجهة لـ (D)

لدينا : $M\in(\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow (x+3)+(y-1)=0 \Leftrightarrow x+y+2=0$

بالتالي: $(\Delta): \quad x+y+2=0$

الحل المبياني للنظمة يعني البحث عن مجموعة النقط التي توجد داخل الدائرة (C) و في نفس الوقت توجد في نصف المستوى السالب الذي يحدده المستقيم (D) (لأن : $x-y<0 \Leftrightarrow y-x>0$) و في نفس الوقت توجد في نصف المستوى الموجب الذي يحدده المستقيم (Δ)  قبل البدء في تجويه المستوى بمستقيم يجب كتابة المتراجحة على الشكل $ax+by+c<0$ أو $ax+by+c>0$ داخل الدائرة يمثل دائما مجموعة النقط حيث تكون : $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2-r^2<0$ لتجويه المستوى بمستقيم نختار نقطة P خارج المستقيم (غالبا نختار O أو I أو J) فإن كان مثلا $ax_P+by_P+c<0$ فهذا يعني أن كل نقط نصف المستوى المحدد بالمستقيم و الذي يحتوي على P تحقق نفس المتفاوتة (في الشكل نضع رمز (-) الحل المبياني يتطلب تحديد و تلوين المكان الذي تتحقق فيه كل شروط النظمة (داخل الدائرة+....)	4	
تمرين 3 : $(E):\ 6x-4y+3<x^2+y^2<2x+10y+10$		
لدينا : $(E)\Leftrightarrow\begin{cases}6x-4y+3<x^2+y^2\\x^2+y^2<2x+10y+10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-6x+4y-3>0\\x^2+y^2-2x-10y-10<0\end{cases}$ $(E)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-6x+9+y^2+4y+4-3-9-4>0\\x^2-2x+1+y^2-10y+25-10-1-25<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2-16>0\\(x-1)^2+(y-5)^2-36<0\end{cases}$ نعتبر الدائرتين : $(C_1):(x-3)^2+(y+2)^2=16$ و $(C_2):(x-1)^2+(y-5)^2=36$ الدائرة (C_1) مركزها $A(3;-2)$ و شعاعها $r_1=4$ و الدائرة (C_2) مركزها $B(1;5)$ و شعاعها $r_2=6$ إذن حل النظمة هي النقط الموجودة خارج الدائرة (C_1) و داخل الدائرة (C_2)		



تمرين 4 : حل مبيانيا المتراجحة : $\left(x^2+y^2+4y-12\right)\left(x^2+y^2-8x+7\right)<0$

$$(E) \Leftrightarrow \left(x^2+y^2+4y-12\right)\left(x^2+y^2-8x+7\right)<0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2+(y+2)^2-16\right)\left((x-4)^2+y^2-9\right)<0$$

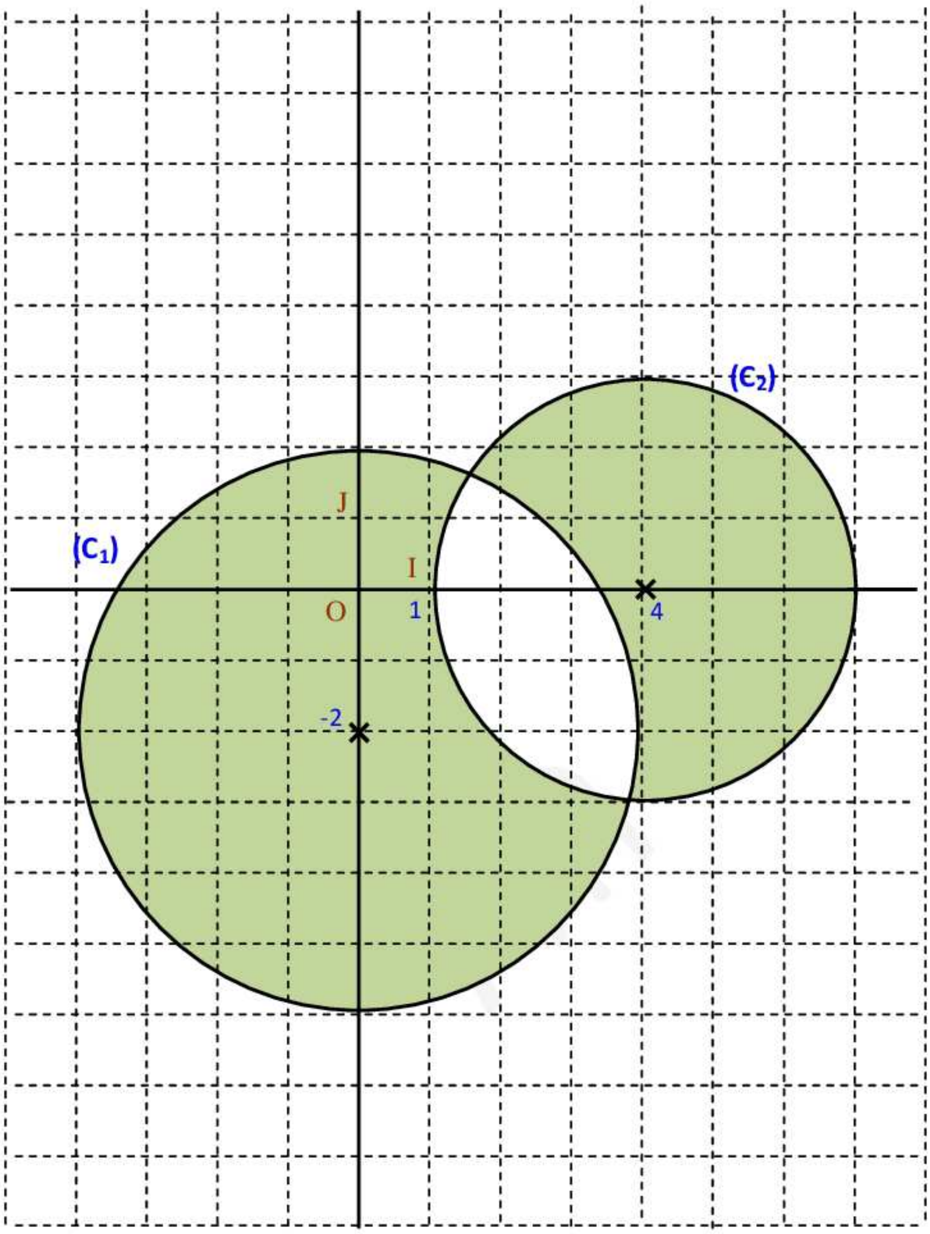
لدينا :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y+2)^2-16>0 \\ (x-4)^2+y^2-9<0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2+(y+2)^2-16<0 \\ (x-4)^2+y^2-9>0 \end{cases}$$

نعتبر الدائرتين : $(C_1): x^2+(y+2)^2=16$ و $(C_2): (x-4)^2+y^2=9$

الدائرة (C_1) مركزها $A(0;-2)$ و شعاعها $r_1=4$ و الدائرة (C_2) مركزها $B(4;0)$ و شعاعها $r_2=3$

إذن حل النظمة هي مجموعة النقط الموجودة خارج الدائرة (C_1) و داخل الدائرة (C_2) اتحاد مجموعة النقط الموجودة داخل الدائرة (C_1) و خارج الدائرة (C_2)


(C₁)
(C₂)
J
I
O
1
4
-2