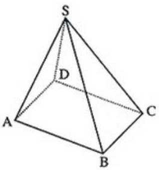
☑ تمارين محلولة: تحليلية الفضاء

1 التمرين 1



ليكن SABCD هرما قاعدته متوازي الأضلاع ABCD.

نتسب الفضاء إلى المعلم $R = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}\right)$.

1) حدّد إحداثيات النقط B و C و D و S بالنسبة للمعلم R.

2) حدّد إحداثيات المتجهات $\overrightarrow{BS}$ و $\overrightarrow{SC}$ و $\overrightarrow{SD}$ بالنسبة للأساس $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}\right)$.

✓ الحل ▴

ليكن SABCD هرماً قاعدته متوازي الأضلاع ABCD.

نتسب الفضاء للمعلم $(R) = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}\right)$.

1) أحدّد إحداثيات النقط B و C و D و S بالنسبة للمعلم (R).

لدينا: $\overrightarrow{AS} = 0.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AD} + 1.\overrightarrow{AS}$

و $\overrightarrow{AD} = 0.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AS}$

و $\overrightarrow{AC} = 1.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AS}$

(لأن ABCD متوازي أضلاع)

و $\overrightarrow{AB} = 1.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AS}$

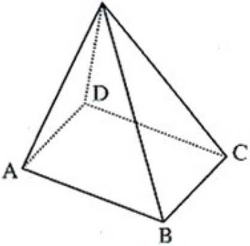
إذن $S\,(0, 0, 1)$

و $D\,(0, 1, 0)$

و $C\,(1, 1, 0)$

و $B\,(1, 0, 0)$

بالنسبة للمعلم (R).



2) أحدّد إحداثيات المتجهات $\overrightarrow{BS}$ و $\overrightarrow{SC}$ و $\overrightarrow{SD}$ بالنسبة للأساس $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS})$.

* لدينا: $S(0,0,1)$ و $B(1,0,0)$

إذن $\overrightarrow{BS}(0-1, 0-0, 1-0)$ أي $\overrightarrow{BS}(-1, 0, 1)$

* لدينا: $S(0,0,1)$ و $C(1,1,0)$

إذن $\overrightarrow{SC}(1-0, 1-0, 0-1)$ أي $\overrightarrow{SC}(1, 1, -1)$

* لدينا: $S(0,0,1)$ و $D(0,1,0)$

إذن $\overrightarrow{SD}(0-0, 1-0, 0-1)$ أي $\overrightarrow{SD}(0, 1, -1)$

2 التمرين 2

الفضاء منسوب إلى أساس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) ادرس استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الحالتين

أ- $\vec{v}(1, 2, -4)$ و $\vec{u}(2, -1, 3)$

ب- $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -2\right)$ و $\vec{u}(2, 4, -6)$

2) ادرس استوائية المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ في الحالتين:

أ- $\vec{u}(1, -1, 2)$ و $\vec{v}\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ و $\vec{w}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1\right)$

ب- $\vec{u}(5, 2, 3)$ و $\vec{v}(1, 1, 1)$ و $\vec{w}(0, 1, 2)$

✓ الحل ▴

الفضاء منسوب إلى أساس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) دراسة استقامية $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الحالتين:

أ- $\vec{u}(2, -1, 3)$ و $\vec{v}(1, 2, -4)$

* لدينا: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2 - (-1).1$

$$= 5 \neq 0$$

إذن المتجهتان $\underline{u}$ و v غير مستقيميتان.

ب- $\vec{u}\,(2, 4, -6)$ و $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -2\right)$

* لدينا:

$$\begin{vmatrix} 4 & \frac{4}{3} \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0$$

و

$$\begin{vmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = -4 + \frac{12}{3} = 0$$

و

$$\begin{vmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ 4 & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 0$$

و

إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان مستقيميتان.

2) أدرس استوائية المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ في الحالتين:

أ- $\vec{u}(1, -1, 2)$ و $\vec{v}\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ و $\vec{w}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1\right)$

لدينا:

$$\det\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \sqrt{2} \\ -1 & \frac{2}{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & -\frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\sqrt{2} \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \sqrt{2} \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$= 0$$

لا أنسى:
$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية يعني
$\det\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = 0$

إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات مستوائية.

ب- $\vec{u}(5, 2, 3)$ و $\vec{v}(1, 1, 1)$ و $\vec{w}(0, 1, 2)$

لدينا:

$$\det\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5\,(2 - 1) - 2\,(2 - 0) + 3\,(1 - 0)$$

$$= 5 - 4 + 3 = 4 \neq 0$$

إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات غير مستوائية.

3 التمرين 3

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

1) ادرس استقامية النقط A و B و C في الحالتين:

أ- $A(1, -2, 1)$ و $B(3, -3, 4)$ و $C(2, 2, -3)$

ب- $A(0, 2, 3)$ و $B(2, 6, -3)$ و $C\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, 1\right)$

2) ادرس استوائية النقط A و B و C و D في الحالتين:

أ- $A(0,1,0)$ و $B(1,0,2)$ و $C\left(-\frac{2}{3},\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right)$ و $D\left(\sqrt{2},1-\sqrt{2},1\right)$

ب- $A(1,0,0)$ و $B(6,2,3)$ و $C(2,1,1)$ و $D(1,1,2)$.

✓ الحل ▴

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1) أدرس استقامية النقط A و B و C في الحالتين:

أ- $A(1,-2,1)$ و $B(3,-3,4)$ و $C(2,2,-3)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(2,-1,3)$ و $\overrightarrow{AC}(1,4,-4)$

وبما أن $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-1-8=-9\neq 0$ فإن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين غير مستقيميتين، ومنه A و B و C نقط غير مستقيمية.

ب- $A(0,2,3)$ و $B(2,6,-3)$ و $C\left(\frac{2}{3},\frac{10}{3},1\right)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(2,4,-6)$ و $\overrightarrow{AC}\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},-2\right)$

وبما أن:

$$\begin{vmatrix}2 & \frac{2}{3}\\ 4 & \frac{4}{3}\end{vmatrix}=\frac{8}{3}-\frac{8}{3}=0$$

و

$$\begin{vmatrix}2 & \frac{2}{3}\\ -6 & -2\end{vmatrix}=-4+4=0$$

و $\begin{vmatrix} 4 & \frac{4}{3} \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0$

إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتان.

ومنه النقط A و B و C مستقيمية.

2) أدرس استوائية النقط A و B و C و D في الحالتين:

أ- $A(0, 1, 0)$ و $B(1, 0, 2)$ و $C\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

و $D\left(\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, 1\right)$

لدينا $\overrightarrow{AB}\,(1, -1, 2)$ و $\overrightarrow{AC}\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

و $\overrightarrow{AD}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1\right)$

وبما أن:

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \sqrt{2} \\ -1 & \frac{2}{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & -\frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\sqrt{2} \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \sqrt{2} \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) + 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} + 0$$

$= 0$

إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ متجهات مستوائية،

ومنه: A و B و C و D نقط مستوائية.

ب- $A\,(1, 0, 0)$ و $B\,(6, 2, 3)$ و $C\,(2, 1, 1)$

و $D\,(1, 1, 2)$

لدينا $\overrightarrow{AB}\,(5, 2, 3)$ و $\overrightarrow{AC}\,(1, 1, 1)$ و $\overrightarrow{AD}\,(0, 1, 2)$

وبما أن:
$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 5\,(2 - 1) - 2\,(2 - 0) + 3\,(1 - 0)$$
$$= 5 - 4 + 3 = 4 \neq 0$$

إذن A و B و C و D نقط غير مستوائية.

4

التمرين 4

ليكن (D) المستقيم المار من $A\,(1, 2, 3)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}\,(2, - 1, - 3)$.

1) حدّد تمثيلاً بارامترياً للمستقيم (D).

2) حدّد معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D) بطريقتين مختلفتين.

3) هل النقطة $B\,(1, 1, 1)$ تنتمي إلى (D)؟

✓ الحل ▴

---

1) أحدد تمثيلاً بارامترياً للمستقيم (D).

لدينا (D) يمر من $A\,(1, 2, 3)$ وموجه بـ $\vec{u}\,(2, - 1, - 3)$

إذن: $$(D) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

2) أحدد معادلتين ديكارتيتين لِـ (D).

طريقة (1) :

لدينا (D) يمر من $A(1, 2, 3)$ وموجه بالمتجهة $\vec{u}(2, -1, -3)$،

إذن: $$(D) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-3}$$

طريقة (2) :

من خلال التمثيل البارامتري لِـ (D) نستنتج أن:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = t \\ \frac{y-2}{-1} = t \\ \frac{z-3}{-3} = t \end{cases}$$

إذن $$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-3}$$

ومنه : $$(D) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-3}$$

3) هل $B \in (D)$ ؟

نعوض إحداثيات B في المعادلتين الديكارتيتين لِـ (D)

نجد: $$\frac{1-1}{2} = \frac{1-2}{-1} = \frac{1-3}{-3}$$

أي $0 = 1 = \frac{2}{3}$

وهذا غير ممكن .

إذن: $B \notin (D)$

لا أنسى:

ليكن (D) مستقيم يمر من $A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

وموجه بـ $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$

- تمثيل بارامتري لـ (D) هو $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=a+\alpha t\\ y=b+\beta t\\ z=c+\gamma t\end{cases}$
- معادلتين ديكارتيتين لـ (D)

$$\frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma}$$

إذا كان $\alpha\neq0$ و $\beta\neq0$ و $\gamma\neq0$

5 التمرين 5

1) حدد (D) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق:

أ- $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=2+t\\ y=1\\ z=-3t\end{cases}$ ب- $\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3}$ و $x-1=0$ ج- $\frac{2x+4}{3}=y-2=z+\frac{1}{2}$

2) حدّد تمثيلاً بارامترياً للمجموعة (D) في الحالتين ب - و ج -.

✓ الحل ▴

---

1) أحدد المجموعة (D) في الحالات التالية:

أ- $(t\in\mathbb{R})$ $(D) : \begin{cases}x=2+t\\ y=1\\ z=-3t\end{cases}$

إذن: $(t\in\mathbb{R})$ $(D) : \begin{cases}x=2+t\\ y=1+0t\\ z=0-3t\end{cases}$

وهذه النظمة هي تمثيل بارامتري للمستقيم المار من $A(2,1,0)$ وموجه بالمتجهة $\vec{u}(1,0,-3)$.

إذن: $(D)=D\left(A,\vec{u}\right)$

ب- $\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3}$ و $x-1=0$ $(D):$

هذه النظمة هي نظمة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم المار من $A(1,-1,1)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(0,2,3)$.

إذن: $(D)=D\left(A,\vec{u}\right)$

لا أنسى: إذا كانت إحدى إحداثيات المتجهة الموجهة لمستقيم منعدمة فإن البسط المرتبط بها في المعادلتين الديكارتيتين منعدم كذلك.

ج- $\frac{2x+4}{3}=y-2=z+\frac{1}{2}$ $(D):$

لدينا $\frac{2x+4}{3}=y-2=z+\frac{1}{2}$

يعني $\frac{2(x+2)}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+\frac{1}{2}}{1}$

يعني $\frac{x+2}{\frac{3}{2}}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+\frac{1}{2}}{1}$

وبنفس الطريقة نجد:

$$(D)=D\left(A\left(-2,2,-\frac{1}{2}\right);\vec{u}\left(\frac{3}{2},1,1\right)\right)$$

2) أحدد تمثيلاً بارامتريا للمجموعة (D) :

* في حالة ب :

لدينا: $(D) = D\left(A, \vec{u}\right)$ حيث $A(1,-1,1)$ و $\vec{u}(0,2,3)$

إذن:
$$(D) : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

* في حالة ج :

لدينا: $(D) = D\left(A, \vec{u}\right)$ حيث $A\left(-2, 2, -\frac{1}{2}\right)$

و $\vec{u}\left(\frac{3}{2}, 1, 1\right)$

إذن
$$(D) : \begin{cases} x = -2 + \frac{3}{2}t \\ y = 2 + t \\ z = -\frac{1}{2} + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

6 التمرين 6

ليكن (P) المستوى المار من $A(1,1,1)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(2,1,-1)$ و $\vec{v}(1,2,1)$.

1) حدّد تمثيلاً بارامترياً للمستوى (P).

2) حدّد معادلة ديكارتية للمستوى (P) بطريقتين مختلفتين.

3) هل النقطة $B(3,2,3) \in (P)$؟

✓ الحل ▴

نعتبر المستوى $(P) = P\left(A, \vec{u}, \vec{v}\right)$

1) أحدّد تمثيلاً بارامترياً للمستوى (P).

لدينا (P) يمر من $A(1,1,1)$ وموجه بالمتجهتين $\vec{u}(2,1,-1)$

و $v(1, 2, 1)$

ومنه $(P) : \begin{cases} x = 1 + 2t + t' \\ y = 1 + t + 2t' \\ z = 1 - t + t' \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$

لا أنسى:

إذا كان (P) يمر من $A(a, b, c)$

وموجه بـ $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ و $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$

فإن: $(P) : \begin{cases} x = a + \alpha t + \alpha' t' \\ y = b + \beta t + \beta' t' \\ z = c + \gamma t + \gamma' t' \end{cases} \quad (t, t) \in \mathbb{R}^2$

2) أحدّد معادلة ديكارتية للمستوى (P).

طريقة (1): لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (P) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 1 & 2 & 1 \\ y - 1 & 1 & 2 \\ z - 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y - 1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (z - 1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 1) - 3(y - 1) + 3(z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3y + 3z - 3 = 0$$

إذن: $(P) : x - y + z - 1 = 0$

لا أنسى:

$M \in P\left(A, \vec{u}, \vec{v}\right)$

يعني $\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0$

أي $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهات مستوائية.

طريقة (2): (انطلاقا من التمثيل البارامتري).

نعلم أن
$$(P) : \begin{cases} x = 1 + 2t + t' \\ y = 1 + t + 2t' \quad (t, t') \in IR^2 \\ z = 1 - t + t' \end{cases}$$

نعتبر النظمة
$$\begin{cases} x = 1 + 2t + t' \\ y = 1 + t + 2t' \end{cases}$$

يعني
$$\begin{cases} 2t + t' = x - 1 \\ t + 2t' = y - 1 \end{cases}$$

إذن باستعمال طريقة التأليفة الخطية نحصل على:

$$\begin{cases} 3t = 2x - y \\ 3t' = 2y - x \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} t = \frac{2x - y}{3} \\ t' = \frac{2y - x}{3} \end{cases}$$

نعوض t و t' بقيمتهما في المعادلة $z = 1 - t + t'$.

نحصل : $z = 1 - \frac{2x - y}{3} + \frac{2y - x}{3}$

يعني $3z = 3 - 2x + y + 2y - x$

يعني $3z = 3 - 3x + 3y$

يعني $3x - 3y + 3z - 3 = 0$

يعني $x - y + z - 1 = 0$

إذن: $(P) : x - y + z - 1 = 0$

3) هل النقطة $B(3, 2, 3)$ تنتمي إلى (P).

لدينا $(P) : x - y + z - 1 = 0$ و $B(3, 2, 3)$

وبما أن $3 - 2 + 3 - 1 = 3 \neq 0$ فإن $B \notin (P)$

7 التمرين 7

حدّد (P) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق:

أ- $\begin{cases} x = 2t + t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad ((t, t') \in \mathbb{R}^2)$ ب- $2x + y + 5 = 0$ ج- $x - y + 3z + 1 = 0$

✓ الحل ▴

أحدّد المجموعة (P) في الحالات التالية:

أ- $$(P) : \begin{cases} x = 2t + t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

هذه النظمة هي تمثيل بارامتري للمستوى المار من $A(0, 1, 2)$ والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(2, -1, 3)$ و $\vec{v}(1, 1, 0)$

إذن: $(P) = P\left(A, \vec{u}, \vec{v}\right)$

ب- $(P) : 2x + y + 5 = 0$

لدينا $2x + y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = -5 - 2x - 0.z$

نضع $x = t$ و $z = t'$

إذن $y = -5 - 2t - 0.t'$

ومنه $$(P) : \begin{cases} x = t \\ y = -5 - 2t \\ z = t' \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

إذن (P) هوالمستوى المار من $A(0, -5, 0)$ و موجه بالمتجهتين $\vec{u}(1, -2, 0)$ و $\vec{v}(0, 0, 1)$

ج- $(P) : x - y + 3z + 1 = 0$

بنفس الطريقة لدينا:

$$x - y + 3z + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 + y - 3z$$

نضع $y = t$ و $z = t'$

إذن: $(t, t') \in \mathbb{R}^2$ $$(P) : \begin{cases} x = -1 + t - 3t' \\ y = t \\ z = t' \end{cases}$$

ومنه (P) هو المستوى المار من $A(-1, 0, 0)$ وموجه بالمتجهتين $\vec{u}(1, 1, 0)$ و $\vec{v}(-3, 0, 1)$.

---

8 التمرين 8

ادرس الأوضاع النسبية للمستقيمين (D) و (D') من الفضاء في الحالات التالية:

أ- $(D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ و $(D') : \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 - k \\ z = 0 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

ب- $(D) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ و $(D') : \frac{x - 3}{4} = \frac{y - 3}{6} = \frac{z}{2}$

ج- $(D) : \begin{cases} \frac{x + 1}{2} = \frac{z - 1}{3} \\ y - 2 = 0 \end{cases}$ و $(D') : \frac{x - 2}{2} = \frac{y + 4}{3} = \frac{z + 2}{4}$

✓ الحل ▴

دراسة الأوضاع النسبية للمستقيمين (D) و (D') في الحالات التالية:

أ-

$$(D') : \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 - k \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases} \quad و \quad (D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

لدينا (D) يمر من $A(1, 2, 0)$ وموجه بالمتجهة $\vec{u}(1, -3, 1)$.

و (D') يمر من $B(2, 1, 0)$ وموجه بالمتجهة $\vec{v}(-1, -1, 0)$.

ولدينا: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4 \neq 0$

إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتان.

ومنه (D) و (D') إما متقاطعان وإما غير مستوائيان

ولدينا: $\overrightarrow{AB}(1, -1, 0)$

و $\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= 1 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 1 = 2 \neq 0$$

إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهات غير مستوائية.

Moutamadris.ma

إذن (D) و (D') مستقيمان غير مستوائيان.

ب-

$(t \in IR)$ $(D) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$ و $(D') : \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{6} = \dfrac{z}{2}$

إذن (D) يمر من $A\,(1, 0, -1)$ وموجه بـ $\vec{u}\,(2, 3, 1)$.

و (D') يمر من $B\,(3, 3, 0)$ وموجه بـ $\vec{v}\,(4, 6, 2)$.

وبما أن $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$ و $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ و $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان.

إذن: $(D) \mathbin{//} (D')$

ولدينا $A\,(1, 0, -1)$ و $\dfrac{1-3}{4} = \dfrac{0-3}{6} = \dfrac{-1}{2}$ صحيحة

إذن: $A \in (D')$.

وبما أن $A \in (D)$

فإن (D) و (D') منطبقان.

ج-

$(D) : \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{z-1}{3} \\ y - 2 = 0 \end{cases}$ و $(D') : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z+2}{4}$

إذن (D) يمر من $A\,(-1, 2, 1)$ وموجه بـ $\vec{u}\,(2, 0, 3)$.

و (D') يمر من $B\,(2, -4, -2)$ وموجه بـ $\vec{v}\,(2, 3, 4)$.

وبما أن $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

فإن u و v غير مستقيميتان.

إذن (D) و (D') إما متقاطعان وإما غير مستوائيان

ولدينا: $\overrightarrow{AB}\,(3, -6, -3)$

و $$\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-9) + 6(8-6) - 3(6)$$

$$= -27 + 12 - 18$$

$$= -33 \neq 0$$

فإن $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستوائية.

إذن (D) و (D ') مستقيمان غير مستوائيان.

9

التمرين 9

ادرس الأوضاع النسبية للمستويين (P) و (Q) في الحالات التالية:

(1 $(P)\ : x + y + z - 1 = 0$ و $(Q)\ : 2x + y - z = 0$

(2 $(P) : \begin{cases} x = 1 + t + t' \\ y = -t + 2t' \\ z = 2 + t - 3t' \end{cases} \quad ((t, t') \in IR^2)$ و $(Q) : \begin{cases} x = 3 + 2k + k' \\ y = 1 + 2k + 2k' \\ z = 2k - 3k' \end{cases} \quad ((k, k') \in IR^2)$

(3 $(P)\ : x + 2y - z + 1 = 0$ و $(Q) : \begin{cases} x = 2t + 3t' \\ y = 1 + t - t' \\ z = -2 + t + 2t' \end{cases} \quad ((t, t') \in IR^2)$

✓ الحل ▴

أدرس الأوضاع النسبية للمستويين (P) و (Q) في الحالات التالية:

1) $(P) : x + y + z - 1 = 0$ و $(Q) : 2x + y - z = 0$

لدينا $x + y + z - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - y - z$

نضع $y = t$ و $z = t'$

إذن $(t, t') \in \mathbb{R}^2$ $$(P) : \begin{cases} x = 1 - t - t' \\ y = t \\ z = t' \end{cases}$$

ومنه (P) هو المستوى المار من $A\,(1, 0, 0)$ وموجه بـ

$\vec{u}\,(-1, 1, 0)$ و $\vec{v}\,(-1, 0, 1)$

ولدينا $2x + y - z = 0 \Leftrightarrow z = 2x + y$

نضع $y = t'$ و $x = t$

إذن: $(t, t') \in \mathbb{R}^2$ $$(Q) : \begin{cases} x = t \\ y = t' \\ z = 2t + t' \end{cases}$$

ومنه (Q) هو المستوى المار من $O\,(0, 0, 0)$ و وموجه بـ

$\vec{u'}\,(1, 0, 2)$ و $\vec{v'}\,(0, 1, 1)$

ولدينا:

$$\det\left(\vec{u}\,,\vec{u'},\vec{v'}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - 1 = 1 \neq 0$$

إذن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (D) ذي المعادلتين.

الديكارتيتين:
$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

2)
$$(P) : \begin{cases} x = 1 + t + t' \\ y = -t + 2t' \\ z = 2 + t - 3t' \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

و
$$(Q) : \begin{cases} x = 3 + 2k + k' \\ y = 1 + 2k + 2k' \\ z = 2k - 3k' \end{cases} \quad (k, k') \in \mathbb{R}^2$$

لدينا (P) يمر من $A\,(1, 0, 2)$ وموجه بـ $\vec{u}\,(1, -1, 1)$

و $\vec{v}\,(1, 2, -3)$ و (Q) يمر من $B\,(3, 1, 0)$ وموجه بـ

$\vec{u'}\,(2, 2, 2)$ و $\vec{v'}\,(1, 2, -3)$

لدينا:
$$\det\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u'}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= (4 + 6) + (2 + 6) + (2 - 4) = 16 \neq 0$$

إذن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم معرف بالمعادلتين الديكارتيتين لـ (P) و (Q).

3) $\mathbf{(P) : x + 2y - z + 1 = 0}$

و
$$(Q) : \begin{cases} x = 2t + 3t' \\ y = 1 + t - t' \\ z = -2 + t + 2t' \end{cases} \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

لدينا $x + 2y - z + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 - 2y + z$

بوضع $y = t$ و $z = t'$

نحصل على : $(t, t') \in \mathbb{R}^2$ $\quad (P) : \begin{cases} x = -1 - 2t + t' \\ y = t \\ z = t' \end{cases}$

إذن (P) المستوى المار من $A(-1, 0, 0)$ وموجه بالمتجهتين $\vec{u}(-2, 1, 0)$ و $\vec{v}(1, 0, 1)$ ولدينا (Q) هو المستوى المار من $B(0, 1, -2)$ وموجه بِـ $\vec{u'}(2, 1, 1)$ و $\vec{v'}(3, -1, 2)$.

وبما أن:

$$\det\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u'}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 + 1 = 3 \neq 0$$

فإن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم معرف بالمعادلتين الديكارتيتين لـ (P) و (Q).

التمرين 10

ادرس الأوضاع النسبية للمستقيم (D) و المستوى (P) في الحالات التالية:

1) $(D) : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{2}$ و $(P) : x + 2y + z - 1 = 0$

2) $(D) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \ (t \in \mathbb{R})$ و $(P) : x + y - z + 1 = 0$

3) $(D) : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases} \ (t \in \mathbb{R})$ و $(P) : \begin{cases} x = k + k' \\ y = 1 + k \\ z = k' \end{cases} \ (k, k') \in \mathbb{R}^2$

✓ الحل ▴

دراسة الوضع النسبي لِـ (D) و (P) في الحالات التالية:

1) $(D) : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$ و $(P) : x+2y-z-1=0$

لدينا (D) هو المستقيم المار من $A(-1, 2, -3)$ وموجه بِـ $\vec{u}(2, 3, 2)$

ولدينا: $x+2y-z-1=0 \Leftrightarrow z=-1+x+2y$

وبوضع $x=t$ و $y=t'$

نحصل على تمثيل بارامتري لِـ (P) كما يلي:

$$(P) : \begin{cases} x=t \\ y=t' \\ z=-1+t+2t' \end{cases} \qquad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

إذن (P) يمر من $B(0, 0, -1)$ وموجه بالمتجهتين $\vec{v}(1, 0, 1)$ و $\vec{w}(0, 1, 2)$

ولدينا

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2-6+2=-6 \neq 0$$

إذن (D) يقطع المستوى (P) في نقطة E إحداثياتها تحقق:

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$ و $x + 2y + z - 1 = 0$ تمثيل

بارامتري للمستقيم (D) هو: $(t \in \mathrm{IR})$ $(D): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$

نعوض x و y و z في معادلة (P)

إذن $(-1 + 2t) + 2(2 + 3t) - (-3 + 2t) - 1 = 0$

يعني $6t + 5 = 0$ يعني $t = -\frac{5}{6}$

ومنه:

$$\begin{cases} x = -1 + 2\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{8}{3} \\ y = 2 + 3\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{2} \\ z = -3 + 2\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{14}{3} \end{cases}$$

ومنه $E\left(-\frac{8}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{14}{3}\right)$ هي نقطة تقاطع (D) و (P).

(2 $(t \in \mathrm{IR})$ $(D): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ و $(P): x + y - z + 1 = 0$

لدينا $x + y - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1 + x + y$

بوضع $x = t$ و $y = t'$

لدينا: $(t, t') \in \mathrm{IR}^2$ $(P): \begin{cases} x = t \\ y = t' \\ z = 1 + t + t' \end{cases}$

إذن (P) هو المستوى المار من $A(0, 0, 1)$ وموجه بـ

$\vec{u}(1, 0, 1)$ و $\vec{v}(0, 1, 1)$

ولدينا (D) هو المستقيم المار من $B(1, -1, 1)$ وموجه بـ

$\vec{w}(2, -1, 1)$

وبما أن:
$$\det\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - 2 = 0$$

إذن المستقيم (D) والمستوى (P) متوازيان

ولدينا $B(1, -1, 1) \in (D)$

وبما أن $1 + (-1) - 1 + 1 = 0$ أي $B \in (P)$

فإن: $(D) \subset (P)$.

3)
$$(D) : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$$

و
$$(P) : \begin{cases} x = k + k' \\ y = 1 + k \quad (k, k') \in \mathbb{R}^2 \\ z = k' \end{cases}$$

لدينا (D) يمر من $O(0, 0, 0)$ وموجه بالمتجهة $\vec{u}(1, 2, -1)$

و (P) هو المستوى المار من $A(0, 1, 0)$ وموجه بـ

$\vec{w}(1, 1, 0)$ و $\vec{v}(1, 0, 1)$

وبما أن $$\det\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 + 2 - 1 = 0$$

إذن $(D) \,/\!/\, (P)$

ولدينا: $A(0, 1, 0) \in (P)$

إذا كانت $A \in (D)$ فإن إحداثياتها تحقق $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$

أي $\begin{cases} 0 = t \\ 1 = 2t \\ 0 = -t \end{cases}$ يعني $\begin{cases} t = 0 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ وهذا غير ممكن

إذن $A \notin (D)$

ومنه: $(D) \cap (P) = \varnothing$

Moutamadris.ma