1 التمرين 1

حدّد في الحالات التالية D_f مجموعة تعريف الدالة f واحسب نهاياتها عند محدات D_f واستنتج الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) المثل للدالة f.

(1 $f : x \mapsto \frac{2x - 1}{x - 1}$

(2 $f : x \mapsto 2x - 1 + \frac{2}{x - 2}$

(3 $f : x \mapsto |x^2 - 2x + 3|$

(4 $f : x \mapsto \sqrt{2x - 4}$

(5 $f : x \mapsto 2x - \sqrt{1 - x}$

✓ الحل ▴

(1 $f : x \mapsto \frac{2x - 1}{x - 1}$:

* أحدّد D_f مجموعة تعريف الدالة f:

$$x \in D_f \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

إذن $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

* حساب النهايات عند محدات D_f:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = 2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2x - 1}{x - 1} = \frac{1}{"0^-"} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2x - 1}{x - 1} = \frac{1}{"0^+"} = +\infty$

لأن:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	

* تحديد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) للدالة f:

• لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$

إذن (C_f) يقبل مقارباً أفقياً معادلته $y = 2$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

• لدينا $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$، إذن (C_f) يقبل مقارباً عمودياً معادلته $x = 1$ بجوار 1 على اليمين.

• لدينا $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$، إذن (C_f) يقبل مقارباً عمودياً معادلته $x = 1$ بجوار 1 على اليسار.

(2 $f : x \mapsto 2x - 1 + \dfrac{2}{x-2}$:

* أحدّد D_f مجموعة تعريف الدالة f:

$$x \in D_f \Leftrightarrow x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

إذن $D_f = IR \setminus \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

* حساب النهايات عند محدات D_f:

• لدينا: $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$

و $\lim_{x\to-\infty} 2x - 1 = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$

إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

• لدينا: $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$

و $\lim_{x\to+\infty} 2x - 1 = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

إذن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

• لدينا: $\lim_{x\to2^-} \frac{2}{x-2} = \frac{2}{"0^-"} = -\infty$

و $\lim_{x\to2^-} 2x - 1 = 3$

إذن: $\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty$

• لدينا: $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{2}{x-2} = \frac{2}{"0^+"} = +\infty$

و $\lim\limits_{x\to 2^+} 2x - 1 = 3$

إذن: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

* أحدّد الفروع اللانهائية (C_f) :

• لدينا: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

إذن (C_f) يقبل مقارباً عمودياً معادلته $x = 2$ بجوار 2 على اليسار.

لا أنسى:
$\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$
إذن (C_f) يقبل مقارباً
معادلته $x = a$

• لدينا $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ ،

إذن (C_f) يقبل مقارباً عمودياً معادلته $x = 2$ بجوار 2 على اليمين.

• لدينا $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ،

و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - (2x-1) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x-2} = 0$

إذن المستقيم $(\Delta) : y = 2x - 1$. مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

• لدينا $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ ،

و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) - (2x-1) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2}{x-2} = 0$

إذن المستقيم $(\Delta) : y = 2x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ملاحظة:

في الحالتين الأخيرتين يمكن حساب $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

ثم حساب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - 2x = -1$

(نفس الشيء بالنسبة لِـ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - 2x = -1$)

بعد ذلك نستنتج $y = 2x - 1$: (Δ) مقارب مائل لِـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

3) $f : x \mapsto |x^2 - 2x + 3|$:

• لدينا $D_f = \mathrm{IR} =]-\infty, +\infty[$

* أحسب النهايات عند محدات D_f:

• لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 2x + 3 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \to -\infty} |x^2 - 2x + 3| = +\infty$

أي: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

• لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x + 3 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} |x^2 - 2x + 3| = +\infty$

أي: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

* أحدّد الفروع اللانهائية :

• لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

و $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|x^2 - 2x + 3|}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|x^2 - 2x + 3|}{-|x|}$ (لأن $x \to -\infty$ تستلزم $x < 0$)

$= \lim\limits_{x \to -\infty} -\left|\frac{x^2 - 2x + 3}{x}\right|$

وبما أن: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

فإن: $\lim_{x\to-\infty}\left|\frac{x^2-2x+3}{x}\right| = +\infty$

إذن

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\left|\frac{x^2-2x+3}{x}\right| = -\infty$$

لا أنسى: إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ فإن محور الأراتيب اتجاه مقارب لـ(C_f)

ومنه (C_f) يقبل اتجاهاً مقارباً هو محور الأراتيب بجوار $-\infty$.

ونقول كذلك إن (C_f) يقبل فرعاً شلجمياً اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.

- لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left|x^2-2x+3\right|}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left|x^2-2x+3\right|}{|x|}$$

(لأن $x\to+\infty$ تستلزم $x>0$)

$$= \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x^2-2x+3}{x}\right|$$

وبما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+3}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

فإن $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x^2-2x+3}{x}\right| = +\infty$

إذن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$

ومنه (C_f) يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

4) $f : x \mapsto \sqrt{2x-4}$:

* أحدّد D_f:

$$x\in D_f \Leftrightarrow 2x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2 \Leftrightarrow x\in [2,+\infty[$$

إذن $D_f = [2,+\infty[$

* أحسب النهايات عند محدات D_f:

- لدينا: $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{2x-4} = 0$

- لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 4 = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x-4} = +\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

* أحدّد الفروع اللانهائية لِـ (C_f):

- لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x-4}}{x}$

(لأن $x \to +\infty$ تستلزم $x > 0$ إذن $\sqrt{x^2} = x$)

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x-4}{x^2}}$$

وبما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-4}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{2x-4}{x^2}} = 0$

أي $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

إذن (C_f) يقبل محور الأفاصيل كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$ ونقول كذلك إن (C_f) يقبل فرعاً شلجمياً اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

لا أنسى:

إذا كان $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

و $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ فإن محور

الأفاصيل اتجاه مقارب لِـ (C_f)

ملاحظة:

لدينا: $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$

إذن (C_f) لايقبل فرعاً لانهائياً بجوار 2 على اليمين.

5) $f : x \mapsto 2x - \sqrt{1 - x}$:

* أحدّد D_f:

$$x \in D_f \Leftrightarrow 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1]$$

إذن $D_f =]-\infty, 1]$

* أحسب النهايات عند محدات D_f:

• لدينا: $\lim_{x \to 1^-} 1 - x = 0$

إذن $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x} = \sqrt{0} = 0$

وبما أن $\lim_{x \to 1^-} 2x = 2$ فإن $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 - 0 = 2$

• لدينا: $\lim_{x \to -\infty} 1 - x = +\infty$

إذن $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1 - x} = +\infty$

وبما أن $\lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$

فإن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x - \sqrt{1 - x} = -\infty$

* أحدّد الفرع اللانهائي بجوار $-\infty$:

• لدينا $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

ولدينا:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - \sqrt{1 - x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 2 - \frac{\sqrt{1 - x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 2 - \frac{\sqrt{1 - x}}{-\sqrt{x^2}}$$

(لأن $x \to -\infty$
إذن $x < 0$)

$$= \lim_{x \to -\infty} 2 + \sqrt{\frac{1 - x}{x^2}}$$

$$= 2$$

لأن $\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x^2}$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

وبما أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{1-x} = -\infty$

(لأن $\lim_{x \to -\infty} 1 - x = +\infty$)

فإن المنحنى (C_f) يقبل فرعاً شلجمياً اتجاهه المستقيم $(\Delta): y = 2x$ بجوار $-\infty$.

لا أنسى:

إذا كان $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

و $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$

و $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$

فإن المستقيم $(\Delta): y = ax$ اتجاه مقارب لـ (C_f)

2 التمرين 2

1) نعتبر الدالة $f : x \mapsto \frac{x+2}{x-2}$. بيّن أن النقطة $\Omega\ (2, 1)$ مركز تماثل منحنى الدالة f.

2) نعتبر الدالة $g : x \mapsto 3x^2 - 6x + 1$. بيّن أن المستقيم $(\Delta) : x = 1$ محور تماثل المنحنى الممثل للدالة g.

✓ الحل ▴

---

1) $f : x \mapsto \frac{x+2}{x-2}$:

لدينا: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

* أبيّن أن $\Omega\ (2, 1)$ مركز تماثل منحنى الدالة f:

$$\begin{aligned} x \in D_f &\Leftrightarrow x \neq 2 \\ &\Leftrightarrow -x \neq -2 \\ &\Leftrightarrow 4 - x \neq 4 - 2 \\ &\Leftrightarrow 4 - x \neq 2 \\ &\Leftrightarrow 4 - x \in D_f \end{aligned}$$

إذن $4 - x \in D_f$ لكل x من D_f.

* ليكن $x \in D_f$:

لدينا: $f(4-x) = \frac{(4-x)+2}{(4-x)-2}$

$$= \frac{6-x}{2-x} = \frac{x-6}{x-2}$$

ولدينا: $2 - f(x) = 2 - \frac{x+2}{x-2}$

$$= \frac{2x-4-x-2}{x-2}$$

$$= \frac{x-6}{x-2}$$

إذن $f(4-x) = 2 - f(x)$

لا أنسى:
$\Omega(a, b)$ مركز تماثل (C_g) يعني:
• $2a - x \in D_f$ لكل x من D_f
• لكل x من D_f
$f(2a-x) = 2b - f(x)$

ومنه النقطة $\Omega(2, 1)$ مركز تماثل منحنى الدالة f.

2) $g : x \mapsto 3x^2 - 6x + 1$:

لدينا: $D_g = \mathbb{R}$

- أبيّن أن المستقيم $(\Delta) : x = 1$ محور تماثل المنحنى (C_g).

- لدينا $D_g = \mathbb{R}$ إذن $2 - x \in D_g$ لكل x من D_g.
- ليكن $x \in D_g$:

لدينا: $g(2-x) = 3(2-x)^2 - 6(2-x) + 1$

$$= 3(4 - 4x + x^2) - 12 + 6x + 1$$

$$= 3x^2 - 12x + 12 - 12 + 6x + 1$$

$$= 3x^2 - 6x + 1 = g(x)$$

إذن المستقيم $(\Delta) : x = 1$ محور تماثل منحنى الدالة g.

3 التمرين 3

حدّد تقعر وتحذب منحنى الدالة f وحدّد نقط الانعطاف إن وجدت في الحالات التالية:

1) $f : x \mapsto x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$

2) $f : x \mapsto \sqrt{x-1}$

3) $f : x \mapsto \frac{-3x-1}{x+1}$

✓ الحل ▴

أحدّد تقعر وتحدّب منحنى الدالة f مع تحديد نقط الانعطاف إن وجدت في الحالات التالية:

1) $f : x \mapsto x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$:

لدينا: $D_f = IR$

و $(\forall x \in IR) : f'(x) = 3x^2 - 3x + 1$

و $(\forall x \in IR) : f''(x) = 6x - 3$

إشارة $6x - 3$ هي كالتالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$6x - 3$		$-$	0	$+$	

إذن (C_f) مقعر على $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ ومحدب على $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

النقطة $A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ هي نقطة انعطاف (C_f)

لأن $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ و f'' تغير إشارتها من جهة وأخرى للعدد $\frac{1}{2}$.

نلخص ما سبق في الجدول التالي:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
تقعر (C_f)	∩ (C_f) مقعر	$A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ نقطة انعطاف C_f	∪ (C_f) محدب

2) $f : x \mapsto \sqrt{x - 1}$:

لدينا: $D_f = [1, +\infty[$

و $$\left(\forall x \in]1, +\infty[\right) : f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

و $$\left(\forall x \in]1, +\infty[\right) : f''(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)'}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}$$

إذن:

$$\left(\forall x \in]1, +\infty[\right) : f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x-1}\,(x-1)} < 0$$

إذن (C_f) مقعر على D_f.

(3 $f : x \mapsto \frac{-3x-1}{x+1}$:

لدينا: $D_f = \mathrm{IR}\backslash\{-1\}$

و $$\left(\forall x \in \mathrm{IR}\backslash\{-1\}\right) : f'(x) = \frac{\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{(x+1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2}$$

و $$\left(\forall x \in \mathrm{IR}\backslash\{-1\}\right) : f''(x) = -2\left(-\frac{\left((x+1)^2\right)'}{\left((x+1)^2\right)^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{2\,(x+1)}{(x+1)^4}\right)$$

إذن: $$\left(\forall x \in \mathrm{IR}\ \{-1\}\right) : f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}$$

ولدينا إشارة $f''(x)$ هي إشارة $x + 1$

(لأن $(x+1)^3 = (x+1)^2(x+1)$)

إذن تقعر منحنى f هو كالتالي :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	−	‖	+
(C_f) تقعر	∩ − (C_g) مقعر	‖	∪ + (C_f) محدب

لاحظ أن (C_f) لايقبل نقط انعطاف.

4 التمرين 4

نعتبر الدالة $f : x \mapsto x + 1 - \frac{2}{x}$. وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) حدّد D_f مجموعة تعريف الدالة f واحسب النهايات عند محدات D_f.

2) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

3) احسب $f'(x)$ لكل x من D_f ثم ضع جدول تغيرات f.

4) ادرس تقعر المنحنى (C_f).

5) أ ـ حدّد نقط تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل.

ب ـ أنشئ المنحنى (C_f).

✓ الحل ▴

$f : x \mapsto x + 1 - \frac{2}{x}$ و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) * أحدّد D_f، مجموعة تعريف الدالة f:

لدينا: $D_f = IR^* =]-\infty; 0[\cup]0, +\infty[$

* أحسب النهايات عند محدات D_f.

• لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x+1-\frac{2}{x} = +\infty$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x+1-\frac{2}{x} = -\infty$

• لدينا $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{2}{x} = \frac{1}{"0^+"} = +\infty$

و $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = \frac{2}{"0^-"} = -\infty$

و $\lim\limits_{x\to0^+} x+1 = \lim\limits_{x\to0^-} x+1 = 1$

إذن $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x+1-\frac{2}{x} = -\infty$

و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} x+1-\frac{2}{x} = +\infty$

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f):

• لدينا: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$

إذن (C_f) يقبل مقارباً عمودياً معادلته $x = 0$ بجوار 0 على اليمين وعلى اليسار.

• لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{2}{x} = 0$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـِ (C_f) بجوار $-\infty$.

• لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{x} = 0$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـِ (C_f) بجوار $-\infty$.

3) حساب $f'(x)$ لكل x من D_f:

$$(\forall x \in D_f) : f'(x) = \left(x + 1 - \frac{2}{x}\right)'$$

$$= 1 + \frac{2}{x^2}$$

إذن $(\forall x \in D_f) : f'(x) > 0$

* جدول تغيرات f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4) أدرس تقعر المنحنى (C_f):

لدينا: $(\forall x \in D_f) : f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2}$

إذن: $(\forall x \in D_f) : f''(x) = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)'$

$$= -\frac{2\,(x^2)'}{x^4}$$

$$= -\frac{4x}{x^4}$$

ومنه: $(\forall x \in D_f) : f''(x) = -\frac{4}{x^3}$

- إذا كانت $x > 0$ فإن $f''(x) < 0$
- إذا كانت $x < 0$ فإن $f''(x) > 0$

نلخص تقعر (C_f) في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	‖	$-$	
تقعر (C_f)		∪ (C_f) محدب	‖	∩ (C_f) مقعر	

5) أ ـ أحدّد نقط تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل:

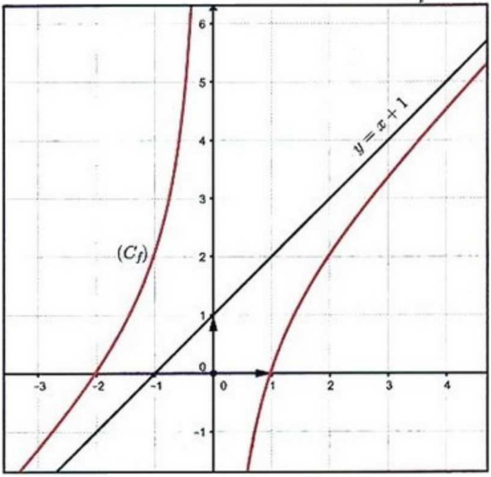
نحل في (D_f) المعادلة $f(x) = 0$،

ليكن $x \in D_f$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x + 1 - \frac{2}{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ أو } x = -2 \end{aligned}$$

إذن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في النقطتين ذات الأفصولين $x = 1$ أو $x = -2$.

ب ـ انشاء المنحنى (C_f):



5 التمرين 5

نعتبر الدالة $f : x \mapsto x^3 - 3x$ المعرفة على IR.

و (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ ـ بيّن أن f دالة فردية ، وأوّل مبيانياً هذه النتيجة.

ب ـ استنتج أنه يمكن دراسة الدالة f على $D_E = IR^+$.

2) احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثم حدّد الفرع اللانهائي لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

3) احسب $f'(x)$ لكل x من IR^+ ثم ضع جدول تغيرات f على IR.

4) أ ـ بيّن أن المنحنى (C_f) محدب على IR^+.

ب ـ حدّد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في 1.

ج ـ أنشئ (C_f) (المطلوب تحديد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم)

✓ الحل ▴

$$f : x \mapsto x^3 - 3x$$

$$D_f = IR =]-\infty, +\infty[$$

(C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ ـ أبيّن أن f دالة فردية وأأوّل النتيجة مبيانياً:

- لدينا: $D_f = IR$ إذن $-x \in D_f$ لكل x من D_f
- ليكن $x \in IR$، لدينا:

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)$$

$$= -x^3 + 3x$$

لا أنسى:

$-x \in D_f$ [illegible]

Moutamadris.ma

لكل x من D_f و $f(-x) = -f(x)$
لكل x من D_f

$$= -(x^3 - 3x)$$
$$= -f(x)$$

إذن f دالة فردية.

ومنه (C_f) يقبل أصل المعلم كمركز تماثل.

ب ـ أستنتج مجموعة الدراسة:

لدينا $D_f = IR$ و f دالة فردية

إذن يكفي دراسة f على $D_E = D_f \cap IR^+$

ومنه: $D_E = IR^+$ حيث D_E هي مجموعة دراسة f.

2) * أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

*** أحدّد الفرع اللانهائي لـ (C_f) بجوار $+\infty$:**

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

و
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3x}{x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x^2$$
$$= +\infty$$

إذن (C_f) يقبل فرعاً شلجمياً اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

3) * أحسب $f'(x)$ لكل x من IR^+:

لدينا: $(\forall x \in IR^+) : f'(x) = 3x^2 - 3$

*** أضع جدول تغيرات f :**

ألاحظ أن $3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ أو $x = -1$

إذن لكل x من IR^+،

ولدينا لكل $x \geq 1$ ، $f'(x) \geq 0$

ولكل $0 \leq x \leq 1$ ، $f'(x) \leq 0$

إذن f تزايدية على $[1, +\infty[$ وتناقصية على $[0, 1]$

وبما أن f دالة فردية فإن:

f تزايدية على $]-\infty, -1]$ وتناقصية على $[-1, 0]$

وبالتالي، جدول تغيرات f هو كالتالي:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	$+\infty$

4) أ- أبيّن أن (C_f) محدب على IR^+:

لدينا $(\forall x \in IR^+) : f'(x) = 3x^2 - 3$

إذن $(\forall x \in IR^+) : f''(x) = 6x$

ومنه $(\forall x \in IR^+) : f''(x) \geq 0$

إذن المنحنى (C_f) محدب على IR^+.

ب- أحدّد معادلة المماس في النقطة 1:

لدينا $f'(1) = 0$

إذن معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة 1 هي:

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

إذن: $(T) : y = -2$

ج- أحدّد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم:

- (C_f) يقطع محور الأراتيب في $O(0, 0)$.
- لأحدّد نقط تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل، أحل المعادلة $f(x) = 0$ في IR.

ليكن $x \in IR$:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0$

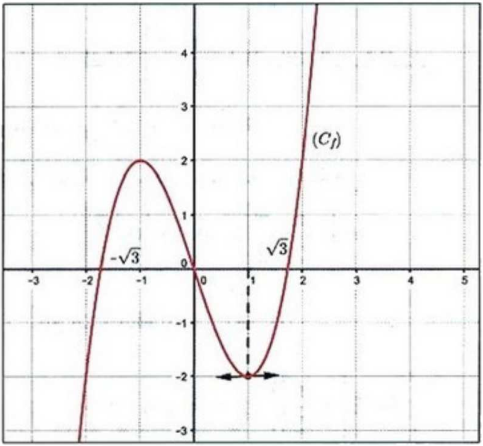
$\Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ أو $x = \sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$

إذن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في النقط ذات الأفاصيل

0 و $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$.

* انشاء المنحنى (C_f) :



---

6 التمرين 6

نعتبر الدالة $f : x \mapsto \cos(2x) - 1$ المعرفة على IR.

1) أ - بيّن أن f دالة دورية دورها $T = \pi$.

ب - بيّن أن f دالة زوجية.

ج - بيّن أنه يمكن دراسة الدالة f على $D_E = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) بيّن أن f تناقصية على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ثم استنتج رتابة f على $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. وضع جدول تغيرات f على $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3) أنشئ منحنى قصور الدالة f على $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

✓ الحل ▴

نعتبر الدالة $f : x \mapsto \cos(2x) - 1$

$D_f = IR$

1) أ- أبيّن أن f دالة دورية دورها $T = \pi$:

• لدينا: $D_f = IR$ إذن $x + \pi \in IR$ لكل x من IR

• ليكن $x \in IR$، لدينا:

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \cos(2(x+\pi)) - 1 \\ &= \cos(2x + 2\pi) - 1 \\ &= \cos(2x) - 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

إذن f دالة دورية دورها $T = \pi$.

لا أنسى:
f دورية دورها T
يعني $x + T \in D_f$ لكل x من D_f
و $f(x+T) = f(x)$ لكل x من D_f

ب- أبيّن أن f دالة زوجية:

لدينا $D_f = IR$ إذن $-x \in D_f$ لكل x من D_f.

ليكن $x \in D_f$، لدينا:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(2(-x)) - 1 \\ &= \cos(-2x) - 1 \\ &= \cos(2x) - 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

لا أنسى:
f زوجية يعني $-x \in D_f$
لكل x من D_f و $f(-x) = f(x)$
لكل x من D_f

إذن f دالة زوجية.

ج- أبيّن أنه يمكن دراسة الدالة f على $D_E = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

لدينا f دالة دورية دورها $T = \pi$ ومعرفة IR.

إذن يكفي دراستها على قطعة طولها $T = \pi$.

نأخذ مثلاً القطعة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ المتماثلة بالنسبة للصفر

(وهذا طبيعي لأن f دالة زوجية)

وبما أن f دالة زوجية فإن مجموعة الدراسة هي:

$$D_E = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cap IR^{+} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

2) * أبيّن أن **f** تناقصية على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

لدينا: $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) : f(x) = \cos(2x) - 1$

إذن: $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) : f'(x) = -2\sin(2x)$

ولدينا: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

إذن: $0 \leq 2x \leq \pi$

ومنه $\sin(2x) \geq 0$

إذن $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) : f'(x) \leq 0$

وبالتّالي f تناقصية على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

* أستنتج رتابة **f** على $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$:

لدينا **f** تناقصية على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ و f دالة زوجية

إذن f تزايدية على $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

* جدول تغيرات **f** على $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

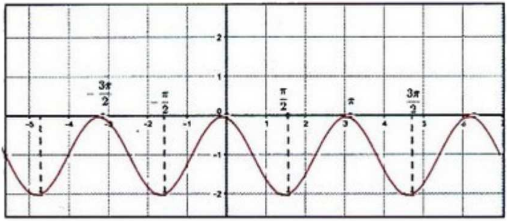
x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	-2	↗	0	↘	-2

لدينا $f(0)=0$ و $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2$ و $f'(0)=0$

3) إنشاء منحنى قصور f على $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$:

المراحل:

- إنشاء (C_f) على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
- إنشاء صورة هذا الجزء من (C_f) بالتماثل المحوري الذي محوره محور الأراتيب (لأن f زوجية) على $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$
- إتمام إنشاء الجزء من (C_f) على المجالين $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ و $\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$ باستعمال إزاحات مناسبة.



Moutamadris.ma