السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الحساب المثلثـــــي	سلسلة 1

تمرين 1 :

1) α قياس زاوية حيث : $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ و $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

أ) احسب $\cos 2\alpha$

ب) استنتج حساب α

2) β قياس زاوية حيث : $\tan\beta = 2+\sqrt{3}$ و $0<\beta<\frac{\pi}{2}$

أ) احسب $\tan 2\beta$

ب) استنتج حساب β

تمرين 2 :

α قياس زاوية حيث : $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ و $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ، احسب $\sin 2\alpha$ و احسب $\cos 3\alpha$

تمرين 3 :

1) بين أن : $\forall x\in IR \quad \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1+\sin x$

2) بين أن : $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \ / k\in Z \quad \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}-1$

3) بين أن : $\forall x\in IR \quad \cos^4 x = \cos 2x + \sin^4 x$

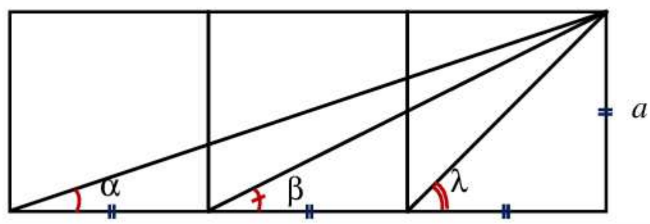
4) بين أن : $\forall x\in IR \quad \sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x.\cos^2 x = 1$

تمرين 4 : x و y عددان حقيقيان حيث : $\begin{cases} \sin x+\cos y = \sqrt{2} \\ \sin^2 x+\cos^2 y = 1 \end{cases}$ و $(x,y)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2$

1) احسب التعبير $\left(\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

2) استنتج قيمة كل من x و y

تمرين 5 : نعتبر الشكل التالي :



1) احسب $\tan\alpha$ و $\tan\beta$

2) استنتج أن : $\alpha+\beta=\lambda$

تمرين 1 :

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2} \quad ، \quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

1 أ) لدينا: $\cos 2\alpha=2\cos^2(\alpha)-1=2\frac{8+2\sqrt{12}}{16}-1=\frac{8+4\sqrt{3}}{8}-1=\frac{2+\sqrt{3}}{2}-1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) لدينا $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ إذن : $0<2\alpha<\pi$ ، وبما أن : $\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن: $2\alpha=\frac{\pi}{6}$ منه: $\boxed{\alpha=\frac{\pi}{12}}$

$$0<\beta<\frac{\pi}{2} \quad ، \quad \tan\beta=2+\sqrt{3}$$

2 أ) لدينا: $\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{1-\left(7+4\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{-6-4\sqrt{3}}=\frac{-\left(2+\sqrt{3}\right)}{3+2\sqrt{3}}=\frac{-\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)}=\frac{-1}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$

ب) لدينا $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ منه: $0<2\beta<\pi$ و بما أن: $\tan 2\beta=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ فإن: $2\beta=\frac{5\pi}{6}$ بالتالي: $\boxed{\beta=\frac{5\pi}{12}}$

من الضروري حفظ النسب المثلثية للزوايا الخاصة : $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}$ وبقية النسب يمكنك استخراجها مستعملا الدائرة المثلثية أو خاصيات الحساب المثلثي. فمثلا $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{3}$

تمرين 2 : $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ ، $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

نعلم أن: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ منه: $\sin^2\alpha+\frac{9}{25}=1$ منه: $\sin^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

وبما أن: $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ فإن: $\sin\alpha>0$ منه : $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ بالتالي : $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\,\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$

لدينا:

$$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha.\cos\alpha-\sin 2\alpha.\sin\alpha=\left(2\cos^2\alpha-1\right)\cos\alpha-\sin 2\alpha.\sin\alpha$$

$$\cos 3\alpha=\left(\frac{18}{25}-1\right)\times\frac{3}{5}-\frac{24}{25}\times\frac{4}{5}=\frac{-7}{25}\times\frac{3}{5}-\frac{96}{125}=\frac{-117}{125}$$

لا يجب نسيان تطبيق الخاصية الأساسية للحساب المثلثي $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$ كلما دعت الحاجة لذلك.

تمرين 3 :

1 لدينا: $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2=\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2+2\left(\sin\frac{x}{2}\right).\left(\cos\frac{x}{2}\right)=1+\sin\left(2\times\frac{x}{2}\right)=1+\sin x$

2 لدينا: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ /k\in Z\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\tan^2 x$

3 لدينا:

$$\cos^4 x-\sin^4 x=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$$

$$\cos^4 x-\sin^4 x=1\times(\cos x\cos x-\sin x\sin x)$$

$$\cos^4 x-\sin^4 x=\cos(x+x)=\cos(2x)$$

بالتالي: $\forall x\in IR \quad \cos^4 x=\cos 2x+\sin^4 x$

4 لدينا:

$$A=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x.\cos^2 x=\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3++3\sin^2 x.\cos^2 x$$

$$A=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x.\cos^2 x+\cos^4 x\right)+3\sin^2 x.\cos^2 x$$

$$A=\sin^4 x+2\sin^2 x.\cos^2 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=1$$

تمرين 4 : $\begin{cases}\sin x+\cos y=\sqrt{2}\\ \sin^2 x+\cos^2 y=1\end{cases}$ ، $(x,y)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2$

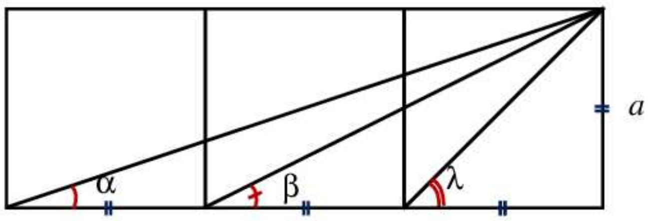
1 لدينا :

$$\left(\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\cos^2 y-\sqrt{2}\cos y+\frac{1}{2}+\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x+\frac{1}{2}$$

$$\left(\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\cos^2 y+\cos^2 x-\sqrt{2}(\cos y+\cos x)+1=1-2+1=0$$

2 من السؤال السابق نستنتج أن : $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، و بما أن $(x,y)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2$ فإن : $x=y=\frac{\pi}{4}$

تمرين 5 :



1 لدينا: $\tan\alpha=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3}$ و $\tan\alpha=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$

2 لدينا : $\tan\lambda=\frac{a}{a}=1$ و $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$

منه: $\tan(\alpha+\beta)=1$

و لدينا : $\begin{cases}\tan\alpha=\frac{1}{2}<1=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ و $\begin{cases}\tan\beta=\frac{1}{3}<1=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow 0<\beta<\frac{\pi}{4}$

منه: $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$

الآن : $\begin{cases}0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\\ \tan(\alpha+\beta)=1\end{cases}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ و $\begin{cases}0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\\ \tan(\alpha+\beta)=1\end{cases}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ بالتالي : $\boxed{\alpha+\beta=\lambda}$

فكرة التمرين واضحة : للبرهان على تساوي زاويتين نبرهن على تساوي إحدى النسب المثلثية (في المثال الظل) مع إمكانية تطبيق قواعد الجمع و الطرح، لكن يجب الانتباه أن الاستنتاج لا يكون كاملا إلا إذا برهنا أن الزاويتين تنتميان معا لمجال من الشكل $\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ حيث $k\in Z$ لأن العبارة : $\tan x=\tan y\Rightarrow x=y$ لا تكون صحيحة إلا مع الشرط السابق.

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الحساب المثلثـــــي	سلسلة 2

تمرين 1 :

1) بين أن : $\cos x.\cos 2x.\cos 4x = \frac{\sin 8x}{8\sin x}$ $\forall x \in IR \,/\, x \neq k\pi , k \in Z$

2) استنتج حساب الجدائين : $A = \cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}$ و $B = \cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9}$

تمرين 2 :

1) بين أن : $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ $\forall x \in IR \,/\, x \neq \pi + 2k\pi , k \in Z$

2) استنتج حساب : $\tan\frac{\pi}{12}$

3) احسب : $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$

تمرين 3 : ليكن x عددا حقيقيا ، بين أن :

1) $\cos x + \cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) = 0$

2) $\sin x + \sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right) = 0$

3) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

تمرين 4 : لتكن x و y و z أعدادا حقيقية حيث : $x+y+z=\pi$ ، بين المتساويات التالية :

1) $\sin x.\cos y + \cos x.\sin y = \sin z$

2) $\sin x + \sin y + \sin z = 4\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{y}{2}.\cos\frac{z}{2}$

3) $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x.\tan y.\tan z$

تمرين 5 : ليكن x عددا حقيقيا ، حول إلى جداء التعابير التالية:

$A = \sin x + \sin 3x + 2\sin 2x$ ، $B = 1 - \cos 2x + \cos 3x - \cos 5x$ ، $C = 1 - \cos 2x - \sin 2x$

$D = 1 + 2\cos x + \cos 2x$ ، $E = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$ ، $F = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$

سلسلة 2	الحساب المثلثي حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 :

1 لدينا لكل $x \in IR$:

$$\sin(8x) = 2\cos(4x)\sin(4x) = 2\cos(4x)(2\cos(2x)\sin(2x)) = 4\cos(4x)\cos(2x)(2\cos(x)\sin(x))$$

$$\sin(8x) = 8\cos(4x)\cos(2x)\cos(x)\sin(x)$$

بالتالي : $\cos x.\cos 2x.\cos 4x = \dfrac{\sin 8x}{8\sin x}$ $\quad \forall x \in IR - \cup\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in Z\right\}$

2 حسب السؤال السابق :

$$A = \cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{-1}{8}$$

و

$$B = \cos\frac{\pi}{9}.\cos\frac{2\pi}{9}.\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} = \frac{1}{8}$$

استعملنا الخاصية الهامة : $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

تمرين 2 :

1 لدينا : $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ $\quad \forall\, x \in IR \,/\, x \neq \pi + 2k\pi$

2 حسب السؤال السابق : $2-\sqrt{3} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

3 نعلم أن : $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$

منه : $\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)} = 1 + \left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 8 - 4\sqrt{3} = 4\left(2-\sqrt{3}\right)$

منه : $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{4\left(2-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ وبما أن : $\dfrac{\pi}{12} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ فإن: $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \geq 0$

منه : $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$ وبالتالي :

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\times\left(2-\sqrt{3}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\times\sqrt{2-\sqrt{3}}\times\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\end{aligned}}$$

يجب أن نتذكر أن : $a = 2\times\dfrac{a}{2}$ و أيضا أن لا ننسى القواعد الأساسية التي تجمع بين النسب المثلثية الثلاث.

تمرين 3 :

1

لكل $x\in IR$ ، نضع : $A(x)=\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$

لدينا :

$$A(x)=\cos x+\cos(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$A(x)=\cos x-\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\cos(x)=0$$

2

لكل $x\in IR$ ، نضع : $B(x)=\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$

لدينا :

$$B(x)=\sin x+\sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(x)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\cos(x)\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$B(x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)=0$$

3

لدينا لكل $x\in IR$:

$$\sqrt{2}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin(x).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\sqrt{2}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)\right)=\sin(x)+\cos(x)$$

من الأفضل استعمال قواعد النشر عوض التعميل كلما أمكن ذلك

تمرين 4 : $x+y+z=\pi$

1

لدينا: $\sin x.\cos y+\cos x.\sin y=\sin(x+y)=\sin(\pi-z)=\sin(z)$

2

لدينا :

$$\sin x+\sin y+\sin z=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi-z}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{z}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{z}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\left(\frac{z}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi-z}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\left(\frac{z}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\left(\frac{z}{2}\right)\times 2\cos\left(\frac{\frac{x-y}{2}+\frac{x+y}{2}}{4}\right)\times\cos\left(\frac{\frac{x-y}{2}-\frac{x+y}{2}}{2}\right)$$

$$\sin x+\sin y+\sin z=4\cos\left(\frac{z}{2}\right)\times 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{y}{2}\right)$$

3	لدينا : $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$ منه : $\tan x+\tan y=\tan(x+y)(1-\tan x\tan y)=\tan(\pi-z)(1-\tan x\tan y)=-\tan z(1-\tan x\tan y)$ $\tan x+\tan y=-\tan z+\tan x\tan y\tan z$ بالتالي : $\tan x+\tan y+\tan z=\tan x.\tan y.\tan z$	

قواعد التعميل ضرورية في كثير من التمارين، بالنسبة للظل التعميل يتم وفق الخاصية :
$\tan x+\tan y=\tan(x+y)(1-\tan x\tan y)$

تمرين 5 : ليكن x عددا حقيقيا ، حول إلى جداء التعابير التالية:

$A=\sin x+\sin 3x+2\sin 2x$ $=2\sin(2x)\cos(-x)+2\sin 2x$ $A=2\sin 2x(\cos x+1)$	$B=1-\cos 2x+\cos 3x-\cos 5x$ $=2\sin^2 x-2\cos 4x\sin(-x)$ $B=2\sin x(\sin x+\cos 4x)$
$C=1-\cos 2x-\sin 2x$ $=2\sin^2 x-2\sin x\cos x$ $C=2\sin x(\sin x-\cos x)$	$D=1+2\cos x+\cos 2x$ $=1+\cos 2x+2\cos x$ $=2\cos^2 x+2\cos x$ $D=2\cos x(\cos x+1)$
$E=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$ $=\cos 3x+\cos x+\cos 4x+\cos 2x$ $=2\cos(2x)\cos x+2\cos(3x)\cos x$ $=2\cos x(\cos(2x)+\cos(3x))$ $E=4\cos x\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$	$F=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x$ $=\sin 3x+\sin x+\sin 4x+\sin 2x$ $=2\sin(2x)\cos x+2\sin(3x)\cos x$ $=2\cos x(\sin(2x)+\sin(3x))$ $F=4\cos x\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

- تمرين لحفظ القواعد حيث من المفترض حفظها بإتقان و ليس تأجيل ذلك لحين اقتراب الفرض ، لأن استيعاب الخاصية جزء من الجواب.
- لم يطلب في التمرين التعميل إلى عدد معين من العوامل لذلك يمكن الاكتفاء بعاملين كما هو الشأن في A و B و C و D
- لكن من الأفضل خصوصا أثناء حل المعادلات التعميل بعدد عوامل أكبر كما هو الشأن في E و F.

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الحساب المثلثـــــي	سلسلة 3

تمرين 1 :

حل في IR المعادلات التالية :

$$\sin(2x)+\sin(-5x)=0$$
$$\sin 3x-\cos x=0$$
$$\sqrt{3}\tan x+1=0$$
$$\sin 2x-2\cos^2 x=0$$

تمرين 2 :

حل في IR المعادلات التالية :

$$\sin(x)+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}$$
$$\sin x-\cos x=-1$$
$$\frac{\cos x}{\sqrt{3}}-\sin x=2$$

تمرين 3 :

حل في IR المعادلات التالية :

$$2\sin^2 x+3\cos x=3$$
$$\frac{\sin x}{2+\cos x}=\frac{\cos x}{2+\sin x}$$
$$\tan x=\sin 2x$$
$$\cos 2x-7\sin x=4$$
$$\sin 5x-\sin 3x=\cos 6x+\cos 2x$$
$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=3$$
$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=\cos x$$

تمرين 4 :

1) بين أن : $\forall(a,b)\in IR^2 \quad \cos(a+b)\sin(a-b)=\sin a\cos a-\sin b\cos b$

2) حل في IR المعادلة : $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4}$

تمرين 5 : نعتبر المعادلة : $(E): \quad \sqrt{3}\sin(x)+\cos x=1$

1) حل في IR المعادلة (E) .

2) تحقق أن العدد : $x_k=\pi+2k\pi \quad / k\in Z$ ليس حلا للمعادلة (E) .

3) نضع $t=\tan\frac{x}{2}$ ، بين أن : $t^2-\sqrt{3}t=0$

4) استنتج من جديد حلول المعادلة : (E)

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الحساب المثلثـــــي حلول مقترحة	سلسلة 3

تمرين 1 :

$$\sin(2x)+\sin(-5x)=0 \Leftrightarrow \sin(2x)=\sin(5x)$$

لدينا : $\sin(2x)+\sin(-5x)=0 \Leftrightarrow 2x=5x+2k\pi \,/\, k\in Z \;\; ou \;\; 2x=\pi-5x+2k\pi \,/\, k\in Z$

$$\sin(2x)+\sin(-5x)=0 \Leftrightarrow -3x=2k\pi \,/\, k\in Z \;\; ou \;\; 7x=(2k+1)\pi \,/\, k\in Z$$

بالتالي : $\boxed{S=\left\{-\frac{2k}{3}\pi \,/\, k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{(2k+1)\pi}{7} \,/\, k\in Z\right\}}$: أو أيضا $\boxed{S=\left\{\frac{2k}{3}\pi \,/\, k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{(2k+1)\pi}{7} \,/\, k\in Z\right\}}$

يمكن أحيانا تبسيط تعبير مجموعة الحلول (أعلاه : $-k\in Z \Leftrightarrow k\in Z$)

$$\sin 3x-\cos x=0 \Leftrightarrow \sin 3x=\cos x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\cos(x)$$

$$\sin 3x-\cos x=0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-3x=x+2k\pi \,/\, k\in Z \;\; ou \;\; \frac{\pi}{2}-3x=-x+2k\pi \,/\, k\in Z$$

$$\sin 3x-\cos x=0 \Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{2}-2k\pi \,/\, k\in Z \;\; ou \;\; 2x=\frac{\pi}{2}-2k\pi \,/\, k\in Z$$

$$\sin 3x-\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}-\frac{k\pi}{2} \,/\, k\in Z \;\; ou \;\; x=\frac{\pi}{4}-k\pi \,/\, k\in Z$$

بالتالي : $\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{8}-\frac{k\pi}{2} \,/\, k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}-k\pi \,/\, k\in Z\right\}}$: أو أيضا $\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \,/\, k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi \,/\, k\in Z\right\}}$

مجموعة صلاحية المعادلة هي : $D=IR-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in Z\right\}$

لدينا في هذه المجموعة : $\sqrt{3}\tan x+1=0 \Leftrightarrow \tan x=\tan\left(\frac{-\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{6}+k\pi \,/\, k\in Z$

بالتالي : $\boxed{S=\left\{\frac{-\pi}{6}+k\pi \,/\, k\in Z\right\}\cap D=\left\{\frac{-\pi}{6}+k\pi \,/\, k\in Z\right\}}$

$$\sin 2x-2\cos^2 x=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$$

$$\sin 2x-2\cos^2 x=0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x-\cos x)=0$$

$$\sin 2x-2\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \;\; ou \;\; \cos(x)=\sin(x)$$

$$\sin 2x-2\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \;\; ou \;\; \cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\sin 2x-2\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \left(x=\frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in Z\right) ou \left(\frac{\pi}{2}-x=x+2k\pi \,/\, k\in Z\right) ou \left(\frac{\pi}{2}-x=-x+2k\pi \,/\, k\in Z\right)$$

$$\sin 2x-2\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \left(x=\frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in Z\right) ou \left(2x=\frac{\pi}{2}-2k\pi \,/\, k\in Z\right) ou \left(\frac{\pi}{2}=2k\pi \,/\, k\in Z\right)$$

$$\sin 2x-2\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \left(x=\frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in Z\right) ou \left(x=\frac{\pi}{4}-k\pi \,/\, k\in Z\right) ou \left(k=\frac{1}{4} \,/\, k\in Z\right)$$

$$\sin 2x-2\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \left(x=\frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in Z\right) ou \left(x=\frac{\pi}{4}+k\pi \,/\, k\in Z\right)$$

بالتالي : $\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi \,/\, k\in Z\right\}}$

نذكر بالقواعد:

$\cos a=\cos b \Leftrightarrow a=b+2k\pi \quad ou \quad a=-b+2k\pi \quad / k\in Z$

$\cos a=1 \Leftrightarrow a=2k\pi \ / k\in Z \quad ; \quad \cos a=-1 \Leftrightarrow a=\pi+2k\pi \ / k\in Z \ ; \ \cos a=0 \Leftrightarrow a=\frac{\pi}{2}+k\pi \ / k\in Z$

$\sin a=\sin b \Leftrightarrow a=b+2k\pi \ / k\in Z \quad ou \quad a=\pi-b+2k\pi \ / k\in Z$

$\sin a=1 \Leftrightarrow a=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ / k\in Z \quad ; \quad \sin a=-1 \Leftrightarrow a=\frac{-\pi}{2}+2k\pi \ / k\in Z \ ; \ \sin a=0 \Leftrightarrow a=k\pi \ / k\in Z$

$\tan a=\tan b \Leftrightarrow a=b+k\pi \ / k\in Z$

تمرين 2 :

لدينا :

$$\sin(x)+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(x)+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(x)+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin(x)+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \ / k\in Z \quad ou \quad x-\frac{\pi}{6}=\frac{-\pi}{6}+2k\pi \ / k\in Z$$

$$\sin(x)+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ / k\in Z \quad ou \quad x=2k\pi \ / k\in Z$$

بالتالي : $\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi \ / k\in Z\right\}\cup\{2k\pi \ / k\in Z\}}$

لدينا :

$$\sin x-\cos x=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x-\cos x=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x-\cos x=-1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x-\cos x=-1 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x-\cos x=-1 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \ / k\in Z \quad ou \quad x+\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{4}+2k\pi \ / k\in Z$$

$$\sin x-\cos x=-1 \Leftrightarrow x=2k\pi \ / k\in Z \quad ou \quad x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi \ / k\in Z$$

بالتالي : $\boxed{S=\left\{\frac{-\pi}{2}+2k\pi \ / k\in Z\right\}\cup\{2k\pi \ / k\in Z\}}$

لدينا :

$$\frac{\cos x}{\sqrt{3}}-\sin x=2 \Leftrightarrow \cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sqrt{3}$$

$$\frac{\cos x}{\sqrt{3}}-\sin x=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\sqrt{3}$$

$$\frac{\cos x}{\sqrt{3}}-\sin x=2 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x=\sqrt{3}$$

$$\frac{\cos x}{\sqrt{3}}-\sin x=2 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

بما أن $\sqrt{3}>1$ فإن : $\boxed{S=\phi}$

تمرين 3 :

لدينا : $2\sin^2 x+3\cos x=3 \Leftrightarrow 2\left(1-\cos^2 x\right)+3\cos x=3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

نضع : $t=\cos x$ منه : $2t^2-3t+1=0$ ، $\Delta=9-8=1$ منه : $t=\frac{3+1}{4}=1$ أو $t=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

منه : $\cos x=1$ أو $\cos=\frac{1}{2}$ ، بالتالي : $\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\,/\,k\in Z\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,/\,k\in Z\right\}\cup\{2k\pi\,/\,k\in Z\}}$

بما أن $2+\sin x\geq 1>0$ و $2+\cos x\geq 1>0$ فمجموعة صلاحية المعادلة هي : IR

$$\frac{\sin x}{2+\cos x}=\frac{\cos x}{2+\sin x} \Leftrightarrow 2\sin x+\sin^2 x=2\cos x+\cos^2 x$$

$$\frac{\sin x}{2+\cos x}=\frac{\cos x}{2+\sin x} \Leftrightarrow 2(\sin x-\cos x)+\sin^2 x-\cos^2 x=0$$

$$\frac{\sin x}{2+\cos x}=\frac{\cos x}{2+\sin x} \Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(2+\sin x+\cos x)=0$$

$$\frac{\sin x}{2+\cos x}=\frac{\cos x}{2+\sin x} \Leftrightarrow \cos x=\sin x \quad ou \quad \sin x+\cos x=-2$$

$$\frac{\sin x}{2+\cos x}=\frac{\cos x}{2+\sin x} \Leftrightarrow \cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \quad ou \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{-2}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sin x}{2+\cos x}=\frac{\cos x}{2+\sin x} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi\,/\,k\in Z \;ou\; x=\frac{-\pi}{2}+x+2k\pi\,/\,k\in Z \\ ou\;\; \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x=-\sqrt{2}\end{array}$$

$$\frac{\sin x}{2+\cos x}=\frac{\cos x}{2+\sin x} \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\,/\,k\in Z \;ou\; \frac{\pi}{2}=2k\pi\,/\,k\in Z \;\; ou \;\; \underbrace{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}}_{impossible,car\,-\sqrt{2}<-1}$$

الآن لدينا :

$$\frac{\sin x}{2+\cos x}=\frac{\cos x}{2+\sin x} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\,/\,k\in Z \;ou\; \underbrace{k=\frac{1}{4}/k\in Z}_{impossible,car\,\frac{1}{4}\notin Z}$$

بالتالي : $\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\,/\,k\in Z\right\}}$

مجموعة صلاحية المعادلة هي : $D=IR-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in Z\right\}$

لدينا في هذه المجموعة :

$$\tan x=\sin 2x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=2\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin x=2\sin x\cos^2 x \Leftrightarrow \sin x\left(1-2\cos^2 x\right)=0$$

$$\tan x=\sin 2x \Leftrightarrow \sin x=0 \quad ou \quad \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; ou \;\; \cos x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

بالتالي:

$$\boxed{S=\{k\pi\,/\,k\in Z\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi\,/\,k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{-\pi}{4}+2k\pi\,/\,k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{4}+2k\pi\,/\,k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{-3\pi}{4}+2k\pi\,/\,k\in Z\right\}}$$

$$\tan x=\sin 2x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=2\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin x=2\sin x\cos^2 x \Leftrightarrow \sin x\left(1-2\cos^2 x\right)=0$$

أو أيضا :

$$\tan x=\sin 2x \Leftrightarrow -\sin x\cos(2x)=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \quad ou \quad \cos 2x=0$$

$$\tan x=\sin 2x \Leftrightarrow x=k\pi / k\in Z \quad ou \quad 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in Z$$

$$\tan x=\sin 2x \Leftrightarrow x=k\pi / k\in Z \quad ou \quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} / k\in Z$$

بالتالي : $\boxed{S=\{k\pi / k\in Z\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} / k\in Z\right\}}$

رغم أنه يبدو اختلاف حلي الطريقتين إلا أنهما في الحقيقة يمثلان نفس المجموعة

الطريقة الثانية أفضل لكنها تتطلب ملاحظة بعض الصيغ المثلثية الهامة : $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

لدينا : $\cos 2x-7\sin x=4 \Leftrightarrow 1-2\sin^2 x-7\sin x-4=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x+7\sin x+3=0$

نضع : $t=\sin x$ فنجد: $2t^2+7t+3=0$ ، $\Delta=49-24=25$ منه : $t=\frac{-7+5}{4}=\frac{-1}{2}$ أو $t=\frac{-7-5}{4}=-3$

منه : $\cos x=-3$ (غير ممكن لأن $-3<-1$) أو $\cos=\frac{-1}{2}$

بالتالي : $\boxed{S=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi / k\in Z\right\}\cup\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi / k\in Z\right\}}$

لدينا :

$$\sin 5x-\sin 3x=\cos 6x+\cos 2x \Leftrightarrow 2\cos(4x)\sin(x)=2\cos(4x)\cos(2x)$$

$$\sin 5x-\sin 3x=\cos 6x+\cos 2x \Leftrightarrow \cos(4x)(\sin(x)-\cos(2x))=0$$

$$\sin 5x-\sin 3x=\cos 6x+\cos 2x \Leftrightarrow (\cos 4x=0)\ ou\ (\cos 2x=\sin x)$$

$$\sin 5x-\sin 3x=\cos 6x+\cos 2x \Leftrightarrow (4x=2k\pi / k\in Z)\ ou\ \left(\cos 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$$

$$\sin 5x-\sin 3x=\cos 6x+\cos 2x \Leftrightarrow \left(x=\frac{k\pi}{2} / k\in Z\right)\ ou\ \left(2x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi / k\in Z\right)\ ou\ \left(2x=\frac{-\pi}{2}+x+2k\pi / k\in Z\right)$$

$$\sin 5x-\sin 3x=\cos 6x+\cos 2x \Leftrightarrow \left(x=\frac{k\pi}{2} / k\in Z\right)\ ou\ \left(x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} / k\in Z\right)\ ou\ \left(x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi / k\in Z\right)$$

بالتالي : $\boxed{S=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi / k\in Z\right\}\cup\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi / k\in Z\right\}}$

لدينا :

$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=3 \Leftrightarrow 1-\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=3$$

$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=3 \Leftrightarrow \cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=-2$$

$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=-1$$

$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=3 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos 2x-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin 2x=-1$$

$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=3 \Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$$

$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=3 \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=\pi+2k\pi \,/\, k\in Z$$

$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi \,/\, k\in Z$$

بالتالي : $\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi \,/\, k\in Z\right\}}$

لدينا :

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=\cos x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x+\sin x$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=\cos x \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=\cos x \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=\cos x \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=\cos x \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=x+\frac{\pi}{4}+2k\pi \,/\, k\in Z \;\; ou \;\; x-\frac{\pi}{3}=\pi-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi \,/\, k\in Z$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=\cos x \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{12}=2k\pi \,/\, k\in Z \;\; ou \;\; 2x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi \,/\, k\in Z$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=\cos x \Leftrightarrow k=\frac{7}{24} \,/\, k\in Z \;\; ou \;\; x=\frac{13\pi}{24}+k\pi \,/\, k\in Z$$

بالتالي : $\boxed{S=\left\{\frac{13\pi}{24}+k\pi \,/\, k\in Z\right\}}$

تمرين 4 :

1 لدينا لكل $(a,b)\in IR^2$ ، نضع : $A=\cos(a+b)\sin(a-b)$

$$A=(\cos a\,\cos b-\sin a\,\sin b)(\sin a\,\cos b-\cos a\,\sin b)$$

$$=\cos a\,\cos b\sin a\,\cos b-\cos a\,\cos b\,\cos a\,\sin b-\sin a\,\sin b\sin a\,\cos b+\sin a\,\sin b\,\cos a\,\sin b$$

$$=\sin a\,\cos a\,\cos^2 b-\sin b\,\cos b\,\cos^2 a-\sin b\,\cos b\,\sin^2 a+\sin a\,\cos a\,\sin^2 b$$

$$=\sin a\,\cos a(\cos^2 b+\sin^2 b)-\sin b\,\cos b(\cos^2 a+\sin^2 a)$$

$$A=\sin a\,\cos a-\sin b\,\cos b$$

2 لدينا حسب السؤال السابق :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4}$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{4}$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ /\ k\in Z \quad ou \quad 2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ /\ k\in Z$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi\ /\ k\in Z \quad ou \quad x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\ /\ k\in Z$$

بالتالي: $\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi\ /\ k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{12}+k\pi\ /\ k\in Z\right\}}$

تمرين5 : نعتبر المعادلة : $(E):\ \sqrt{3}\sin(x)+\cos x=1$

1

لدينا :

$$(E) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)+\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2}$$

$$(E) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$(E) \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$(E) \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in Z \quad ou \quad x-\frac{\pi}{3}=\frac{-\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in Z$$

$$(E) \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in Z \quad ou \quad x=2k\pi\ /\ k\in Z$$

بالتالي: $\boxed{S=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in Z\right\}\cup\{2k\pi\ /\ k\in Z\}}$

2

لدينا :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x_k)+\frac{1}{2}\cos(x_k)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\pi+2k\pi)+\frac{1}{2}\cos(\pi+2k\pi)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\pi)+\frac{1}{2}\cos(\pi)=\frac{-1}{2}$$

إذن $x_k=\pi+2k\pi$ ليس حلا للمعادلة (E) .

3

بما أن أي حل لمعادلة يحقق : $x\neq\pi+2k\pi$ فإن : $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ لكل $k\in Z$

إذن يمكننا أن نضع : $t=\tan\frac{x}{2}$ ، لدينا الآن : $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

منه :

$$(E) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1}{2}\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1}{2}$$

$$(E) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}t+1-t^2=1+t^2$$

$$(E) \Leftrightarrow 2t^2-2\sqrt{3}t=0$$

$$(E) \Leftrightarrow t^2-\sqrt{3}t=0$$

4	الآن لدينا : $t=0$ أو $t=\sqrt{3}$ منه : $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=0$ أو $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$ منه : $\frac{x}{2}=k\pi\ /\ k\in Z$ أو $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+k\pi\ /\ k\in Z$ منه : $x=2k\pi\ /\ k\in Z$ أو $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in Z$ بالتالي : $\boxed{S=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in Z\right\}\cup\left\{2k\pi\ /\ k\in Z\right\}}$	

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الحساب المثلثـــي	سلسلة 4

تمرين 1 :

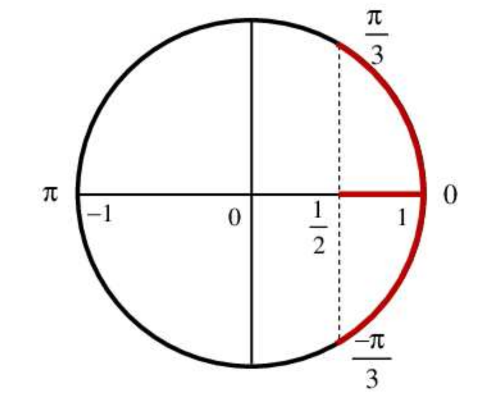
حل في IR المتراجحات التالية : $2\cos x \geq 1$ ، $\sqrt{2}\cos x + 1 < 0$ ، $3\tan x > \sqrt{3}$

تمرين 2 :

حل في $[-\pi, \pi]$ المتراجحات التالية : $2\cos x + 1 > 0$ ، $2\cos 2x < \sqrt{2}$ ، $\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < 1$

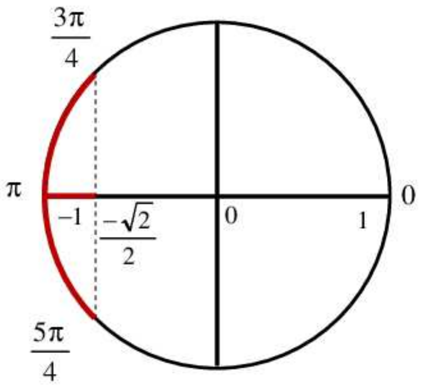
$\sin x + \cos x \leq 1$ ، $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(2\cos x + 1) < 0$ ، $2\cos^2 x > 1$ ، $2\sin^2 x + 3\cos x > 3$

تمرين 1 :



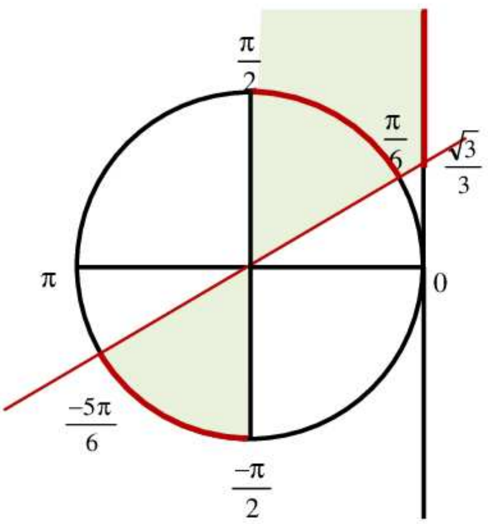
$2\cos x \geq 1$ **تعني** : $\cos x \geq \frac{1}{2}$

منه : $\boxed{S = \bigcup_{k\in Z}\left[\frac{-\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]}$



$\sqrt{2}\cos x + 1 < 0$ **تعني** : $\cos x < \frac{-\sqrt{2}}{2}$

منه : $\boxed{S = \bigcup_{k\in Z}\left]\frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right[}$



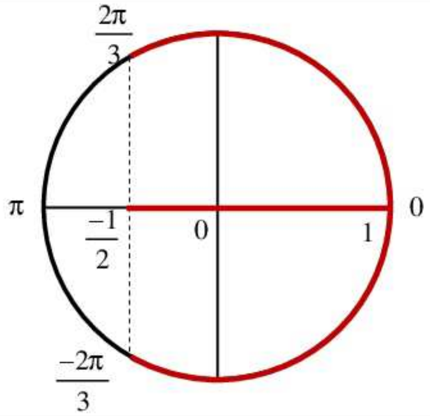
$3\tan x > \sqrt{3}$ **تعني** : $3\tan x > \sqrt{3}$

منه : $\boxed{S = \bigcup_{k\in Z}\left]\frac{\pi}{6} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[}$

- **الكتابة** $\bigcup_{k\in Z}[a + k\pi ; b + k\pi]$ **تعني اتحاد مجالات، حيث كل قيمة لـ k تحدد مجالا**
- حل متراجحات مثلثية يعتمد بالأساس على الدائرة المثلثية
- من الضروري اختيار الأفاصيل المنحنية a و b في نفس المجال الذي وسعه 2π حيث $a < b$

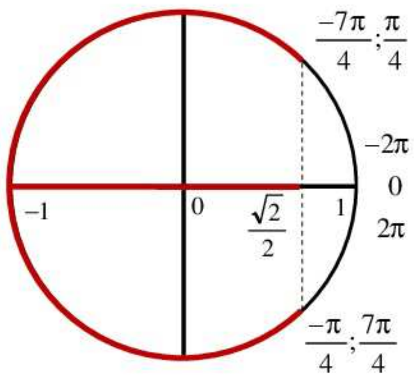
(مثلا في السؤال الثاني لا يصح أن نكتب : $S = \bigcup_{k\in Z}\left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi\right]$ ولا $S = \bigcup_{k\in Z}\left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{13\pi}{4} + 2k\pi\right]$)

تمرين 2 :



$2\cos x+1>0$ تعني : $\cos x \geq \frac{-1}{2}$

منه : $\boxed{S=\left[\frac{-2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]}$



$2\cos 2x<\sqrt{2}$ تعني : $\cos 2x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

نضع : $X=2x$ ، بما أن $x\in]-\pi;\pi]$ فإن : $X\in]-2\pi;2\pi]$

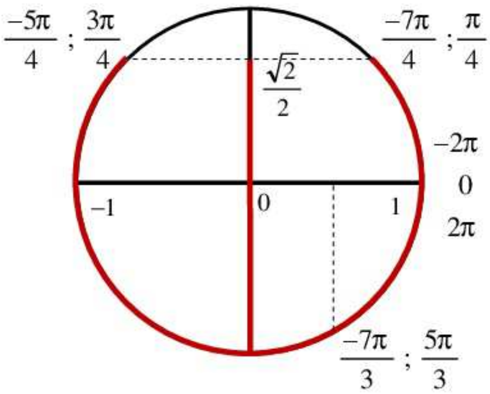
إذن : $X\in\left]\frac{-7\pi}{4};\frac{-\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right[$

يعني : $x\in\left]\frac{-7\pi}{8};\frac{-\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{\pi}{8};\frac{7\pi}{8}\right[$

بالتالي : $\boxed{S=\left]\frac{-7\pi}{8};\frac{-\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{\pi}{8};\frac{7\pi}{8}\right[}$

لاحظ أن مجال البحث عن الحلول في الدائرة المثلثية ليس بالضرورة هو مجال حل المعادلة المحدد في السؤال

لفهم طريقة إيجاد الحل لاحظ التقسيم $]-2\pi;2\pi]=]-2\pi;0]\cup]0;2\pi]$



$\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)<1$ تعني : $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$

نضع : $X=2x-\frac{\pi}{3}$ ، بما أن : $x\in]-\pi;\pi]$ فإن : $X\in\left]\frac{-7\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]$

إذن : $X\in\left]\frac{-7\pi}{3};\frac{-7\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{-5\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{3}\right[$

إذن $2x\in\left]-2\pi;\frac{-17\pi}{12}\right[\cup\left]\frac{-11\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right[\cup\left]\frac{13\pi}{12};2\pi\right[$

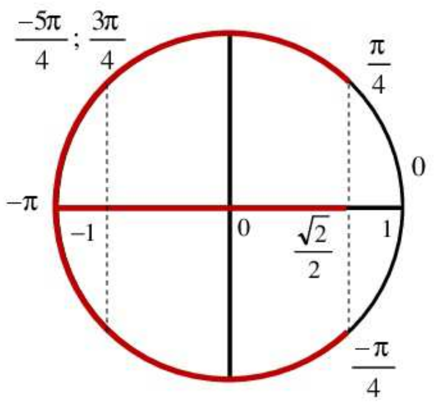
منه : $x\in\left]-\pi;\frac{-17\pi}{24}\right[\cup\left]\frac{-11\pi}{24};\frac{7\pi}{24}\right[\cup\left]\frac{13\pi}{24};\pi\right[$

بالتالي : $\boxed{S=\left]-\pi;\frac{-17\pi}{24}\right[\cup\left]\frac{-11\pi}{24};\frac{7\pi}{24}\right[\cup\left]\frac{13\pi}{24};\pi\right[}$

ستلاحظ صعوبة استخراج الحلول كلما كبرت سعة المجال ، فمثلا لو كانت المعادلة $\sin\left(10x-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$

لكان المجال $\left]\frac{-31\pi}{3};\frac{29\pi}{3}\right]$ ، و إذ ذاك سيكون من الصعب جدا تتبع مجالات الحل في الدائرة المثلثية، لذلك يستحسن حينئذ اللجوء

لطريقة تعتمد على التأطير ، لكننا لم ندرجها لكونها تتطلب شرحا بالصوت و الصورة



$\sin x+\cos x\le 1$ تعني : $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)\le 1$

يعني : $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، نضع $X=x-\frac{\pi}{4}$ بما أن : $x\in\left]-\pi;\pi\right]$

فإن : $X\in\left]\frac{-5\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$

إذن : $X\in\left]\frac{-5\pi}{4};\frac{-\pi}{4}\right]\cup\left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$

منه : $x\in\left]-\pi;0\right]\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ بالتالي : $\boxed{S=\left]-\pi;0\right]\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]}$

$\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)(2\cos x+1)<0$ تعني : $\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)<0$ أي : $\left(\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\left(\cos x-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)<0$

في المجال $\left]-\pi;\pi\right]$ و باستعمال الدائرة المثلثية نستنتج جدول الإشارات التالي :

x	$-\pi$		$\frac{-2\pi}{3}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$\sin x-\frac{1}{2}$		-		-	0	+		+	0	-	
$\cos x+\frac{1}{2}$		-	0	+		+	0	-		-	
$\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

بالتالي : $\boxed{S=\left]\frac{-2\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right[}$

$2\cos^2 x>1$ تعني : $\cos^2 x>\frac{1}{2}$

تعني : $\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$ أي : $\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos x-\cos\frac{3\pi}{4}\right)>0$

في المجال $\left]-\pi;\pi\right]$ و باستعمال الدائرة المثلثية نستنتج جدول الإشارات التالي :

x	$-\pi$		$\frac{-3\pi}{4}$		$\frac{-\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}$		-		-	0	+	0	-		-	
$\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}$		-	0	+		+		+	0	-	
$\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

بالتالي : $\boxed{S=\left]-\pi;\frac{-3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{2\pi}{4};\pi\right[}$

تعني : $2\sin^2 x+3\cos x>3$ تعني : $2(1-\cos^2 x)+3\cos x-3>0$: $-2\cos^2 x+3\cos x-1>0$

تعني : $2\cos^2 x-3\cos x+1<0$

باعتبار الحدودية $P(x)=2x^2-3x+1$: $\Delta=9-8=1$ ، منه : $x_1=\dfrac{3+1}{4}=1$ و $x_2=\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{1}{2}$

منه: $P(x)=2(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

إذن : $2\cos^2 x-3\cos x+1<0$ تعني : $2(\cos x-1)\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)<0$ تعني : $(\cos x-\cos 0)\left(\cos x-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)<0$

في المجال $]-\pi;\pi]$ و باستعمال الدائرة المثلثية نستنتج جدول الإشارات التالي :

x	$-\pi$		$\dfrac{-\pi}{3}$		0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$\cos x-1$		-		-	0	-		-	
$\cos x-\dfrac{1}{2}$		-	0	+		+	0	-	
$(\cos x-1)\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)$		+	0	-	0	-	0	+	

بالتالي : $\boxed{S=\left]\dfrac{-\pi}{3};0\right[\cup\left]0\,;\dfrac{\pi}{3}\right[}$

حل متراجحات مثلثية يتطلب تركيزا كبيرا جدا، حيث الإلمام بالمجالات و النسب المثلثية الهامة و الأفاصيل المنحنية الرئيسية و غير الرئيسية يعد المفتاح الأساسي لذلك.