السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليـــــــــات	سلسلة 1

تمرين 1 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \;\; ; n \geq 0 \end{cases}$

- برهن بالترجع أن : $u_n = 3 \times 2^n + 1 \quad \forall n \in IN$

تمرين 2 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \;\; ; n \geq 0 \end{cases}$

1) احسب u_2
2) بين أن $u_n > 2 \quad \forall n \in IN$
3) ادرس رتابة (u_n)

تمرين 3 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{4}{u_n}\right) \;\; ; n \geq 0 \end{cases}$

1) بين بالترجع أن (u_n) مصغورة بـ 2
2) ادرس رتابة (u_n)

تمرين 4 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \;\; ; n \geq 0 \end{cases}$

1) بين أن (u_n) مصغورة بـ 3
2) ادرس رتابة (u_n)

تمرين 5 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \;\; ; n \geq 0 \end{cases}$

- بين أن : $u_n \geq \sqrt{n} \quad \forall n \in IN$

تمرين 6 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} \quad \forall n \in IN^*$

1) بين أن : $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} \quad \forall k \in IN^*$
2) استنتج أن (u_n) مكبورة

تمرين 7 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in IN^*$

1) بين بالترجع أن : $u_n \geq \sqrt{n} \quad \forall n \in IN^*$
2) استنتج أن (u_n) غير مكبورة

تمرين 8 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \ldots + \dfrac{1}{n\times(n+1)} \quad \forall n \in IN^*$

1) تحقق أن : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \quad \forall n \in IN^*$
2) احسب u_n بدلالة n

سلسلة 1	المتتاليـــــــــات حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \ ; n \geq 0 \end{cases}$

لنبين بالترجع أن : $u_n = 3\times 2^n + 1 \quad \forall n \in IN$

- بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 4$ و $3\times 2^0 + 1 = 3+1 = 4$ منه : $u_0 = 3\times 2^0 + 1$
- نفترض أن : $u_n = 3\times 2^n + 1$ و نبين أن : $u_{n+1} = 3\times 2^{n+1} + 1$

لدينا : $u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2(3\times 2^n + 1) - 1 = 2\times 3\times 2^n + 2 - 1 = 3\times 2^{n+1} + 1$

تمرين 2 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \ ; n \geq 0 \end{cases}$

1	$u_1 = 3u_0 - 4$ $u_1 = 15 - 4 = 11$	$u_2 = 3u_1 - 4$ $u_2 = 33 - 4 = 29$

2

لنبين بالترجع أن $u_n > 2 \quad \forall n \in IN$

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 5$ منه : $u_0 > 2$

نفترض أن : $u_n > 2$ ونبين أن : $u_{n+1} > 2$

لدينا : $u_n > 2 \Rightarrow 3u_n > 6 \Rightarrow 3u_n - 4 > 6 - 4 \Rightarrow u_{n+1} > 2$

3 لدينا : $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 4 - u_n = 2u_n - 4 = 2(u_n - 2) > 0 \quad \forall n \in IN$ ، إذن (u_n) تزايدية

لاحظ أننا استعملنا السؤال الثاني لدراسة رتابة المتتالية و هذا الأمر يكون ضروريا في أغلب المتتاليات.

تمرين 3 : $u_0 = 3 \ ; \ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right)$

1

لنبين بالترجع أن $u_n \geq 2 \quad \forall n \in IN$

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 3$ منه : $u_0 \geq 2$

نفترض أن : $u_n \geq 2$ و نبين أن : $u_{n+1} \geq 2$

لدينا : $u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right) - 2 = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n} - 4\right) = \frac{1}{2}\frac{u_n^2 + 4 - 4u_n}{u_n} = \frac{(u_n - 2)^2}{2u_n} \geq 0$ منه : $u_{n+1} \geq 2$

بالتالي : $u_n \geq 2 \quad \forall n \in IN$ أي أن u_n مصغورة بـ 2

لاحظ أننا استعملنا طريقة مغايرة للطريقة السابقة ، لأن التأطير المباشر لا يؤدي للنتيجة المطلوبة.

2

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right) - u_n = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + 4 - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{4 - u_n^2}{2u_n} = \frac{(2 + u_n)(2 - u_n)}{2u_n}$

و بما أن $u_n \geq 2$ (حسب السؤال السابق) فإن $2 - u_n \leq 0$ و $2 + u_n > 0$ و $2u_n > 0$ ومنه : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

و بالتالي : (u_n) تناقصية

تمرين 4 : $u_0 = 4 \ ; \ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2}$

1

لنبين بالترجع أن $u_n \geq 3 \ \forall n \in IN$

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 4$ منه : $u_0 \geq 3$

نفترض أن : $u_n \geq 3$ و نبين أن : $u_{n+1} \geq 3$

لدينا :

$$u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3 - 3(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3 - 3u_n - 6}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2}$$

$$u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 6u_n + 3u_n - 9}{u_n + 2} = \frac{2u_n(u - 3) + 3(u_n - 3)}{u_n + 2} = \frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2}$$

وبما أن $u_n \geq 3$ (حسب الافتراض) فإن $u_n - 3 \geq 0$ و $2u_n + 3 > 0$ و $u_n + 2 > 0$

إذن $u_{n+1} - 3 \geq 0$ ومنه : $u_{n+1} \geq 3$

يمكن استعمال المحددة لتعميل التعبير $2u_n^2 - 3u_n - 9$

2

لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{u_n^2 - 2u_n - 3}{u_n + 2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + u_n - 3u_n - 3}{u_n + 2} = \frac{u_n(u_n + 1) - 3(u_n + 1)}{u_n + 2} = \frac{(u_n + 1)(u_n - 3)}{u_n + 2}$$

بما أن $u_n \geq 3$ فإن : $u_n - 3 \geq 0$ و $u_n + 1 > 0$ و $u_n + 2 > 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \geq 0$

وبالتالي : (u_n) تزايدية

لاحظ أن تقنية استعمال الفرق جد مهمة، لكن يمكن البرهان مباشرة في بعض الحالات كما هو الشأن في التمرين 1

تمرين 5 : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$; $u_0 = 1$

- بالنسبة لـ $n = 0$ $u_0 = 1 \geq \sqrt{0}$
- نفترض أن : $u_n \geq \sqrt{n}$ ونبين أن $u_{n+1} \geq \sqrt{n+1}$

لدينا : $u_n \geq \sqrt{n} \Rightarrow u_n^2 \geq n \Rightarrow (u_{n+1})^2 = u_n^2 + 2 + \dfrac{1}{u_n^2} \geq n + 2 \Rightarrow u_{n+1} \geq \sqrt{n+2} \geq \sqrt{n+1}$

تقنية الفرق أو حتى التأطير المباشر كلاهما غير مجديان، لذلك نحاول التأطير عبر المرور بالمربع.

فكرة التمرين بسيطة لكنها تغني عن أسطر كثيرة في حال اتباع طريقة أخرى.

تمرين 6 : $\forall n \in IN^* \quad u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2}$

1

لدينا : $\forall k \in IN^* \quad \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{k-(k-1)}{k(k-1)} - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{k(k-1)} - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{k-(k-1)}{k^2(k-1)} = \dfrac{1}{k^2(k-1)} > 0$

بالتالي : $\forall k \in IN^* \quad \dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$

2

لدينا حسب السؤال السابق : $\begin{cases} \dfrac{1}{2^2} < \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{3^2} < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} \\ \dots\dots < \dots\dots \\ \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} \end{cases}$ و بجمع هذه المتفاوتات طرفا بطرف نجد: $u_n - 1 < 1 - \dfrac{1}{n}$

منه : $u_n < 2 - \dfrac{1}{n}$ منه : $u_n < 2$ بالتالي (u_n) مكبورة بالعدد 2

الكتابة $u_n < 2 - \dfrac{1}{n}$ لا تكفي للقول أن u_n مكبورة لأن $2 - \dfrac{1}{n}$ ليس تعبيرا ثابتا بل مرتبطا بـ n

تمرين 7 : $\forall n \in IN^* \quad u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

1

- بالنسبة لـ $n = 1$: $u_1 = 1 \geq \sqrt{1}$
- نفترض أن $u_n \geq \sqrt{n}$ و نبين أن $u_{n+1} \geq \sqrt{n+1}$

لدينا : $u_n \geq \sqrt{n} \Rightarrow u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{\sqrt{n^2+n} + 1}{\sqrt{n+1}} \geq \dfrac{\sqrt{n^2} + 1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$

الأصح أعلاه استعمال الرمز $\geq$ عوض $=$، لكننا استعملناه فقط لنبين حالات التساوي و حالات التأطير

	يمكن حل التمرين دون ترجع، لكن الهدف هو إتقان البرهان بالترجع
2	نفترض أن (u_n) مكبورة إذن : $\exists M \in IR \ / \ \forall n \in IN^* \ u_n \leq M$ منه : $\forall n \in IN^* \ \sqrt{n} \leq M$ منه : $\forall n \in IN^* \ M^2 \geq n$ و هذا غير ممكن لأن مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية غير محدودة، بالتالي (u_n) غير مكبورة

تمرين 8 : $u_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \ldots + \dfrac{1}{n\times(n+1)}$

1	لدينا : $\forall n \in IN^* \ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$
2	$\forall n \in IN^* \ u_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\times(n+1)} = \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$ تمرين بسيط، لكنه لم يكن ليكون سهلا لولا السؤال الأول

تمرين 1 : نعتبر المتتاليتين العددية (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \quad ; n \geq 0 \end{cases}$ و $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$

1) بين أن (v_n) متتالية حسابية محددا أساسها وحدها الأول

2) استنتج حساب u_n بدلالة n

3) احسب $S = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

تمرين 2 :

نعتبر المتتاليتين العددية (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 , u_1 = 4 \\ u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n \quad ; n \geq 0 \end{cases}$ و $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية.

2) بين أن : $v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = u_n - u_0$

3) استنتج الحد العام للمتتالية (u_n)

4) احسب $S = v_0^2 + v_1^2 + ... + v_n^2$

تمرين 3 :

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ v_0 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} ; \ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$

1) نعتبر المتتالية : $w_n = v_n - u_n$

أ) بين أن (w_n) متتالية هندسية محددا أساسها

ب) أوجد الحد العام للمتتالية (w_n)

2) نعتبر المتتالية : $t_n = 3u_n + 2v_n$

أ) بين أن (t_n) متتالية ثابتة.

ب) أوجد الحد العام للمتتالية (t_n)

3) استنتج مما سبق تعبير كل من (u_n) و (v_n) بدلالة n .

تمرين 4 :

نعتبر المتتاليتين العددية (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \ ; \ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} \ ; n \geq 0 \end{cases}$

و المتتاليتين : $w_n = v_n - u_n$ و $t_n = 3u_n + 10\,v_n$

1) بين أن (w_n) متتالية هندسية ثم أوجد حدها العام.

2) بين أن (t_n) متتالية ثابتة ثم أوجد حدها العام.

3) أوجد الحد العام لكل من (u_n) و (v_n) .

تمرين5 : ليكن a و b عددين حقيقين حيث : $0 < a < b$

نعتبر المتتاليتين العددية (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \ ;n \geq 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \ ;n \geq 0 \end{cases}$

1) بين أن $\forall n \in IN \ \ 0 < u_n < v_n$

2) ادرس رتابة (u_n) و (v_n)

3) بين أن : $\forall n \in IN \ \ u_n v_n = ab$

4) استنتج أن : $\forall n \in IN \ \ u_n < \sqrt{ab} < v_n$

5) نضع : $\forall n \in IN \ \ w_n = v_n - u_n$.

أ) بين أن : $\forall n \in IN \ \ 0 < w_{n+1} < \frac{1}{2} w_n$

ب) ثم استنتج أن : $\forall n \in IN^* \ \ 0 < w_n \leq (b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

6) نأخذ: $a = 1$ و $b = 2$ ، أوجد قيمة n لكي تكون u_n قيمة مقربة بتفريط و v_n قيمة مقربة بإفراط للعدد $\sqrt{2}$ إلى 10^{-4}

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليـــــــات حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \quad ; n \geq 0 \end{cases}$ ، $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$

1

لدينا :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\dfrac{9}{6-u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\dfrac{9-3(6-u_n)}{6-u_n}} - \frac{1}{u_n-3}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{6-u_n}{9-18+3u_n} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{6-u_n}{3(-3+u_n)} - \frac{3}{3(u_n-3)} = \frac{6-u_n-3}{3(u_n-3)} = \frac{3-u_n}{3(u_n-3)} = \frac{-1}{3}$$

بالتالي (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \dfrac{-1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 3} = \dfrac{1}{-4} = \dfrac{-1}{4}$

2

لدينا حسب السؤال السابق : $v_n = v_0 + r\,n = \dfrac{-1}{4} - \dfrac{1}{3}n = \dfrac{-4n-3}{12}$

لدينا: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$ منه : $u_n - 3 = \dfrac{1}{v_n}$ منه : $\boxed{u_n = \dfrac{1}{v_n} + 3 = \dfrac{-12}{4n+3} + 3 = \dfrac{-12+12n+9}{4n+3} = \dfrac{12n-3}{4n+3}}$

3

$$\boxed{S = v_0 + v_2 + \ldots + v_{n-1} = \frac{v_0 + v_{n-1}}{2} \times n = \frac{\dfrac{-1}{4} + \dfrac{-4(n-1)-3}{12}}{2} \times n = \frac{\dfrac{-3-4n+4-3}{12}}{2} \times n = \frac{-n(2n+1)}{12}}$$

تمرين 2 : $\begin{cases} u_0 = 1 \,, u_1 = 4 \\ u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n \quad ; n \geq 0 \end{cases}$ ، $v_n = u_{n+1} - u_n$

1

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = u_1 - u_0 = 4 - 1 = 3$

2

لدينا $v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n = u_n - u_0 \quad \forall n \in IN$

3

لدينا حسب السؤال السابق : $u_n - u_0 = v_0 + v_1 + \ldots + v_{u-1} = v_0 \times \dfrac{1-q^n}{1-q} = 3\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}} = 6\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$

إذن : $\boxed{u_n = 6\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) + u_0 = 6 - \dfrac{6}{2^n} + 1 = 7 - \dfrac{6}{2^n}}$

4

نعتبر المتتالية $w_n = v_n^2$ ، لدينا : $w_{n+1} = v_{n+1}^2 = \left(\dfrac{1}{2}v_n\right)^2 = \dfrac{1}{4}v_n^2 = \dfrac{1}{4}w_n \quad \forall n \in IN$

إذن : $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$ و حدها الأول : $w_0 = 9$

منه: $S = v_0^2 + v_1^2 + \ldots + v_n^2 = w_0 + w_1 + \ldots + w_n = w_0 \dfrac{1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{36}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}\right) = 12 - \dfrac{3}{4^n}$

لحساب مجموع متتالية غالبا ما نحدد طبيعتها أولا كالسؤال 4 أوقد نستعمل تبسيطا كالسؤال 2.

تمرين 3 :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ v_0 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} ; \ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \ ; \ n \geq 0 \end{cases} \ ، \quad w_n = v_n - u_n \quad ، \quad t_n = 3u_n + 2v_n$$

1

أ) لدينا :
$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{4u_n + 2v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \frac{u_n - v_n}{6} = \frac{w_n}{6}$$

إذن $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{6}$ و حدها الأول $w_0 = 1 - 7 = -6$

ب) $w_n = w_0 \, q^n = -6 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^n = \dfrac{-1}{6^{n-1}}$

2

أ) لدينا : $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 2v_{n+1} = 2u_n + v_n + u_n + v_n = 3u_n + 2v_n = t_n$ ، بالتالي : $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية ثابتة

ب) بما أن $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية ثابتة: $\forall n \in IN \quad t_n = t_0 = 3u_0 + 2v_0 = 3 + 14 = 17$

3

لدينا حسب ما سبق :
$$\begin{cases} u_n - v_n = w_n \\ 3u_n + 2v_n = t_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_n - 2v_n = 2w_n \\ 3u_n - 3v_n = 3w_n \\ 3u_n + 2v_n = t_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5u_n = 2w_n + t_n \\ 5v_n = t_n - 3w_n \end{cases}$$

بالتالي:
$$\boxed{\forall n \in IN \quad \begin{cases} u_n = \dfrac{2w_n + t_n}{5} = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{-2}{6^{n-1}} + 17\right) \\ v_n = \dfrac{t_n - 3w_n}{5} = \dfrac{1}{5}\left(17 + \dfrac{3}{6^{n-1}}\right) \end{cases}}$$

يمكنك التحقق من صحة النتيجة بتعويض الصيغ المحصل عليها (يمكنك أيضا حساب بعض القيم الخاصة للتحقق من صحة النتائج مثل u_0 و v_0)

تمرين 4 :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \ ; \ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} \ ; n \geq 0 \end{cases} \ ، \quad w_n = v_n - u_n \quad ، \quad t_n = 3u_n + 10\, v_n$$

1

لدينا :
$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 12v_n - 5u_n - 10v_n}{15} = \frac{2v_n - 2u_n}{15} = \frac{2(v_n - u_n)}{15} = \frac{2}{15} w_{n+1}$$

إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \dfrac{2}{15}}$ و حدها الأول $\boxed{w_0 = v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1}$

منه : $\boxed{\forall \, n \in IN \quad w_n = w_0 \times q^n = \left(\dfrac{2}{15}\right)^n}$

2

لدينا : $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 10\,v_{n+1} = u_n + 2\,v_n + 2(u_n + 4v_n) = u_n + 2\,v_n + 2\,u_n + 8\,v_n = 3u_n + 10\,v_n = t_n$

إذن (w_n) متتالية ثابتة، منه : $\boxed{\forall n \in IN \quad t_n = t_0 = 3u_0 + 10\,v_0 = 3 + 20 = 23}$

3

لدينا حسب ما سبق : $\begin{cases} v_n - u_n = w_n \\ 3u_n + 10\,v_n = t_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 3u_n + 10(w_n + u_n) = t_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 3u_n + 10\,w_n + 10u_n = t_n \end{cases}$

منه : $\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 13u_n = t_n - 10\,w_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + \dfrac{t_n - 10\,w_n}{13} \\ u_n = \dfrac{t_n - 10\,w_n}{13} \end{cases}$ منه :
$$\begin{cases} v_n = \dfrac{t_n + 3\,w_n}{13} = \dfrac{23 + 3\left(\dfrac{2}{15}\right)^n}{13} \\ u_n = \dfrac{t_n - 10\,w_n}{13} = \dfrac{23 - 10\left(\dfrac{2}{15}\right)^n}{13} \end{cases}$$

تمرين5 : $0<a<b$ ، $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n+v_n} \; ; n \geq 0 \end{cases}$ ، $\begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \; ; n \geq 0 \end{cases}$ ، $\forall n \in IN \quad w_n = v_n - u_n$

1

سنستعمل برهانا بالترجع.

بالنسبة لـ $n=0$ ، العبارة صحيحة لأن : $u_0 = a$ و $v_0 = b$ و $0<a<b$

نفترض أن : $0<u_n<v_n$ ونبين أن : $0<u_{n+1}<v_{n+1}$

لدينا : $0<u_n<v_n \Rightarrow \begin{cases} 2u_n v_n > 0 \\ u_n + v_n > 0 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} > 0$

و لدينا :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n+v_n} = \frac{(u_n+v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n+v_n)} = \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 - 4u_n v_n}{2(u_n+v_n)} = \frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} > 0$$

إذن : $v_{n+1} > u_{n+1} > 0$ ، بالتالي : $\forall n \in IN \quad 0<u_n<v_n$

2

لدينا لكل $n \in IN$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n v_n}{u_n+v_n} - u_n = u_n\left(\dfrac{2v_n}{u_n+v_n} - 1\right) = u_n \dfrac{v_n - u_n}{u_n+v_n} > 0$

و $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n+v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} < 0$ ، إذن : (u_n) تزايدية قطعا و (v_n) تناقصية قطعا.

3

سنستعمل برهانا بالترجع.

بالنسبة لـ $n=0$ ، العبارة صحيحة لأن : $u_0 v_0 = ab$.

نفترض أن : $u_n v_n = ab$ ، لدينا: $u_{n+1} v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n+v_n} \times \dfrac{u_n+v_n}{2} = u_n v_n = ab$ ،

بالتالي : $\forall n \in IN \quad u_n v_n = ab$

4

لدينا لكل $n \in IN$: $0<u_n<v_n \Rightarrow \begin{cases} 0 < u_n^2 < v_n u_n \\ 0 < u_n v_n < v_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < u_n^2 < ab \\ 0 < ab < v_n^2 \end{cases} \Rightarrow u_n < \sqrt{ab} < v_n$

5

أ) لدينا حسب السؤال 1 $v_n > u_n$ ، إذن : $w_n = v_n - u_n > 0$

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n-u_n)^2}{2(u_n+v_n)} = \frac{(v_n-u_n)}{2} \times \frac{v_n-u_n}{u_n+v_n} = \frac{w_n}{2}\left(\frac{v_n+u_n-2u_n}{u_n+v_n}\right) = \frac{w_n}{2}\left(1 - 2\frac{u_n}{u_n+v_n}\right) < \frac{w_n}{2}$$

بالتالي : $\forall n \in IN \quad 0 < w_{n+1} < \dfrac{1}{2} w_n$

ب) لدينا حسب السؤال السابق لكل $n \in IN$:

$$\begin{cases} 0 < w_1 < \dfrac{1}{2} w_0 \\ 0 < w_2 < \dfrac{1}{2} w_1 \\ .... \\ 0 < w_n < \dfrac{1}{2} w_{n-1} \end{cases}$$

بضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف و بعد الاختزال نجد: $0 < w_n \leq w_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ أي $0 < w_n \leq (b-a)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

	بأخذ $a=1$ و $b=2$ نستنتج أن : $u_n<\sqrt{2}<v_n \quad \forall n\in IN$ و $0<w_n\leq\frac{1}{2^{n-1}}$ لكي تكون u_n قيمة مقربة بتفريط و v_n قيمة مقربة بإفراط للعدد $\sqrt{2}$ إلى 10^{-4}، يجب أن يكون $v_n-u_n=w_n\leq10^{-4}$ ولتحقق ذلك يكفي أن يكون: $\frac{1}{2^{n-1}}\leq10^{-4}$ أي $2^{n-1}\geq10000$ أي $2^n\geq20000$ وباستعمال آلة حاسبة وحساب قيم 2^n من أجل قيم صحيحة طبيعية (1،2،...)سنجد أنه يكفي أن يكون $n\geq15$	6
	في السؤال 3 يمكن إثبات أن المتتالية $x_n=u_nv_n$ ثابتة ثم الاستنتاج. في السؤال 5- ب يمكن استعمال برهان بالترجع في السؤال الأخير إيجاد قيم العدد n يمكنه إيجاده باستعمال دالة اللوغاريتم النبيري أو اللوغاريتمي (التي تدرس في السنة الثانية بكالوريا) كما يلي $2^n\geq20000$ تكافئ $\log_{10}(2^{n-1})\geq\log_{10}(10000)$ تكافئ $(n-1)\log_{10}(2)\geq4$ تكافئ $n\geq\frac{4}{\log_{10}(2)}+1$ ، و باستعمال آلة حاسبة نجد: $\frac{4}{\log_{10}(2)}+1\approx14,2$ وهذا يعني أن $n\geq15$	