السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	مبادئ في المنطق	سلسلة 1

تمرين 1 : حدد حقيقة العبارات التالية :

1) $\forall x \in IR \quad x^2 \geq x$

2) $\exists n \in IN \quad 2n+5=20$

3) $\forall x \in IR \ \forall y \in IR \quad |x+y|=|x|+|y|$

4) $\exists x \in IR \quad x^2-x+1=0$

5) $\forall x \in IR \quad x^2>1 \Rightarrow x>1$

6) $\exists n \in IN \quad n^2=7$

7) $\forall n \in IN \quad \sqrt{9n^2+6n+1} \in IN$

8) $\forall m \in IR \quad \exists x \in IR \quad x^2+mx+m-1=0$

تمرين 2 :

1) بين أن : $\forall x \in IR \ \exists y \in IR \quad x^2+xy-y^2=0$

2) بين أن : $\forall y \in IR \quad \left(y+y^3 \geq 2 \Rightarrow y \geq 1\right)$

3) بين أن : $\forall (n,m) \in \left(IN^*\right)^2 \quad (2n+1)^{2014} \neq (2m+2)^{2015}$

4) بين أن : $\forall x \in IR \quad |\sin(x)\cos(x)| \leq \frac{1}{2}$

5) بين أن : $\forall (x,y) \in IR \quad \left(|x|<1 \ et \ |y|<1 \ \Rightarrow \left|\frac{x-y}{1-xy}\right|<1\right)$

6) حدد نفي جميع العبارات السابقة

تمرين 3 : لتكن p و q عبارتان.

بين أن العبارات : $(p \text{ و } q) \Rightarrow p$ و $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ و $(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg(p \ et \ q)$ قوانين منطقية

تمرين 4 :

1) بين أن $\sqrt{2} \notin Q$

2) استنتج أن $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin Q$

تمرين 5 : لتكن a و b و c أعدادا حقيقية.

نعتبر المعادلات التالية:

$(H) \quad x^2-2ax+bc=0$

$(J) \quad x^2-2bx+ac=0$

$(G) \quad x^2-2cx+ab=0$

بين أن إحدى هذه المعادلات تقبل على الأقل حلا حقيقيا.

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	مبادئ في المنطق حل مقترح	سلسلة 1

تمرين 1 : حدد حقيقة العبارات التالية :

1) $\forall x \in I\!R \quad x^2 \geq x$

بأخذ : $x = \frac{1}{2}$ سنجد أن $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$ ما يعني خطأ العبارة

2) $\exists n \in I\!N \quad 2n+5=20$

العبارة المقترحة تكافئ: $\exists n \in I\!N \quad n = \frac{15}{2} = 7,5$ مما يبين خطأ العبارة

3) $\forall x \in I\!R \; \forall y \in I\!R \quad |x+y| = |x|+|y|$

بأخذ $x=7$ و $y=-7$ سنجد أن : $0 = 7+7$ وهذا غير صحيح، إذن هذه العبارة غير صحيحة.

4) $\exists x \in I\!R \quad x^2 - x + 1 = 0$

بحساب المحددة $\Delta = 1-4 = -3 < 0$ نستنتج أن المعادلة $x^2 - x + 1 = 0$ لا حل لها في $I\!R$ مما يعني عدم صحة العبارة.

5) $\forall x \in I\!R \quad x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$

بأخذ $x=-3$ سنجد أن $x^2 = 9 > 1$ لكن مع ذلك $x \leq 1$ مما يعني أيضا عدم صحة هذه العبارة.

6) $\exists n \in I\!N \quad n^2 = 7$

بما أن : $4 < 7 < 9$ (أي أن 7 محصور بين مربعين كاملين متتابعين) فلا يمكن أن يكون مربعا كاملا إذن العبارة غير صحيحة

7) $\forall n \in I\!N \quad \sqrt{9n^2+6n+1} \in I\!N$

بما أن : $\forall n \in I\!N \quad \sqrt{9n^2+6n+1} = \sqrt{(3n+1)^2} = |3n+1| = 3n+1 \in I\!N$ فهذه العبارة صحيحة

8) $\forall m \in I\!R \quad \exists x \in I\!R \quad x^2 + mx + m - 1 = 0$

محددة الحدودية $x^2 + mx + m - 1 = 0$ (باعتبار x المجهول و m بارامتر)

هي : $\Delta = m^2 - 4(m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \geq 0$ ، مما يعني أنه مهما تكن قيمة البارامتر m فهذه المعادلة لها على الأقل حل في $I\!R$، مما يؤكد صحة العبارة.

البرهان على صحة عبارة من عدمه أمر غير يسير، إذ يتطلب أحيانا لإيجاد الأمثلة المضادة المناسبة لنفي صحة العبارة أو استعمال قواعد سابقة للبرهان على صحتها، الأمر يتطلب الاطلاع و إنجاز تمارين متنوعة.

تمرين 2 :

1) بين أن : $\forall x \in I\!R \; \exists y \in I\!R \quad x^2 + xy - y^2 = 0$

محددة الحدودية $x^2 + xy - y^2 = 0$ (باعتبار x المجهول و y بارامتر) هي: $\Delta = y^2 + 4y^2 = 5y^2 \geq 0$

مما يعني أنه مهما تكن قيمة العدد y فهذه المعادلة لها على الأقل حل في $I\!R$، وهذا ينهي البرهان.

2) بين أن : $\forall y \in I\!R \quad (y + y^3 \geq 2 \Rightarrow y \geq 1)$

لدينا : $\forall y \in I\!R \quad y < 1 \Rightarrow \begin{cases} y^3 < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow y + y^3 < 2$ بالتالي : $\forall y \in I\!R \quad (y + y^3 \geq 2 \Rightarrow y \geq 1)$

هنا لم نقم بنفي العبارة ، بل استعملنا الاستلزام المضاد للعكس، والذي هو عبارة تكافئ العبارة الأصلية

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

3) بين أن : $\forall(n,m)\in\left(IN^*\right)^2 \quad (2n+1)^{2014}\neq(2m+2)^{2015}$

بما أن $(2n+1)^{2014}$ عدد فردي (لأنه عبارة عن قوة أساسها فردي) و $(2m+2)^{2015}$ عدد زوجي (الأساس زوجي) فالعبارة المقترحة صحيحة.

4) بين أن : $\forall x\in IR \quad |\sin(x)\cos(x)|\leq\frac{1}{2}$

لدينا :

$$\frac{1}{2}-|\sin(x)\cos(x)|=\frac{1}{2}\left(1-2|\sin(x)\cos(x)|\right)=\frac{1}{2}\left(\sin^2(x)+\cos^2(x)-2|\sin(x)\cos(x)|\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(|\sin(x)|-|\cos(x)|\right)^2\geq 0$$

إذن : $\forall x\in IR \quad |\sin(x)\cos(x)|\leq\frac{1}{2}$

5) بين أن : $\forall(x,y)\in IR \quad \left(|x|<1 \ et\ |y|<1 \ \Rightarrow\left|\frac{x-y}{1-xy}\right|<1\right)$

لدينا من جهة : $1-\frac{x-y}{1-xy}=\frac{1-xy-x+y}{1-xy}=\frac{1-x-xy+y}{1-xy}=\frac{1-x+y(1-x)}{1-xy}=\frac{(1-x)(1+y)}{1-xy}$

و من جهة أخرى : $-1-\frac{x-y}{1-xy}=\frac{-1+xy-x+y}{1-xy}=\frac{-1-x+xy+y}{1-xy}=\frac{-(1+x)+y(1+x)}{1-xy}=\frac{(1+x)(y-1)}{1-xy}$

و بما أن :

$$\begin{cases}|x|<1\\|y|<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1<x<1\\-1<y<1\\|xy|<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\\1+y>0\\y-1<0\\-1<xy<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\\1+y>0\\y-1<0\\-1<-xy<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\\1+y>0\\y-1<0\\0<1-xy\end{cases}$$

فإن :

$$\begin{cases}|x|<1\\|y|<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-\frac{x-y}{1-xy}>0\\-1-\frac{x-y}{1-xy}<0\end{cases}\Rightarrow -1<\frac{x-y}{1-xy}<1\Rightarrow\left|1-\frac{x-y}{1-xy}\right|<1$$

محاولة التأطير فقط في هذا التمرين لن تجدي نفعا، مما يعلمنا أهمية قاعدة المقارنة الأساسية (تحديد إشارة الفرق)

6) حدد نفي جميع العبارات السابقة

نفي العبارة 1 : $\exists x\in IR \quad x^2<x$

نفي العبارة 2 : $\exists y\in IR \quad \left(y+y^3\geq 2 \text{ و } y<1\right)$

نفي العبارة 3 : $\exists(n,m)\in\left(IN^*\right)^2 \quad (2n+1)^{2014}=(2m+2)^{2015}$

نفي العبارة 4 : $\exists x\in IR \quad |\sin(x)\cos(x)|>\frac{1}{2}$

نفي العبارة 5 : $\exists(x,y)\in IR \quad \left(|x|<1 \ et\ |y|<1 \text{ و } \left|\frac{x-y}{1-xy}\right|\geq 1\right)$

تمرين 3 : p و q عبارتان.

1) لدينا :

$$\left((p \text{ و } q) \Rightarrow p\right) \Leftrightarrow \left(\neg(p \text{ et } q) \text{ ou } p\right) \Leftrightarrow \left((\neg p \text{ ou } \neg q) \text{ ou } p\right) \Leftrightarrow \left(\neg p \text{ ou } \neg q \text{ ou } p\right) \Leftrightarrow \left(\neg q \text{ ou } (\neg p \text{ ou } p)\right)$$

و بما أن العبارة $(\neg p \text{ ou } p)$ دائما صحيحة فإن العبارة $(\neg q \text{ ou } (\neg p \text{ ou } p))$ دائما صحيحة

بالتالي العبارة $(p \text{ و } q) \Rightarrow p$ دائما صحيحة، إذن فهي قانون منطقي

2) لدينا : $(p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (\neg p \text{ ou } (p \text{ ou } q)) \Leftrightarrow ((\neg p \text{ ou } p) \text{ ou } q)$

و بما أن العبارة $(\neg p \text{ ou } p)$ دائما صحيحة فإن العبارة $((\neg p \text{ ou } p) \text{ ou } q)$ دائما صحيحة

بالتالي العبارة $(p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q))$ دائما صحيحة، إذن فهي قانون منطقي

3) لدينا : $((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg(p \text{ et } q)) \Leftrightarrow (\neg(\neg p \text{ ou } \neg q) \text{ ou } \neg(p \text{ et } q)) \Leftrightarrow ((p \text{ et } q) \text{ ou } \neg(p \text{ et } q))$

و بما أن العبارة $((p \text{ et } q) \text{ ou } \neg(p \text{ et } q))$ دائما صحيحة فإن العبارة $((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg(p \text{ et } q))$ دائما صحيحة

إذن فهي قانون منطقي

- القانون المنطقي هو عبارة تكون دائما صحيحة مهما كانت حقيقة العبارات التي تتضمنها.
- يمكن استعمال جدول الحقيقة للبرهان على هذه القوانين المنطقية، لكن يفضل استعمال قوانين منطقية معروفة عوضا عن ذلك ربحا لوقت، مثل : $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \text{ ou } b)$

تمرين 4 :

1) لنبين أن $\sqrt{2} \notin Q$ ، سنستعمل برهانا بالخلف، نفترض أن : $\sqrt{2} \in Q$ إذن يوجد $a \in IN$ و $b \in IN^*$ حيث a و b أوليان فيما بينهما و $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

منه: $\sqrt{2}\, b = a$ منه : $2\, b^2 = a^2$ إذن : a^2 عدد زوجي إذن a عدد زوجي منه: $a = 2k \;/\; k \in IN$

منه: $2\, b^2 = 4k^2$ منه : $b^2 = 2k^2$ منه b^2 عدد زوجي إذن b عدد زوجي

إذن a و b عددان زوجيان، وهذا يناقض كونهما أوليين فيما بينهما. بالتالي: $\boxed{\sqrt{2} \notin Q}$

- هذا السؤال يعتبر معلومة أساسية يستحسن الالمام ببرهانها.

2) استنتج أن $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin Q$

نضع : $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ نفترض أن : $x \in Q$

إذن: $\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \in Q$ منه: $x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{2} \in Q$ منه: $\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \in Q$

و هذا غير ممكن حسب السؤال الأول. بالتالي: $\boxed{\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin Q}$

- تذكر أن مجموع و فرق و جذاء و خارج عددين جذريين هو عدد جذري (طبعا المقام يجب أن يكون غير منعدم في حالة الخارج)

تمرين 5 :

نفترض أن جميع المعادلات : $\begin{cases} (H) & x^2-2ax+bc=0 \\ (J) & x^2-2bx+ac=0 \\ (G) & x^2-2cx+ab=0 \end{cases}$ لا تقبل أي حل حقيقي، إذن فمحدداتها جميعا سالبة

إذن: $\begin{cases} 4a^2-4bc<0 \\ 4b^2-4ac<0 \\ 4c^2-4ab<0 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} a^2<bc \\ b^2<ac \\ c^2<ab \end{cases}$ ، بضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف نجد : $a^2b^2c^2<a^2b^2c^2$

و هذا غير ممكن، بالتالي افتراضنا غير صحيح و هذا يتبث أن إحدى المعادلات تقبل على الأقل حلا حقيقيا

في التمرين السابق وجدنا تناقضا أما الآن فوجنا متفاوتة غير ممكنة، و يجب أن نعي الفرق بين التناقض و الاستحالة:
الاستحالة هي عبارة غير ممكنة مهما كان افتراضنا مثل أن نجد: $2015=2014$ ، لكن التناقض أن نجد عبارة قد تكون صحيحة لكنها عكس عبارة توجد بالافتراض مثل أن نفترض أن $a>0$ ثم نجد أن $a\leq 0$

سلسلة 2	مبادئ في المنطق	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : ليكن x و y عددين حقيقين

بين أن : $x+y=0 \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

تمرين 2 : بين أن : $\sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin Q \quad \forall n \in IN^*$

تمرين 3 : ليكن x عددا حقيقيا، نضع : $H(x)=x^8-x^5+x^2-x+1$

1) بين أن : $H(x)=x^5\left(x^3-1\right)+x^2-x+1$ و أن : $H(x)=x^2\left(x^6-x^3+1\right)+1-x$

2) استنتج أن : $H(x)>0 \quad \forall x \in IR$

تمرين 4 : حل في IR المتراجحة : $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$

تمرين 5 : a و b و c قياسات أضلاع مثلث. بين أن : $a+b+c=1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2<\frac{1}{2}$

تمرين 6 : بين بالترجع أن :

1) $n(n+1)(n+2)$ مضاعف للعدد 6 حيث $n \in IN$

2) $1+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in IN^*$

3) 9 يقسم العدد 4^n+6n-1 حيث $n \in IN$

4) $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1} \quad \forall n \in IN^*$

تمرين 7 : - مزيدا من التفكير -

1) ليكن a و b عددين حقيقين حيث $|a-b|<\varepsilon \quad \forall \varepsilon>0$ ، بين أن : $a=b$

2) ليكن $n \in IN$ ، بين أن : $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} \in IN$

3) $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \notin IN \quad \forall n \in IN^*$

تمرين 1 : ليكن x و y عددين حقيقين ، لنبين أن : $x+y=0 \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

1) لدينا من جهة :

$$x+y=0 \Rightarrow y=-x \Rightarrow \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=x^2+1-x^2=1$$

2) و من جهة أخرى :

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \Rightarrow \begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\times\left(-y+\sqrt{y^2+1}\right)=\left(-y+\sqrt{y^2+1}\right)\\ \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\times\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+\sqrt{x^2+1}=-y+\sqrt{y^2+1}\\ y+\sqrt{y^2+1}=-x+\sqrt{x^2+1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=-y-x+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}$$

$$\Rightarrow 2x+2y=0 \Rightarrow x+y=0$$

بالتالي : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \Leftrightarrow x+y=0$

استعمال التكافؤات فقط أمر جد صعب، لذلك نلجأ إلى استعمال استلزامين و نبدأ دائما بأسهلهما.

تمرين 2 : نفترض أن : $\exists n\in IN^* \quad \sqrt{\frac{n}{n+2}}\in Q$

إذن يوجد $(p,q)\in IN\times IN^*$ حيث : $\sqrt{\frac{n}{n+2}}=\frac{p}{q}$ و $p\wedge q=1$

$$\sqrt{\frac{n}{n+2}}=\frac{p}{q} \Rightarrow \frac{n}{n+2}=\frac{p^2}{q^2} \Rightarrow nq^2=np^2+2p^2 \Rightarrow n\left(q^2-p^2\right)=2p^2$$

إذن : $n\left(q^2-p^2\right)$ عدد زوجي

إذن أحد العددين q^2-p^2 أو n زوجي (لأنهما إن كانا معا فرديين فسيكون جذاؤهما فرديا)

- إذا كان q^2-p^2 زوجيا

فإن p و q سيكون لهما نفس الزوجية (فرديان معا أو زوجيان معا) (لأنه إن كانا مختلفا الزوجية فسيكون مربعاهما أيضا مختلفا الزوجية و بذلك يكون فرق مربعيهما عددا فرديا)

و بما أنهما أوليان فيما بينهما فلا يمكن أن يكونا زوجيان معا (لأنه سيكون 2 قاسما مشتركا لهما)

إذن سنستنتج أنهما فرديان معا.

إذن : $p=2a+1$ و $q=2b+1$ حيث $(a,b)\in IN^2$

$$n\left(q^2-p^2\right)=2p^2 \Rightarrow n\left(4b^2+4b+1-4a^2-4a-1\right)=2p^2 \Rightarrow 2n\left(b^2+b-a^2-a\right)=p^2$$

إذن p زوجي وهذا يناقض كونه فرديا

- إذا كان n زوجيا فإن $n=2m$ حيث $m\in IN^*$

إذن: $n\left(q^2-p^2\right)=2p^2 \Rightarrow m\left(q^2-p^2\right)=p^2 \Rightarrow m\left(q^2-p^2\right)=p^2-q^2+q^2 \Rightarrow \left(q^2-p^2\right)(m+1)=q^2$

من $m\left(q^2-p^2\right)=p^2$ و $\left(q^2-p^2\right)(m+1)=q^2$ نستنتج أن $\left(q^2-p^2\right)$ قاسم مشترك لـ p^2 و q^2

سنبرهن الآن أن : $p \wedge q = 1 \Rightarrow p^2 \wedge q^2 = 1$

إذا كان p و q أوليين فيما بينهما فإن تفكيكهما الأولي لا يحتوي على أي عدد أولي مشترك عندما نحسب مربعيهما فإننا لن نجد أيضا أي عدد أولي مشترك، مما يعني أنهما أوليان فيما بينهما.

الآن بما أن $p \wedge q = 1$ فإن: $p^2 \wedge q^2 = 1$ و بما أن $(q^2 - p^2)$ قاسم مشترك موجب لهما فإن: $q^2 - p^2 = 1$

منه: $(q+p)(q-p) = 1$ منه : $\begin{cases} q+p=1 \\ q-p=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2q=2 \\ 2p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=1 \\ p=0 \end{cases} \Rightarrow n(1-0)=0 \Rightarrow n=0$ وهذا يناقض $n \in IN^*$

في جميع الحالات نجد تناقضا، بالتالي افتراضنا غير صحيح، و منه: $\sqrt{\dfrac{n}{n+2}} \notin Q \quad \forall n \in IN^*$

تمرين صعب يتطلب الالمام بقواعد الحسابيات، يمكن حله بسهولة بالاعتماد على قواعد سيتم دراستها لاحقا في درس الحسابيات، لكنني آثرت إدراجه في هذه السلسلة لكونه يتضمن مجموعة من الأفكار يمكن استغلالها لحل تمارين مشابهة تعتمد في حلها على زوجية و فردية الأعداد الصحيحة الطبيعية و كذا الأعداد الأولية فيما بينها.

تمرين 3 : $H(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$

1) لدينا: $H(x) = x^5(x^3-1) + x^2 - x + 1$ و $H(x) = x^2(x^6 - x^3 + 1) + 1 - x$ (سؤال جد سهل)

2) لنبين أن : $\forall x \in IR \quad H(x) > 0$

- إذا كان $x \geq 1$ ، فإن: $x^5(x^3-1) \geq 0$ ، و $x^2 - x + 1 > 0$ (لأن: $\Delta = -3 < 0$)
  إذن: $H(x) = x^5(x^3-1) + x^2 - x + 1 > 0$
- إذا كان $x < 1$ ، فإن: $1 - x > 0$ ، و $x^6 - x^3 + 1 = (x^3)^2 - (x^3) + 1 > 0$ (لأن: $\Delta = -3 < 0$)
  إذن: $H(x) = x^2(x^6 - x^3 + 1) + 1 - x > 0$

في جميع الحلات نستنتج أن: $H(x) > 0$

البرهان بفصل الحالات مفيد جدا في وضعيات كثيرة خصوصا إذا استطعنا إيجاد الحالات المناسبة و استغلال معطيات كل حالة على حدة.

تمرين 4 : لنحل المتراجحة $(E): \quad \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$

مجموعة صلاحية المتراجحة هي: $D = \{x \in IR / x+1 \geq 0 \ et \ 3-x \geq 0\} = [-1;3]$

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 3-x > \frac{1}{4} + \sqrt{x+1} + x + 1$$

$$(E) \Leftrightarrow \frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{4} - 2x \geq 0 \\ \frac{49}{16} - 7x + 4x^2 > x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{8} \\ 4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0 \end{cases}$$

محددة الحدودية: $4x^2 - 8x + \dfrac{33}{16}$ هي: $\Delta = 64 - 33 = 31$ و جذراها هما: $x_1 = \dfrac{8+\sqrt{31}}{8}$ و $x_2 = \dfrac{8-\sqrt{31}}{8}$

و تكون موجبة خارج الجذرين. منه: $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{8} \\ x < \frac{8-\sqrt{31}}{8} < \frac{7}{8} \quad ou \quad x > \frac{8+\sqrt{31}}{8} > \frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x < \dfrac{8-\sqrt{31}}{8}$

بالتالي: $\boxed{S = \left[-1; \dfrac{8-\sqrt{31}}{8}\right[}$

أثناء حل المتراجحات يجب استعمال التكافؤ لأنه بعكس المعادلات التحقق من صحة النتائج أمر غير يسير لأن الحلول غالبا ما تكون مجالات، كما أنه يجب مراعات مجموعة الصلاحية (ندعوها في الدوال مجموعة التعريف).

تمرين 5 : a و b و c قياسات أضلاع مثلث. لنبين أن : $a+b+c=1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2<\frac{1}{2}$

لدينا a و b و c قياسات أضلاع مثلث إذن : $\begin{cases} a<b+c \\ b<a+c \\ c<a+b \end{cases}$ منه : $\begin{cases} a^2<ab+ac \\ b^2<ab+bc \\ c^2<ac+bc \end{cases}$

منه : $a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc)$

منه : $a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+c^2<a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

منه : $2(a^2+b^2+c^2)<(a+b+c)^2$ منه : $2(a^2+b^2+c^2)<1$ بالتالي : $a^2+b^2+c^2<\frac{1}{2}$

هذا التمرين يتضمن معلومتين أساسيتين يجهلهما كثير من التلاميذ، الأولى المتعلقة بأضلاع مثلث و الثانية المتطابقة الهامة : $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

تمرين 6 :

1) لنبين بالترجع أن : $n(n+1)(n+2)$ مضاعف للعدد 6 حيث $n\in IN$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن 0 مضاعف لـ 6
- نفترض أن $n(n+1)(n+2)$ مضاعف لـ 6 ، ولنبين أن $(n+1)(n+2)(n+3)$ مضاعف لـ 6

لدينا $n(n+1)(n+2)$ مضاعف لـ 6، إذن: $n(n+1)(n+2)=6a$ ح يث $a\in IN$

و منه: $(n+1)(n+2)(n+3)=(n+3)(n+1)(n+2)=n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)=6a+3(n+1)(n+2)$

وبما أن جذاء عددين متتابعين هو عدد زوجي فإن: $(n+1)(n+2)=2b$ حيث $b\in IN$

منه: $(n+1)(n+2)(n+3)=6a+6b=6(a+b)$ و حيث أن: $(a+b)\in IN$

فإن : $(n+1)(n+2)(n+3)$ مضاعف لـ 6

2) لنبين بالترجع أن : $1+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n\in IN^*$

- بالنسبة لـ $n=1$ العبارة صحيحة لأن $1^2=1=\frac{1\times2\times3}{6}$
- نفترض أن $1+4+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ولنبين أن $1+4+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

$$1+4+...+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}(n(2n+1)+6(n+1))$$

لدينا $=\frac{n+1}{6}(2n^2+n+6n+6)=\frac{(n+1)(2n^2+4n+3n+6)}{6}$ وهذا ينهي البرهان

$$=\frac{(n+1)(n+1)(2n(n+2)+3(n+2))}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

3) لنبين بالترجع أن : 9 يقسم العدد 4^n+6n-1 حيث $n\in IN$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن 9 بقسم $4^0+6\times0-1=0$
- نفترض أن 9 يقسم 4^n+6n-1 ، ولنبين أن 9 يقسم $4^{n+1}+6(n+1)-1$

لدينا 9 يقسم 4^n+6n-1 ، إذن: $4^n+6n-1=9a$ حيث $a\in IN$

$$4^{n+1}+6(n+1)-1=4(4^n)+6n+5=4(9a-6n+1)+6n+5$$

ومنه: $=36a-24n+4+6n+5=36a-18n+9$

$$=9(4a-2n+1)$$

وبما أن : $a\in IN$ و $n\in IN$ فإن: $(4a-2n+1)\in Z$ ، إذن 9 يقسم $4^{n+1}+6(n+1)-1$

4) لنبين بالترجع أن : $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ $\forall n\in IN^*$

- بالنسبة لـ $n=1$ العبارة صحيحة $\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1+1}$
- نفترض أن $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ ونبين أن : $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n\times(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}$$

لدينا : $$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}$$

$$=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

- مبدأ الترجع من أساسيات البرهان الرياضي كلما تعلق الأمر بالأعداد الصحيحة الطبيعية
- هذا المبدأ يكون هو الوسيلة الوحيدة للبرهان في كثير من الحالات
- هناك أنواع أخرى للترجع لا نستعملها إلا نادرا (في أولمبياد الرياضيات أو ربما في الفروض المنزلية) أذكر منها مبدأ **الترجع القوي** و **الترجع المزدوج**.
- أثناء الافتراض في الترجع نحذف المكمم الكوني لأننا بصدد التعامل مع حالة من حالات العبارة المراد البرهان على صحتها.

تمرين 7 :

1) a و b عددينان حقيقيان حيث $|a-b|<\varepsilon$ $\forall\varepsilon>0$ ، لنبين أن : $a=b$

لنفترض أن $a\neq b$ إذن $a-b\neq 0$ إذن : $|a-b|>0$ منه : $\frac{|a-b|}{2}>0$

الآن حسب المعطيات نأخذ: $\varepsilon=\frac{|a-b|}{2}$ فنجد : $|a-b|<\frac{|a-b|}{2}$ منه : $2|a-b|<|a-b|$ منه $|a-b|<0$

وهذا غير ممكن، بالتالي : $a=b$

2) ليكن $n\in IN$ ، لنبين أن : $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}\in IN$

لدينا :

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=n(n+3)(n+1)(n+2)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$$

$$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2$$

بالتالي : $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}=n^2+3n+1\in IN$

3) لنبين أن $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\notin IN$ $\forall n\in IN^*$

نفترض أن : $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\in IN$ $\exists n\in IN$ ، إذن : $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}=a$ حيث $a\in IN$

منه : $n+2\sqrt{n(n+1)}+n+1=a^2$ منه : $2\sqrt{n(n+1)}=a^2-2n-1$ نضع : $a^2-2n-1=b$ إذن : $2\sqrt{n(n+1)}=b$ و $b\in IN$ منه: $4n^2+4n=b^2$ منه : $4n^2+4n+1=b^2+1$ منه: $(2n+1)^2=b^2+1$ منه: $(2n+1)^2-b^2=1$ منه : $(2n+1+b)(2n+1-b)=1$ منه : $\begin{cases}2n+1+b=1\\2n+1-b=1\end{cases}$ منه : $4n+2=2$ منه $n=0$ وهذا يناقض $n\in IN^*$ بالتالي : $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\notin IN$ $\forall n\in IN^*$	