السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الإشتقــــاق	سلسلة 1

تمرين 1 : باستعمال التعريف ادرس اشتقاق الدالة f في النقطة x_0 في كل حالة مما يلي ثم اكتب معادلة المماس في هذه النقطة:

$$\begin{cases} f(x)=-x^2+3x+1 \\ x_0=-1 \end{cases} \quad ، \quad \begin{cases} f(x)=\dfrac{2x}{x-3} \\ x_0=2 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x)=\sqrt{2x+7} \\ x_0=1 \end{cases} \quad ، \quad \begin{cases} f(x)=\sin(5x) \\ x_0=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=\cos^2(x) \\ x_0=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad ، \quad \begin{cases} f(x)=\tan(2x) \\ x_0=\dfrac{\pi}{8} \end{cases} \quad ، \quad \begin{cases} f(x)=2\sqrt{x} \\ x_0=0 \end{cases}$$

تمرين 2 :

1) حدد الدالة التآلفية المماسة للدالة $\sqrt{1+x}$ في النقطة 0 ثم أعط تقريبا للعددين $\sqrt{1,0002}$ و $\sqrt{0,9996}$

2) بين أن $\dfrac{1}{1+x}\approx 1-x$ عندما يكون x قريبا من الصفر ثم أعط تقريبا للعدد $\dfrac{1}{1,015}$

3) أعط تقريبا للعدد $\sin 0,02$ ثم استنتج تقريبا للعدد $\cos 0,02$

تمرين 3 : ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة x_0 ثم حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (Cf) عند النقطة $M_0(x_0,f(x_0))$ في كل حالة مما يلي :

$$x_0=0 \quad \begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{|x|}\ ;x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases} \qquad\qquad x_0=0 \quad \begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}\ ;x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$$x_0=1 \quad \begin{cases} f(x)=x^3-4x\ ;x\leq 1 \\ f(x)=x^2-3x-1;x>1 \end{cases} \qquad\qquad x_0=0 \quad \begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x+1}\ ;x\geq 0 \\ f(x)=2x^2+4x+2\ ;\ x<0 \end{cases}$$

تمرين 4 : حدد مشتقات الدوال التالية (دون تحديد مجموعة التعريف):

$f(x)=-7x^3+13$	$f(x)=-5x^3+7x^2-x$	$f(x)=4\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$	$f(x)=\sin(x)+3\cos(x)$
$f(x)=x\sin(x)$	$f(x)=\dfrac{2x-3}{4x+1}$	$f(x)=\dfrac{2x^3+x+1}{x^2+1}$	$f(x)=(\sqrt{x}+1)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
$f(x)=\dfrac{3x+2}{5x-1}$	$f(x)=(x^2-3)(4x-5)$	$f(x)=-2x\sqrt{x}$	$f(x)=\sqrt{2-3x}$
$f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$	$f(x)=(2x+3)^7$	$f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$	$f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x}}$
$f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$	$f(x)=x(x^2+1)^2$	$f(x)=\sin^2 x+2\cos^2 x$	$f(x)=\tan 3x+4\sin\dfrac{x}{2}$
$f(x)=(\sin x+\cos x)\sin x$	$f(x)=\dfrac{\sin x-1}{\sin x+1}$	$f(x)=\sin x\cos 2x$	$f(x)=\dfrac{2+\cos x}{3-\cos x}$

Moutamadris.ma

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الإشتقـــاق حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 : في كل التمرين سنرمز بـ (Δ) لمعادلة المماس في x_0

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{-x^2+3x+1-(-3)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{-x^2+3x+4}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(-x+4)}{x+1}=\lim_{x\to-1}-x+4=5$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=-1$ و لدينا : $f'(-1)=5$ منه : $(\Delta)\colon y=5(x+1)-3$ أي $(\Delta)\colon y=5x+2$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{2x}{x-3}+4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{6x-12}{x-3}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{6(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{6}{x-3}=-6$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=2$ و لدينا : $f'(2)=-6$ منه : $(\Delta)\colon y=-6(x-2)-4$ أي $(\Delta)\colon y=-6x+8$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x+7-9}{(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2}{\sqrt{2x+7}+3}=\frac{1}{3}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=1$ و لدينا : $f'(1)=\frac{1}{3}$ منه : $(\Delta)\colon y=\frac{1}{3}(x-1)+3$ أي $(\Delta)\colon y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(5x)}{x}=5$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=0$ و لدينا : $f'(0)=5$ منه : $(\Delta)\colon y=5(x-0)+0$ أي $(\Delta)\colon y=5x$

$$\left(t=x-\frac{\pi}{2}\right)\quad\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(x)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{\cos^2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2(t)}{t}=\lim_{t\to0}\sin(t)\times\frac{\sin(t)}{t}=0\times1=0$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=\frac{\pi}{2}$ و لدينا : $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ منه : $(\Delta)\colon y=0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{8}\right)}{x-\frac{\pi}{8}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{\tan(2x)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{8}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\tan(2x)\times\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{x-\frac{\pi}{8}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{8}\right)}{x-\frac{\pi}{8}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}2\,\frac{\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}{2x-\frac{\pi}{4}}\times(1+\tan(2x))=2\times1\times2=4$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=\frac{\pi}{8}$ و لدينا : $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=4$ منه : $(\Delta)\colon y=4\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+1$ أي : $(\Delta)\colon y=4x+\frac{2-\pi}{2}$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{x}}=+\infty$ ، إذن f غير قابلة للاشتقاق في $x_0=0$ و لدينا : $(\Delta)\colon x=0$

- دراسة قابلية الاشتقاق تعني دراسة النهاية : $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ، في حالة كانت هذه النهاية عددا حقيقيا تكون معادلة المماس : $(\Delta)\colon\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- إذا كانت : $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ ورغم عدم قابلية الاشتقاق فمنحنى الدالة يقبل مماسا عموديا معادلته : $x=x_0$

Moutamadris.ma

تمرين 2 :

1 لدينا $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$ إذن الدالة : $f(x)=\sqrt{1+x}$ قابلة للاشتقاق في 0 و بذلك تكون الدالة التآلفية المماسة لها في النقطة 0 هي: $h(x)=\frac{1}{2}(x-0)+1=\frac{1}{2}x+1$

منه: $\sqrt{1,0002}=f(0,0002)\approx h(0,0002)\approx\frac{0,0002}{2}+1\approx0,0001+1\approx1,0001$

و : $\sqrt{0,9996}=f(-0,0004)\approx h(-0,0004)\approx\frac{-0,0004}{2}+1\approx-0,0002+1\approx0,9998$

2 لدينا : $\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-x}{1+x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{x+1}=-1$ إذن الدالة : $f(x)=\frac{1}{1+x}$ قابلة للاشتقاق في 0 و بذلك تكون الدالة التآلفية المماسة لها في النقطة 0 هي : $h(x)=-(x-0)+1=-x+1$

منه: $\frac{1}{1,015}=f(0,015)\approx-0,015+1\approx0,985$

3 لدينا : $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ إذن الدالة : $f(x)=\sin x$ قابلة للاشتقاق في 0 و بذلك تكون الدالة التآلفية المماسة لها في النقطة 0 هي : $h(x)=x$

منه: $\sin(0,02)=f(0,02)\approx0,02$ منه : $\cos 0,02=\sqrt{1-\sin^2(0,02)}\approx\sqrt{1-0,0004}\approx\sqrt{0,9996}\approx0,9998$

- ضمنيا في هذا السؤال وحدة القياس هي الراديان
- لاحظ أننا استعملنا بعض نتائج السؤال الأول في الاستنتاج

تمرين 3 : في كل التمرين سنرمز بـ (Δ) لمعادلة المماس في x_0

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{|x|}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to0}\frac{|x|^2}{|x|}=\lim_{x\to0}|x|=0$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=0$ و لدينا : $f'(0)=0$ منه : $(\Delta): y=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos x}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في $x_0=0$ و لدينا : $f'(0)=\frac{1}{2}$ منه : $(\Delta): y=\frac{1}{2}x$

لدينا : $$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x^3-4x+3}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}x^2+x-3=-1$$

و $$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}x-2=-1$$

بما أن -1 $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ فإن : f قابلة للاشتقاق في $x_0=1$

و لدينا : $f'(0)=-1$ منه : $(\Delta): y=-(x-1)-3$ أي $(\Delta): y=-x-2$

- صورة العدد 1 تم حسابها بالصيغة الأولى لأنها معرفة على مجال يحتوي على العدد 1

لدينا : $$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\frac{-x}{x+1}}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-1}{x+1}=-1$$

Moutamadris.ma

و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{2x^2+4x+1}{x}=-\infty$

إذن f غير قابلة للاشتقاق في $x_0=0$

في السنة الثانية بكالوريا دائما يسبق دراسة الاشتقاق في نقطة دراسة اتصالها في هذه النقطة، لكن مفهوم الاتصال لا يدس في هذه السنة، في المثال الأخير رغم أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty$ إلا أنه لا يوجد مماس عمودي بسبب عدم اتصال الدالة في الصفر.

تمرين 4 :

$f'(x)=(-5x^3+7x^2-x)'=-15x^2+14x-1$	$f'(x)=(-7x^3+13)'=-21x^2$
$f'(x)=(\sin(x)+3\cos(x))'=\cos(x)-3\sin(x)$	$f'(x)=\left(4\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)'=4\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$
$f'(x)=\left(\frac{2x-3}{4x+1}\right)'$ $f'(x)=\frac{(2x-3)'(4x+1)-(2x-3)(4x+1)'}{(4x+1)^2}$ $f'(x)=\frac{2(4x+1)-4(2x-3)}{(4x+1)^2}=\frac{14}{(4x+1)^2}$	$f'(x)=(x\sin(x))'$ $f'(x)=x'\sin(x)+x(\sin(x))'=\sin x+x\cos x$
$f'(x)=\left[(\sqrt{x}+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]'$ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x+\frac{1}{x}\right)+(\sqrt{x}+1)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$	$f'(x)=\left(\frac{2x^3+x+1}{x^2+1}\right)'$ $f'(x)=\frac{(6x^2+1)(x^2+1)-2x(2x^3+x+1)}{(x^2+1)^2}$ $f'(x)=\frac{6x^4+6x^2+x^2+1-4x^4-2x^2-2x}{(x^2+1)^2}$ $f'(x)=\frac{2x^4+5x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$
$f'(x)=[(x^2-3)(4x-5)]'=2x(4x-5)+4(x^2-3)$ $f'(x)=12x^2-10x-12$	$f'(x)=\left(\frac{3x+2}{5x-1}\right)'=\frac{3(5x-1)-5(3x+2)}{(5x-1)^2}=\frac{-13}{(5x-1)^2}$
$f'(x)=(\sqrt{2-3x})'=\frac{(2-3x)'}{2\sqrt{2-3x}}=\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$	$f'(x)=(-2x\sqrt{x})'=-2\left(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)$ $f'(x)=-2\frac{3x}{2\sqrt{x}}=-3\sqrt{x}$
$f'(x)=((2x+3)^7)'=7(2x+3)^6(2x+3)'$ $f'(x)=14(2x+3)^6$	$f'(x)=(\sqrt{x^2+2x+2})'=\frac{(x^2+2x+2)'}{2\sqrt{x^2+2x+2}}$ $f'(x)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

$$f'(x)=\left(\frac{x+\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x}}\right)'$$
$$f'(x)=\frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(2x-\sqrt{x}\right)-\left(2-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}{\left(2x-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)'$$
$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2-x+1)-(2x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)^2}$$
$$f'(x)=\frac{-4x^2+2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}=f'(x)=\frac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x)=\left(x\left(x^2+1\right)^2\right)'=1\times\left(x^2+1\right)^2+x\left(2\times 2\left(x^2+1\right)\right)$$
$$f'(x)=x^4+2x^2+1+4x^3+4x$$

$$f'(x)=\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)'=\frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}=\frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$
$$f'(x)=\frac{\frac{-2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}=\frac{-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{(1+x)^2}$$

$$f'(x)=\left(\tan 3x+4\sin\frac{x}{2}\right)'$$
$$f'(x)=3\times\frac{1}{\cos^2 3x}+4\times\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$$
$$f'(x)=\frac{3}{\cos^2 3x}+2\cos\frac{x}{2}$$

$$f'(x)=\left(\sin^2 x+2\cos^2 x\right)'$$
$$f'(x)=2\sin x\cos x+2(2\cos x(-\sin x))$$
$$f'(x)=-3\sin x\cos x$$

$$f(x)=\frac{\sin x-1}{\sin x+1}$$

$$f'(x)=[(\sin x+\cos x)\sin x]'$$
$$f'(x)=(\cos x-\sin x)\sin x+(\sin x+\cos x)\cos x$$
$$f'(x)=2\sin x\cos x-\sin^2 x+\cos^2 x$$

$$f'(x)=\left(\frac{2+\cos x}{3-\cos x}\right)'$$
$$f'(x)=\frac{-\sin x(3-\cos x)-\sin x(2+\cos x)}{(3-\cos x)^2}$$
$$f'(x)=\frac{-5\sin x}{(3-\cos x)^2}$$

$$f'(x)=(\sin x\cos 2x)'$$
$$f'(x)=\cos x\cos 2x-2\sin x\sin 2x$$

أحيانا نتجاوز بعض التفاصيل لكونها واضحة أو سبق توضيحها في مثال سابق

للتذكير: $(u+v)'=u'+v'$ ، $(u.v)'=u'v+u.v'$ ، $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$ ، $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ، $(u^n)'=n\,u^{n-1}u'$

$$(u(ax+b))'=a\,u'(ax+b)$$

Moutamadris.ma

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الإشتقـــاق	سلسلة 2

<u>تمرين 1</u> : نعتبر الدالة العددية : $f(x)=\dfrac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

1) حدد Df
2) احسب $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\mapsto-1} f(x)$
3) بين أن : $\forall x\in Df \quad f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}\times\dfrac{x+2}{x+1}$
4) أوجد معادلة المماس في النقطة $x_0=0$
5) اعط جدول تغيرات f
6) حدد مطارف الدالة f

<u>تمرين 2</u> : نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x} & ;\ x>1 \\ f(x)=\sqrt{2-x} & ;\ x\leq 1 \end{cases}$$

1) احسب $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$
2) هل تقبل f نهاية في 1 ؟
3) ادرس قابلية اشتقاق f في 1 .
4) حدد معادلة نصفي المماس في النقطة ذات الأفصول 1
5) احسب $f'(x)$ على كل من $]1;+\infty[$ و $]-\infty;1[$
6) أعط جدول تغيرات f

<u>تمرين 3</u> : نعتبر الدالة : $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

1) احسب $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$
2) احسب $f'(x)$ لكل x من IR
3) أعط جدول تغيرات f
4) هل لـ f قيم قصوية أو دنوية مطلقة؟

<u>تمرين 4</u> : بدراسة تغيرات الدالة $f(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$ على $]0;+\infty[$ ، بين أن : $\forall a>0;\quad 2a+\dfrac{1}{a^3}\geq 3$

Moutamadris.ma

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الإشتقـــاق حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : $f(x)=\dfrac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

1 $$Df=\{x\in IR\ /\ x+1\neq 0\}=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$$

2 $$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2x^2+2x-1}{x^2+2x+1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2x^2+2x-1}{x^2+2x+1}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$\lim\limits_{x\mapsto-1} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-1}\dfrac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-\infty$ (لأن: $\lim\limits_{x\mapsto-1} 2x^2+2x-1=-1$ و $\lim\limits_{x\mapsto-1}(x+1)^2=0^+$)

3 $$\forall x\in Df\quad f'(x)=\left(\frac{2x^2+2x-1}{(x+1)^2}\right)'=\frac{(4x+2)(x+1)^2-(2x^2+2x-1)\times 2(x+1)}{\left((x+1)^2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)\left[(4x+2)(x+1)-2(2x^2+2x-1)\right]}{(x+1)^4}=\frac{4x^2+4x+2x+2-4x^2-4x+2}{(x+1)^3}$$

$$f'(x)=\frac{2x+4}{(x+1)^3}=\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{x+2}{x+1}$$

4 لدينا : $f(0)=-1$ و $f'(0)=4$ إذن المماس في $x_0=0$ هي: $(\Delta):\ y=4x-1$

5 بما أن

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+2$		-		+		+	
$x+1$		-		-		+	
$f'(x)$		+		-		+	
$f(x)$	2	↗	3	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	2

6 حسب جدول التغيرات فالدالة f تقبل قيمة قصوية نسبية في النقطة $A(-2;3)$

تمرين 2 : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x} & ;\ x>1 \\ f(x)=\sqrt{2-x} & ;\ x\leq 1\end{cases}$

1 $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x^2+1}{2x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x^2}{2x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty$

2 لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\dfrac{x^2+1}{2x}=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\mapsto1\\x<1}}\sqrt{2-x}=1$ ، إذن f تقبل نهاية في 1

3 $$\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\frac{\dfrac{x^2+1}{2x}-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\frac{\dfrac{x^2-2x+1}{2x}}{x-1}=\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\frac{(x-1)^2}{2x(x-1)}=\lim_{\substack{x\mapsto1\\x>1}}\frac{x-1}{2x}=0$$

Moutamadris.ma

$$\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{\sqrt{2-x}-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{2-x-1}{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)} = \lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{1-x}{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{-1}{\sqrt{2-x}+1} = \frac{-1}{2}$$

إذن f قابلة للاشتقاق يمين ويسار 1 ، ولدينا : $f'_d(1)=0$ و $f'_g(1)=\frac{-1}{2}$

لكنها غير قابلة للاشتقاق في 1 لأن : $f'_d(1)\neq f'_g(1)$

4 معادلة نصفي المماس في النقطة ذات الأفصول 1 : $(\Delta_d): \begin{cases} y=1\\ x\geq 1\end{cases}$ و $(\Delta_g): \begin{cases} y=\frac{-1}{2}(x-1)+1=\frac{-1}{2}x+\frac{3}{2}\\ x\leq 1\end{cases}$

5
$$\begin{cases} f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'=\frac{1}{2}\frac{2x\times x-\left(x^2+1\right)}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{x^2-1}{x^2} & ;\ x>1\\ f'(x)=\left(\sqrt{2-x}\right)'=\frac{-1}{2\sqrt{2-x}} & ;\ x<1\end{cases}$$

6 بما أن $x>1 \Rightarrow x^2-1>0$ فإن $\forall x>1\quad f'(x)>0$ و لدينا : $\forall x<1\quad f'(x)<0$ ، إذن:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-		+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

تمرين 3 : $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

1 $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty} 2x^3+3x^2-12x+1=\lim_{x\mapsto+\infty} 2x^3=+\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty} 2x^3=-\infty$

2 $\forall x\in IR\quad f'(x)=6x^2+6x-12=6\left(x^2+x-2\right)$

3 إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة الحدودية : x^2+x-2 ،

$\Delta=1+8=9>0$ إذن هذه الحدودية تقبل جذرين مختلفين هما : $r_1=\frac{-1+3}{2}=1$ و $r_2=\frac{-1-3}{2}=-2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		+		-		+	
$f'(x)$		+		-		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	21	↘	-6	↗	$+\infty$

4 حسب جدول التغيرات فإن f تقبل قيمة قصوية نسبية في النقطة $A(-2;21)$ وقيمة دنوية نسبية في النقطة $B(1;-6)$ ، لكن هذه النقط لا تمثل قيما مطلقة لأن : $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x)=-\infty$

تمرين 4 : لنبين أن : $\forall a>0;\quad 2a+\frac{1}{a^3}\geq 3$ بدراسة الدالة $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ على $]0;+\infty[$ ،

لدينا: $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$

Moutamadris.ma

و لدينا: $\forall x>0 \quad f'(x)=2-\frac{2}{x^3}=\frac{2}{x^3}\left(x^3-1\right)=\frac{2}{x^3}(x-1)\left(x^2+x+1\right)$

بما أن : $\frac{2}{x^3}\left(x^2+x+1\right)>0 \quad \forall x>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة الحدانية $x-1$ ، منه :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-		+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

إذن الدالة f تقبل قيمة دنوية مطلقة في النقطة $A(1\,;\,3)$ مما يعني أن : $\forall x>0;\quad f(x)\geq 3$

أو أيضا : $\forall a>0;\quad 2a+\frac{1}{a^3}\geq 3$

Moutamadris.ma