السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الحسابيـــــــات	سلسلة 1

تمرين 1 : بين بالترجع أن :

1) $\forall n \in IN \quad 4 / 5^n - 1$

2) $\forall n \in IN \quad 7 / 9^n - 2^n$

3) $\forall n \in IN \quad 9 / 2^{2n} + 15n - 1$

4) $\forall n \in IN \quad 2 / n(n+1)$

تمرين 2 : a عدد صحيح طبيعي فردي .

- بين أن : $a^2 \equiv 1\left[8\right]$

تمرين 3 : a عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

- حدد a علما أن باقي القسمة الإقليدية لـ 92 على a هو 14 و باقي القسمة الإقليدية لـ 131 على a هو 1

تمرين 4 : a و b عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان حيث $a \geq b$ و r باقي القسمة الإقليدية لـ a على b

- بين أن : $a > 2r$

تمرين 5 : a و b و n أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة.

ليكن q خارج القسمة الإقليدية لـ n على a و p خارج القسمة الإقليدية لـ q على b

- بين أن p هو خارج القسمة الإقليدية لـ n على ab

تمرين 6 :

1) عمل التعبير : $xy - x - y + 1$

2) استنتج جميع الأزواج (x, y) من Z^2 التي تحقق : $xy - x - y = 19$

3) حل في $Z^* \times Z^*$ المعادلة : $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$

تمرين 7 : حدد جميع الأعداد n من IN التي تحقق : $\frac{2n+101}{2n+1} \in Z$

تمرين 1 :

1 ليكن $n\in IN$ ، لدينا: $5\equiv 1[4]$ منه $5^n\equiv 1^n[4]$ أي : $5^n\equiv 1[4]$ منه : $5^n-1\equiv 0[4]$

مما يعني أن : $4/5^n-1$ ، بالتالي : $\boxed{\forall n\in IN \quad 4/5^n-1}$

2 ليكن $n\in IN$ ، لدينا: $9\equiv 2[7]$ منه $9^n\equiv 2^n[7]$ أي : $9^n-2^n\equiv 0[7]$

مما يعني أن : $7/9^n-2^n$ ، بالتالي : $\boxed{\forall n\in IN \quad 7/9^n-2^n}$

3 لنبرهن بالترجع أن : $\forall n\in IN \quad 9/2^{2n}+15n-1$

بالنسبة لـ $n=0$ لدينا : $2^{2n}+15n-1=2^0+0-1=0$ إذن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n=0$

نفترض أن : $9/2^{2n}+15n-1$ ونبين أن : $9/2^{2(n+1)}+15(n+1)-1$

لدينا : $9/2^{2n}+15n-1$ منه : $2^{2n}+15n-1=9k \ / k\in Z$ منه : $2^{2n}=9k-15n+1$

منه :

$$2^{2(n+1)}+15(n+1)-1=2^{2n+2}+15n+15-1=2^{2n}\times 2^2+15n+14=(9k-15n+1)\times 4+15n+14$$

$$2^{2(n+1)}+15(n+1)-1=36k-60n+4+15n+14=36k-45n+18=9(4k-5n+2)$$

وبما أن : $(4k-5n+2)\in Z$ فإن : $9/2^{2(n+1)}+15(n+1)-1$

بالتالي : $\boxed{\forall n\in IN \quad 9/2^{2n}+15n-1}$

4 ليكن r خارج قسمة n على 2 إذن : $n=2p+r \ / r\in\{0;1\}$ منه : $r(r-1)=0$ منه : $r^2=r$

منه: $n^2-n=4p^2+4pr+r^2-2p-r=4p^2+4pr-2p=2(2p^2+2pr-p)$ بالتالي : $2/n^2-n$

هناك طرق متعددة لحل هذا السؤال الذي يعتبر خاصية تم تعلمها في السنة السابقة، لكننا آثرنا إدراج طريقة تعتمد القسمة الإقليدية للتدرب على استعمالها أفضل استعمال.

هناك طرق مختلفة للبرهان على مثل هذه العبارات ، أكثرها استعمالا مبدأ الترجع، لكن يبقى استعمال مفهوم التردد بالموافقة أبسط الطرق (رغم عدم إمكانية ذلك في بعض الحالات كالسؤال الثالث)، و أيضا استعمال الحالات على الباقي كالسؤال الرابع .

تمرين 2 :

لدينا a عدد فردي إذن : $\exists k\in IN \ / \ a=2k+1$ منه: $a^2-1=4k^2+4k+1-1=4k(k+1)$

وبما أن $k(k+1)$ عدد زوجي (انظر السؤال الأخير من التمرين السابق) فإن: $\exists k'\in IN \ / k(k+1)=2k'$

منه : $a^2-1=8k'$ مما يعني أن : $a^2\equiv 1\,[8]$

تمرين 3 :

لدينا باقي القسمة الإقليدية لـ 92 على a هو 14 إذن : $\exists q\in IN \ / \begin{cases} 92=qa+14 \\ 14<a \end{cases}$

ولدينا باقي القسمة الإقليدية لـ 131 على a هو 1 إذن : $\exists p\in IN \ / \begin{cases} 131=pa+1 \\ 1<a \end{cases}$

منه : $\begin{cases} 78=qa \\ 130=pa \\ a>14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a/78 \\ a/130 \\ a>14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a/78\wedge 130=26 \\ a>14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in\{1;13;26\} \\ a>14 \end{cases} \Rightarrow a=26$

القسمة الإقليدية مفهوم رياضي جد مهم يجب استيعابه جيدا.

تمرين 4 : لدينا r باقي القسمة الإقليدية لـ a على b ، إذن : $\exists (q,r)\in IN^2 \ / \begin{cases} a=qb+r \\ 0\le r<b \end{cases}$

إذن: $0\le a-qb<b$ منه : $a-b<qb$ ،وبما أن $a-b\ge 0$ فإن: $0<qb$ منه : $q>0$ منه : $q\ge 1$ منه: $qb\ge b$

منه : $qb+r\ge b+r$ ، منه $a\ge b+r>r+r$ بالتالي : $a>2r$

تمرين 5 :

لدينا q خارج القسمة الإقليدية لـ n على a و p خارج القسمة الإقليدية لـ q على b

إذن: $\exists r_1 \in IN \ / \begin{cases} n = qa + r_1 \\ 0 \le r_1 < a \end{cases}$ و $\exists r_2 \in IN \ / \begin{cases} q = pb + r_2 \\ 0 \le r_2 < b \end{cases}$

إذن: $n = a(pb + r_2) + r_1 = ab\,p + (a\,r_2 + r_1)$

ولدينا : $\begin{cases} 0 \le r_1 < a \\ 0 \le r_2 < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le r_1 \le a-1 \\ 0 \le r_2 \le b-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le r_1 \le a-1 \\ 0 \le ar_2 \le ab-a \end{cases} \Rightarrow 0 \le r_1 + a\,r_2 \le ab-1 \Rightarrow 0 \le r_1 + a\,r_2 < ab$

إذن : $\begin{cases} n = ab\,p + (a\,r_2 + r_1) \\ 0 \le r_1 + a\,r_2 < ab \end{cases}$ مما يعني أن p هو خارج القسمة الإقليدية لـ n على ab

لاحظ خلال تمارين القسمة الإقليدية أهمية العبارة : $\forall (x,y) \in Z^2 \quad (x < y \Leftrightarrow x \le y-1)$

تمرين 6 :

1 لدينا : $xy - x - y + 1 = x(y-1) - (y-1) = (y-1)(x-1)$

2 استنتج جميع الأزواج (x,y) من Z^2 التي تحقق :

$$xy - x - y = 19 \Leftrightarrow xy - x - y + 1 = 20 \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 20$$

$$xy - x - y = 19 \Leftrightarrow (x-1;y-1) \in \left\{ \begin{matrix} (20;1) \ ; \ (1;20) \ ; \ (-20;-1) \ ; \ (-1;-20); \\ (2;10) \ ; (10;2) \ ; \ (-2;-10) \ ; \ (-10;-2); \\ (5;4) \ ; \ (4;5) \ ; \ (-5;-4) \ ; \ (-4;-5) \end{matrix} \right\}$$

$$xy - x - y = 19 \Leftrightarrow (x;y) \in \left\{ \begin{matrix} (21;2) \ ; \ (2;21) \ ; \ (-19;0) \ ; \ (0;-19); \\ (3;11) \ ; (11;3) \ ; \ (-1;-9) \ ; \ (-9;-1); \\ (6;5) \ ; \ (5;6) \ ; \ (-4;-3) \ ; \ (-3;-4) \end{matrix} \right\}$$

اعتمدنا على التعميل السابق و على قواسم العدد 20

للتقليل من عدد الأسطر في الجواب استعملنا الطريقة أعلاه و هي طريقة سليمة من الناحية الرياضية

3 لدينا :

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \Leftrightarrow y + 2x = 3xy \Leftrightarrow 3xy - y - 2x = 0 \Leftrightarrow y(3x-1) - 2x = 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \Leftrightarrow 3y(3x-1) - 6x = 0 \Leftrightarrow 3y(3x-1) - 6x + 2 = 2 \Leftrightarrow 3y(3x-1) - 2(3x-1) = 2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \Leftrightarrow (3x-1)(3y-2) = 2 \Leftrightarrow (3x-1;3y-1) \in \{(1;2);(2;1);(-1;-2);(-2;-1)\}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \Leftrightarrow (3x;3y) \in \{(2;4);(3;3);(0;0);(-1;1)\} \Leftrightarrow (x;y) \in \{(1;1)\}$$

بالتالي : $S = \{(1;1)\}$

تمعن جيدا في طريقة التعميل لأنه يمكن تعميمها لحل معادلة من الشكل : $a\,x + b\,y + c\,xy + d = 0$

حيث a و b و c و d أعداد صحيحة نسبية معلومة و x و y عددان نسبيان مجهولان.

تمرين 7 :

$$\frac{2n+101}{2n+1} \in Z \Leftrightarrow \frac{2n+1+100}{2n+1} \in Z \Leftrightarrow 1 + \frac{100}{2n+1} \in Z \Leftrightarrow \frac{100}{2n+1} \in Z \Leftrightarrow 2n+1/100 \Leftrightarrow 2n+1 \in \{1,5,25\}$$

$$\frac{2n+101}{2n+1} \in Z \Leftrightarrow 2n \in \{0,4,24\} \Leftrightarrow n \in \{0,2,12\}$$

استعملنا عبارة مهمة وهي : $\forall n \in Z \ \ \forall a \in IR \ \ (n + a \in Z \Leftrightarrow a \in Z)$

استثنينا قواسم 100 الزوجية لأن $2n+1$ عدد فردي.