سلسلة 1	المجموعات و التطبيقات	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : لتكن E المجموعة : $E=\{1;4;-5;3\}$

1) أوجد $P(E)$ مجموعة أجزاء E ثم حدد عدد عناصرها .

2) أوجد المجموعة : $K=\{A\in P(E)/ \quad 4\in A\}$

3) أوجد المجموعة : $H=\{X\in P(E)/ \quad 5\notin X\}$

تمرين 2 : لتكن E المجموعة : $E=I\!R$ ، نضع : $A=[2;5]$ ، $B=]-\infty;3]$ ، $C=]-2;4[\cup]6;+\infty[$

أوجد المجموعات التالية : $\overline{A}$ ، $\overline{B}$ ، $\overline{C}$ ، $A\setminus B$ ، $C\cap B$ ، $A\cup B$

تمرين 3 : لتكن E مجموعة غير فارغة.

ولتكن A و B و C ثلاث عناصر من مجموعة أجزائها. أثبث المتساويات التالية :

$$(A\setminus C)\cup C=A\cup C \quad ، \quad (A\setminus C)\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C \quad ، \quad (A\setminus C)\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$$

$$(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$$

تمرين 4 : لتكن E مجموعة غير فارغة.

ولتكن A و B و C ثلاث عناصر من مجموعة أجزائها بحيث: $A\cup B=A\cup C$ و $A\cap B=A\cap C$

برهن أن : $B=C$

تمرين 5 : لتكن E مجموعة غير فارغة. لكل X و Y من $P(E)$ ، نضع : $X\Delta Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$

1) بين أن : $X\Delta Y=Y\Delta X$

2) احسب : $X\Delta X$ و $X\Delta E$ و $X\Delta\overline{X}$ و $X\Delta\phi$

3) بين أن : $\overline{X}\Delta\overline{Y}=X\Delta Y$

4) بين أن : $(X\cup Y)\setminus(X\cap Y)=X\Delta Y$

تمرين 6 : لتكن E مجموعة غير فارغة. ليكن X و Y عنصرين من $P(E)$.

بين أن : $X\subset Y \Leftrightarrow X\setminus Y=\phi$

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المجموعات و التطبيقات حل مقترح	سلسلة 1

تمرين 1 : $E = \{1; 4; -5; 3\}$

1) $\mathrm{P}(E) = \left\{ \begin{array}{l} \phi, \{1\}, \{4\}, \{-5\}, \{3\}, \{1;4\}, \{1,-5\}, \{1,3\}, \{4;-5\}, \{4;3\} \\ , \{-5;3\}, \{1,4,-5\}, \{1,4,3\}, \{1;-5;3\}, \{4;-5;3\}, \{1;4;-5;3\} \end{array} \right\}$ ، $P(E)$ تتكون من 16 مجموعة

2) $K = \{A \in \mathrm{P}(E) / \quad 4 \in A\} = \{\{4\}, \{1;4\}, \{4;-5\}, \{4;3\}, \{1,4,-5\}, \{1,4,3\}, \{4;-5;3\}, \{1;4;-5;3\}\}$

3) $H = \{X \in \mathrm{P}(E) / \quad 5 \notin X\} = \phi, \{1\}, \{4\}, \{3\}, \{1;4\}, \{1,3\}, \{4;3\}, \{1,4,3\}, \{1;4;-5;3\}$

تمرين 2 : $E = IR$ ، $A = [2;5]$ ، $B =]-\infty;3]$ ، $C =]-2;4[\cup]6;+\infty[$

$\overline{A} = \{x \in IR / x \notin A\} =]-\infty;2[\cup]5;+\infty[$

$\overline{B} = \{x \in IR / x \notin B\} =]3;+\infty[$

$\overline{C} = \{x \in IR / x \notin C\} =]-\infty;2] \cup [4;6]$

$A \setminus B = \{x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B} = [2;5] \cap]3;+\infty] =]3;5]$

$C \cap B = \{x \in C \text{ et } x \in B\} =]-2;3]$

$A \cup B = \{x \in A \text{ ou } x \in B\} =]-\infty;5]$

تمرين 3 :

$(A \setminus C) \cup C = (A \cap \overline{C}) \cup C = (A \cup C) \cap (\overline{C} \cup C) = (A \cup C) \cap E = A \cup C$

لاحظ أن: $X \cap E = X \quad \forall X \in P(E)$ و $X \cup \overline{X} = E \quad \forall X \in P(E)$ ،

$(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{C}) = A \cap \overline{C} \cap B \cap \overline{C} = A \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{C} = (A \cap B) \cap \overline{C} = (A \cap B) \setminus C$

بوجود التقاطع فقط أو الاتحاد فقط يمكن مبادلة المجموعات و الأقواس

$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) = (A \cup B) \cap \overline{C} = (A \cup B) \setminus C$

التعميل (نعني : $(Z \cap X) \cup (Z \cap X) = Z \cap (X \cup Y)$ و $(Z \cup X) \cap (Z \cup Y) = Z \cup (X \cap Y)$) يكون مفيدا جدا و يختصر الجواب في كثير من الحالات كهذا السؤال.

لدينا:

$$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \cap \overline{C}) \cap \overline{(B \cap \overline{C})} = (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) = ((A \cap \overline{C}) \cap \overline{B}) \cup ((A \cap \overline{C}) \cap C)$$
$$= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) = (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \phi) = (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (\phi)$$
$$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \cap \overline{C} \cap \overline{B}$$

و من جهة أخرى : $(A \setminus B) \setminus C = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

و من جهة ثالثة : $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

بالتالي : $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

استعملنا الخاصيتين ($\overline{(X \cap Y)} = (\overline{X} \cup \overline{Y})$ و $\overline{(X \cup Y)} = (\overline{X} \cap \overline{Y})$)

لاحظ أيضا فكرة البرهان ، حيث بسطنا كل تعبير على حدة و قارنا النتائج.

تمرين 4 :

لدينا:

$$B=(B\setminus A)\cup(B\cap A)$$
$$B=(B\cap\overline{A})\cup(C\cap A)$$
$$B=(B\cup C)\cap(B\cup A)\cap(\overline{A}\cup C)\cap(\overline{A}\cup A)$$
$$B=(B\cup C)\cap(C\cup A)\cap(\overline{A}\cup C)\cap E$$
$$B=C\cup(B\cap A\cap\overline{A})$$
$$B=C\cup(B\cap\phi)$$
$$B=C\cup\phi$$
$$B=C$$

- استعملنا بداية المتساوية الهامة : ($B=(B\setminus A)\cup(B\cap A)$ و التي يمكن البرهان عنها بسهولة أو من خلال مخطط
$$(B\setminus A)\cup(B\cap A)=(B\cap\overline{A})\cup(B\cap A)$$
$$=B\cap(\overline{A}\cup A)=B\cap E=B$$ (
- في السطر الثالث قمنا بالنشر (مثل نشر مجموع في مجموع)
- استعملنا بعض المتساويات الواضحة: $X\cap E=X$ و $X\cap\phi=\phi$ و $X\cup\phi=X$)
- يمكن أيضا استعمال الطريقة الاعتيادية، حيث نأخذ عنصرا x من B ونبين أنه ينتمي لـ C، لكن في هذه الطريقة يجب أن نفصل حالتين $x\in A$ و $x\notin A$ ، و طبعا نعيد الطريقة للبرهان على التضمن العكسي

تمرين 5 : $X\Delta Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$

1	$X\Delta Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)=(Y\setminus X)\cup(X\setminus Y)=Y\Delta X$
2	$X\Delta X=(X\setminus X)\cup(X\setminus X)=\phi\cup\phi=\phi$ $X\Delta E=(X\setminus E)\cup(E\setminus X)=(X\cap\overline{E})\cup(E\cap\overline{X})=(X\cap\phi)\cup(\overline{X})=\phi\cup(\overline{X})=\overline{X}$ $X\Delta\overline{X}=(X\setminus\overline{X})\cup(\overline{X}\setminus X)=(X\cap X)\cup(\overline{X}\cap\overline{X})=(X)\cup(\overline{X})=E$ $X\Delta\phi=(X\setminus\phi)\cup(\phi\setminus X)=(X\cap\overline{\phi})\cup(\phi\cap\overline{X})=(X\cap E)\cup\phi=X$
3	$\overline{X}\Delta\overline{Y}=(\overline{X}\cap Y)\cup(\overline{Y}\cap X)=X\Delta Y$
4	$(X\cup Y)\setminus(X\cap Y)=(X\cup Y)\cap\overline{(X\cap Y)}=(X\cup Y)\cap(\overline{X}\cup\overline{Y})=(X\cap\overline{X})\cup(X\cap\overline{Y})\cup(Y\cap\overline{X})\cup(Y\cap\overline{Y})$ $=\phi\cup(X\cap\overline{Y})\cup(Y\cap\overline{X})\cup\phi=(X\cap\overline{Y})\cup(Y\cap\overline{X})=X\Delta Y$ المطلوب إثبات متساوية، لذلك من الأفضل البدأ بالتعبير الذي يمكن إجراء عمليات عليه و الذي في حالتنا هو $(X\cup Y)\setminus(X\cap Y)$.

تمرين 6 :

لدينا :
$$X\setminus Y=\phi\Rightarrow X\cap\overline{Y}=\phi\Rightarrow(X\cap\overline{Y})\cup Y=Y\Rightarrow(X\cup Y)\cap(\overline{Y}\cup Y)=Y\Rightarrow(X\cup Y)\cap E=Y$$
$$\Rightarrow X\cup Y=Y\Rightarrow X\subset Y$$

عكسيا:
$$X\subset Y\Rightarrow X\cap\overline{Y}\subset Y\cap\overline{Y}\Rightarrow X\cap\overline{Y}\subset\phi\Rightarrow X\setminus Y=\phi$$

- للبرهان أن مجموعة ضمن أخرى يمكن البرهان أن اتحادهما يساوي إحداهما أو تقاطعهما يساوي إحداهما.
- كل مجموعة ضمن المجموعة الفارغة هي مجموعة فارغة

سلسلة 2	المجموعات و التطبيقات	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : لتكن A و B و C ثلاث مجموعات غير فارغة. بين أن :

1) $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=A$

2) $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$

3) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$

4) $A\times B=A\times C \Leftrightarrow B=C$

تمرين 2 : لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين.

1) بين أن : $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=A$

2) أوجد A و B علما أن :
$$A\cap B=\{1;2;3\}$$
$$A\setminus B=\{4;5\}$$
$$A\cup B=\{1;2;3;4;5;6;7;9\}$$

تمرين 3 : نعتبر المجموعة : $A=\left\{x\in IR \,/\, \frac{1}{2}\geq\frac{|x|}{x^2+1}\right\}$ ، بين أن : $A=IR$

تمرين 4 : بين أن : $\{x\in IR \,/\, |x|<2\}=\left\{x\in IR \,/\, \frac{3x-2}{x+2}<1\right\}$

تمرين 5 : $A=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in Z\right\}$ و $B=\left\{\frac{-\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in Z\right\}$ ، بين أن : $A=B$

تمرين 6 : نضع : $A=\{(m,n)\in Z^2 \,/\, mn=10\}$ و $B=\left\{\frac{a}{b}\in Q \,/\, (a,b)\in A\right\}$

1) أكتب بتفصيل المجموعتين A و B.

2) هل $A\subset B$ أم $B\subset A$ ؟ علل جوابك.

تمرين 1 : لتكن A و B و C ثلاث مجموعات غير فارغة. بين أن :

1 $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)=A\cap\left(B\cup\overline{B}\right)=A\cap E=A$

2 $(A\setminus B)\setminus C=\left(A\cap\overline{B}\right)\cap\overline{C}=A\cap\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right)=A\cap\left(\overline{B\cup C}\right)=A\setminus(B\cup C)$

3 $A\setminus(A\setminus B)=A\cap\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)=A\cap\left(\overline{A}\cup B\right)=\left(A\cap\overline{A}\right)\cup(A\cap B)=\phi\cup(A\cap B)=A\cap B$

4 لنبين الاستلزام: $B=C\ \Rightarrow\ A\times B=A\times C$

نفترض أن $B=C$ و نبين أن $A\times B=A\times C$

ليكن $(x,y)\in A\times C\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x\in A\\ y\in C\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x\in A\\ y\in B\end{cases}\ \Leftrightarrow\ (x,y)\in A\times B$ (لأن: $y\in C\ \Leftrightarrow\ y\in B$)

الآن لنبين الاستلزام العكسي: $A\times B=A\times C\ \Rightarrow\ B=C$

نفترض أن $A\times B=A\times C$ و نبين أن $B=C$

بما أن $A\neq\phi$ فهي تحتوي على الأقل على عنصر و ليكن مثلا a

الآن لدينا: $x\in C\Leftrightarrow(a,x)\in A\times C\ \Leftrightarrow(a,x)\in A\times B\Leftrightarrow x\in B$ بالتالي: $B=C$

خلاصة: $B=C\ \Leftrightarrow\ A\times B=A\times C$

السؤال الرابع هو سؤال سهل /صعب، سهل إذا أدركنا جيدا مفهوم الجداء الديكارتي لمجموعتين، و صعب إذا كنا نفهمه على أنه شبيه بعملية ضرب الأعداد و نحاول الانتقال في البرهان بشكل غير معلل و ارتجالي نتيجة عدم فهمنا لهذا الجداء.

تمرين 2 : لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين.

1 $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)=A\cap\left(B\cup\overline{B}\right)=A\cap E=A$

2 $A=(A\cap B)\cup(A\setminus B)=\{1;2;3\}\cup\{4;5\}=\{1;2;3;4;5\}$

لإيجاد المجموعة B سنبين المتساوية: $(A\cup B)\setminus A=B\setminus A$

لدينا: $(A\cup B)\setminus A=(A\cup B)\cap\overline{A}=\left(A\cap\overline{A}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)=\phi\cup\left(B\cap\overline{A}\right)=B\cap\overline{A}=B\setminus A$

إذن: $B\setminus A=(A\cup B)\setminus A=\{1;2;3;4;5;6;7;9\}\setminus\{1;2;3;4;5\}=\{6;7;9\}$

و بتطبيق السؤال الأول: $B=(B\cap A)\cup(B\setminus A)=\{1;2;3\}\cup\{6;7;9\}=\{1;2;3;6;7;9\}$

يمكنك تظنن التساوي $(A\cup B)\setminus A=B\setminus A$ عبر خطاطة لكن يجب البرهان على ذلك.

تمرين 3 : نضع : $A=\left\{x\in IR\,/\ \frac{1}{2}\geq\frac{|x|}{x^2+1}\right\}$ ، إذن $A\subset IR$

و لدينا: $\in A\Leftrightarrow\frac{1}{2}\geq\frac{|x|}{x^2+1}\Leftrightarrow x^2+1\geq 2|x|\Leftrightarrow x^2+1-2|x|\geq 0\Leftrightarrow\left(|x|-1\right)^2\geq 0$

بما أن العبارة : $\forall x\in IR\ \left(|x|-1\right)^2\geq 0$ صحيحة فإن : $x\in IR\Rightarrow\left(|x|-1\right)^2\geq 0\Rightarrow x\in A$

بالتالي: $A=IR$

إثبات التساوي $A=IR$ يعني ببساطة إثبات صحة العبارة $\forall x\in IR\ \ \frac{1}{2}\geq\frac{|x|}{x^2+1}$

تمرين 4 : نضع : $A=\{x\in IR/\ |x|<2\}$ و $B=\left\{x\in IR/\dfrac{3x-2}{x+2}<1\right\}$

لدينا : $x\in A \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$

و $x\in B \Leftrightarrow \dfrac{3x-2}{x+2}<1 \Leftrightarrow \dfrac{3x-2-x-2}{x+2}<0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-4}{x+2}<0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x+2}<0 \Leftrightarrow -2<x<2$

إذن : $x\in A \Leftrightarrow x\in B$ بالتالي : $A=B$

التكافؤ $\dfrac{x-2}{x+2}<0 \Leftrightarrow -2<x<2$ نبينه باستعمال جدول الإشارات

تمرين 5 : $A=\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in Z\right\}$ و $B=\left\{\dfrac{-\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in Z\right\}$

لدينا : $x\in A \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in Z \Rightarrow x=\dfrac{-\pi}{2}+\pi+k\pi \Rightarrow x=\dfrac{-\pi}{2}+(k+1)\pi \Rightarrow x\in B$

و $x\in B \Rightarrow x=\dfrac{-\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in Z \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}-\pi+k\pi \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+(k-1)\pi \Rightarrow x\in A$

بالتالي : $A=B$

رغم اختلاف تعريف المجموعتين إلا أنهما تتكونان من نفس العناصر، لذلك فهما متساويتان إجمالا، بمعنى عندما نعطي قيمة ل k سنجد عنصرين مختلفين، لكن توجد قيم أخرى ل k تعطي نفس العناصر في المجموعة الأخرى.

تمرين 6 : $A=\{(m,n)\in Z^2\ /\ mn=10\}$ و $B=\left\{\dfrac{a}{b}\in Q/\ (a,b)\in A\right\}$

1. $A=\{(1;10),(-1;-10),(10;1),(-10;-1),(2;5),(-2;-5),(5;2),(-5;-2)\}$

$B=\left\{\dfrac{1}{10}\ ,\ 10\ ,\ \dfrac{2}{5}\ ,\ \dfrac{5}{2}\right\}$

2. كلا العبارتين $A\subset B$ و $B\subset A$ غير صحيحتان لكون المجموعة A مجموعة أزواج بينما B مجموعة أعداد جذرية

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المجموعات و التطبيقات	سلسلة 3

تمرين 1 : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي :
$$f : IR^+ \to IR$$
$$x \mapsto x - 6\sqrt{x}$$

1) أوجد : $f^{-1}([-9,0])$

2) أوجد : $f([1,4])$

تمرين 2 : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي :
$$f : IR \to IR$$
$$x \mapsto \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

1) أوجد $f^{-1}(]0;1[)$

2) أوجد $f([1;+\infty[)$

تمرين 3 : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي :
$$f : IR^* \to IR$$
$$x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

1) أوجد $f^{-1}([1,2])$

2) بين أن : $\forall x \in \left[\frac{1}{2};2\right] \quad f(1) \leq f(x) \leq f(2)$

3) أوجد $f\left(\left[\frac{1}{2},2\right]\right)$

تمرين 4 : ليكن f تطبيقا من مجموعة $E \neq \phi$ نحو مجموعة $F \neq \phi$.

ليكن A و B جزأين من E و C و D جزأين من F .

1) بين أن : $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

2) بين أن : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

3) بين أن : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

4) بين أن : $f(\phi) = \phi$

5) بين أن : $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

6) بين أن : $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

7) بين أن : $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

8) بين أن : $f^{-1}(\phi) = \phi$

9) بين أن : $f^{-1}(F) = E$

10) بين بمثال مضاد أن العبارة $f(A) \subset f(B) \Rightarrow A \subset B$ غير صحيحة.

11) بين بمثال مضاد أن العبارة $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ غير صحيحة

تمرين 5 : ليكن f تطبيقا من مجموعة E نحو مجموعة F و ليكن X جزءا من E و Y جزءا من F .

1) بين أن : $X \subset f^{-1}(f(X))$

2) بين أن : $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$

تمرين 6 : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي :
$$f : IR^* \to IR$$
$$x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

بين أن f تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $[2;+\infty[$ و حدد تقابله العكسي f^{-1}

تمرين 7 : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي : $\begin{array}{l} f: \quad I\!R \to I\!R \\ x \mapsto x\lvert x\rvert \end{array}$ بين أن f تقابل من $I\!R$ نحو $I\!R$ وحدد تقابله العكسي f^{-1}	
تمرين 8 : نعتبر التطبيقين : $f: \quad E \to F$ و $g: \quad F \to G$ 1) f تباين $\Leftrightarrow$ $\forall X \in P(E): f^{-1}(f(X)) = X$ 2) f شمول $\Leftrightarrow$ $\forall Y \in P(F): f(f^{-1}(Y)) = Y$ 3) f تباين $\Rightarrow$ $g \circ f$ تباين 4) g شمول $\Rightarrow$ $g \circ f$ شمول	

تمرين 1 : $f: IR^+ \to IR$, $x \mapsto x - 6\sqrt{x}$

1

$$f^{-1}([-9,0]) = \{x \in IR^+ / f(x) \in [-9;0]\} = \{x \in IR^+ / -9 \le f(x) \le 0\} = \{x \ge 0 / -9 \le x - 6\sqrt{x} \le 0\}$$
$$f^{-1}([-9,0]) = \{x \ge 0 / 0 \le x - 6\sqrt{x} + 9 \le 9\} = \left\{x \ge 0 / 0 \le \left(\sqrt{x}-3\right)^2 \le 9\right\} = \left\{x \ge 0 / \left|\sqrt{x}-3\right| \le 3\right\}$$
$$f^{-1}([-9,0]) = \{x \ge 0 / -3 \le \sqrt{x} - 3 \le 3\} = \{x \ge 0 / 0 \le \sqrt{x} \le 6\} = \{x \ge 0 / 0 \le x \le 36\}$$
$$f^{-1}([-9,0]) = [0;36]$$

2

$$x \in [1;4] \Rightarrow 1 \le x \le 4 \Rightarrow 1 \le \sqrt{x} \le 2 \Rightarrow -2 \le \sqrt{x} - 3 \le -1 \Rightarrow 1 \le 3 - \sqrt{x} \le 2$$

لدينا: $x \in [1;4] \Rightarrow 1 \le \left(3-\sqrt{x}\right)^2 \le 4 \Rightarrow 1 \le x - 6\sqrt{x} + 9 \le 4 \Rightarrow -8 \le x - 6\sqrt{x} \le -5$

$$x \in [1;4] \Rightarrow f(x) \in [-8;-5]$$

منه: $f([1;4]) \subset [-8;-5]$

عكسيا، ليكن: $y \in [-8;-5]$ ، لنحل في المجال $[1;4]$ المعادلة : $f(x) = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x - 6\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x - 6\sqrt{x} + 9 = y + 9 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-3\right)^2 = y + 9$$

و حيث أن : $y + 9 \in [1;4]$ فإن :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 = \sqrt{y+9} \quad ou \quad \sqrt{x} - 3 = -\sqrt{y+9}$$
$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 + \sqrt{y+9} \quad ou \quad \sqrt{x} = 3 - \sqrt{y+9}$$

و حيث أن : $\sqrt{y+9} \in [1;2]$ فإن : $-\sqrt{y+9} \in [-2;-1]$ منه : $3 - \sqrt{y+9} \in [1;2]$

منه: $f(x) = y \Leftrightarrow x = \left(3+\sqrt{y+9}\right)^2 \quad ou \quad x = \left(3-\sqrt{y+9}\right)^2$

إذن هذه المعادلة تقبل حلا على الأقل $x = \left(3-\sqrt{y+9}\right)^2$ في المجال $[1;4]$ ،بمعنى أن : $[-8;-5] \subset f([1;4])$

بالتالي : $[-8;-5] = f([1;4])$

تمرين 2 : $f: IR \to IR$, $x \mapsto \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$

1

$$f^{-1}(]0;1[) = \{x \in IR / f(x) \in]0;1[\} = \{x \in IR / 0 < f(x) < 1\} = \left\{x \in IR / 0 < \frac{x^2+2}{x^2+1} < 1\right\}$$
$$f^{-1}(]0;1[) = \left\{x \in IR / 0 < \frac{x^2+1+1}{x^2+1} < 1\right\} = \left\{x \in IR / 0 < 1 + \frac{1}{x^2+1} < 1\right\} = \left\{x \in IR / -1 < \frac{1}{x^2+1} < 0\right\}$$
$$f^{-1}(]0;1[) = \{x \in IR / -x^2 - 1 < 1 < 0\} = \phi$$

الصورة العكسية لمجموعة قد تكون فارغة كما هو في المثال أعلاه.

2

لدينا: $x \in [1;+\infty[\Rightarrow x \ge 1 \Rightarrow x^2 \ge 1 \Rightarrow x^2 + 1 \ge 2 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{x^2+1} \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow 1 < 1 + \dfrac{1}{x^2+1} \le \dfrac{3}{2}$

و $x \in [1;+\infty[\Rightarrow 1 < f(x) \le \dfrac{3}{2} \Rightarrow f(x) \in \left]1;\dfrac{3}{2}\right]$

منه: $f([1;+\infty[) \subset \left]1;\dfrac{3}{2}\right]$

عكسيا: ليكن: $y \in \left]1;\dfrac{3}{2}\right]$ ، لنحل في المجال $[1;+\infty[$ المعادلة: $f(x) = y$

$$f(x)=y \Leftrightarrow 1+\frac{1}{x^2+1}=y \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}=y-1 \Leftrightarrow x^2+1=\frac{1}{y-1}$$

$$f(x)=y \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{y-1}-1=\frac{2-y}{y-1} \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{2-y}{y-1}} \ ou \ x=-\sqrt{\frac{2-y}{y-1}}$$

وحيث أن: $y\in \left]1;\frac{3}{2}\right]$ فإن: $y-1\in \left]0;\frac{1}{2}\right]$ منه : $\frac{1}{y-1}\in [2;+\infty[$ منه: $\frac{1}{y-1}-1\in [1;+\infty[$

منه: $\sqrt{\frac{1}{y-1}-1}\in [1;+\infty[$ ، إذن هذه المعادلة تقبل حلا $x=\sqrt{\frac{2-y}{y-1}}$ في المجال $[1;+\infty[$

بمعنى أن: $\left]1;\frac{3}{2}\right]\subset f([1;+\infty[)$ ، بالتالي $f([1;+\infty[)=\left]1;\frac{3}{2}\right]$

لاحظ أهمية تغيير تعبير الدالة من $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$ إلى $f(x)=1+\frac{1}{x^2+1}$

تمرين 3 : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي :
$$f:\ IR^* \to IR$$
$$x \mapsto x+\frac{1}{x}$$

1

$$f^{-1}([1,2])=\{x\in IR^* / f(x)\in [1,2]\}=\{x\in IR^* / 1\le f(x)\le 2\}=\left\{x\in IR^* / 1\le x+\frac{1}{x}\le 2\right\}$$

$$f^{-1}([1,2])=\left\{x\in IR^* / 1\le \frac{x^2+1}{x}\le 2\right\}=\left\{x\in IR^* / 1\le \frac{x^2+1}{x} \ et \ \frac{x^2+1}{x}\le 2\right\}$$

ولدينا: $1\le \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow x>0$ منه: $\frac{x^2+1}{x}\le 2 \Rightarrow x^2+1\le 2x \Rightarrow (x-1)^2\le 0 \Rightarrow x=1$

وعكسيا : $f(1)=2\in [1;2]$ ، بالتالي: $f^{-1}([1,2])=\{1\}$

2

لدينا: $x\in \left[\frac{1}{2};2\right] \Rightarrow f(x)-f(1)=x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}\ge 0 \Rightarrow f(x)\ge f(1)$

من جهة أخرى:

$$x\in \left[\frac{1}{2};2\right] \Rightarrow f(x)-f(2)=x+\frac{1}{x}-\frac{5}{2}=\frac{2x^2+2-5x}{x}=\frac{2x^2-5x+2}{x}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}\le 0 \Rightarrow f(x)\le f(2)$$

بالتالي: $x\in \left[\frac{1}{2};2\right] \Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(2)$

3

لدينا حسب السؤال السابق : $f\left(\left[\frac{1}{2},2\right]\right)\subset \left[2;\frac{5}{2}\right]$

عكسيا: ليكن: $y\in \left[2;\frac{5}{2}\right]$ ، لنحل في المجال $\left[\frac{1}{2},2\right]$ المعادلة: $f(x)=y$

$$f(x)=y \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=y \Leftrightarrow x^2-yx+1=0 \ ، \ \Delta=y^2-4\ge 0$$

إذن المعادلة تقبل حلين في IR : $x_1=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ أو $x_2=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$

ولدينا : $y\ge 2 \Rightarrow x_1=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}\ge \frac{y}{2}\ge \frac{2}{2}\ge 1$

و $2\le y\le \frac{5}{2} \Rightarrow 4\le y^2\le \frac{25}{4} \Rightarrow 0\le y^2-4\le \frac{9}{4} \Rightarrow 0\le \sqrt{y^2-4}\le \frac{3}{2} \Rightarrow x_1=\frac{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{2}\le 2$

منه : $x\in \left[\frac{1}{2},2\right]$ بالتالي : $f\left(\left[\frac{1}{2},2\right]\right)=\left[2;\frac{5}{2}\right]$

تمرين 4 :

1

لنبين أن : $A\subset B \;\Rightarrow f(A)\subset f(B)$

نفترض أن $A\subset B$ و لنبين أن: $f(A)\subset f(B)$

لدينا: $y\in f(A)\Rightarrow \exists x\in A \;/\; y=f(x)\Rightarrow \exists x\in B \;/\; y=f(x)\Rightarrow y\in f(B)$ ، بالتالي : $f(A)\subset f(B)$

2

لنبين أن : $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

لدينا : $A\subset A\cup B$ إذن حسب السؤال السابق $f(A)\subset f(A\cup B)$

و أيضا : $B\subset A\cup B \;\Rightarrow\; f(B)\subset f(A\cup B)$

لدينا إذن : $\begin{cases} f(A)\subset f(A\cup B) \\ f(B)\subset f(A\cup B)\end{cases} \Rightarrow\; f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$

من جهة أخرى : $y\in f(A\cup B)\Rightarrow \exists x\in A\cup B \;/\; y=f(x)\Rightarrow \exists x\in A \;ou\; x\in B \;/\; y=f(x)$

$\Rightarrow y\in f(A) \;ou\; y\in f(B) \;\Rightarrow y\in f(A)\cup f(B)$

منه : $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$ ، بالتالي : $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

3

لنبين أن: $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

و أيضا : $\begin{cases} A\cap B\subset A \\ A\cap B\subset B\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(A\cap B)\subset f(A) \\ f(A\cap B)\subset f(B)\end{cases} \Rightarrow f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

4

لنبين أن : $f(\phi)=\phi$ ، سنستعمل برهانا بالخلف ، نفترض أن: $f(\phi)\neq\phi$ إذن $f(\phi)$ تحتوي على الأقل على عنصر y ، وحسب تعريف صورة مجموعة بتطبيق فإنه يوجد عدد $x\in\phi$ بحيث $y=f(x)$ ، وهذا غير ممكن لأن ϕ لا تتضمن أي عنصر.

5

لنبين أن: $C\subset D \;\Rightarrow f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$ ، نفترض أن $C\subset D$ و لنبين أن: $f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$

لدينا: $x\in f^{-1}(C)\Rightarrow f(x)\in C\Rightarrow f(x)\in D\Rightarrow x\in f^{-1}(C)$ ، بالتالي: $f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$

6

لنبين أن: $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

لدينا : $\begin{cases} C\subset C\cup D \\ D\subset C\cup D\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(C)\subset f^{-1}(C\cup D) \\ f^{-1}(D)\subset f^{-1}(C\cup D)\end{cases} \Rightarrow f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)\subset f^{-1}(C\cup D)$

من جهة أخرى : $x\in f^{-1}(C\cup D)\Rightarrow f(x)\in C\cup D\Rightarrow f(x)\in C \;ou\; f(x)\in D$

$\Rightarrow x\in f^{-1}(C) \;ou\; x\in f^{-1}(D) \;\Rightarrow x\in f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

منه : $f^{-1}(C\cup D)\subset f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$ ، بالتالي : $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

7

لنبين أن : $f^{-1}(C\cap D)\subset f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

لدينا: $\begin{cases} C\cap D\subset C \\ C\cap D\subset D\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(C\cap D)\subset f^{-1}(C) \\ f^{-1}(C\cap D)\subset f^{-1}(D)\end{cases} \Rightarrow f^{-1}(C\cap D)\subset f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

8

لنبين أن $f^{-1}(\phi)=\phi$ ، نفترض أن: $f^{-1}(\phi)\neq\phi$ إذن: $f^{-1}(\phi)$ تتضمن عنصرا x على الأقل، إذن $f(x)\in\phi$ و هذا غير ممكن ، إذن: $f^{-1}(\phi)=\phi$

9

لنبين أن: $f^{-1}(F)=E$

لدينا : $x\in E \;\Rightarrow f(x)\in F\Rightarrow x\in f^{-1}(F)$ ، منه: $E\subset f^{-1}(F)$

و لدينا: $x\in f^{-1}(F)\Rightarrow f(x)\in F \,/\, x\in E\Rightarrow x\in E$ منه: $f^{-1}(F)\subset E$ ، بالتالي : $f^{-1}(F)=E$

10

العبارة $f(A)\subset f(B) \;\Rightarrow\; A\subset B$ ليست صحيحة دائما

مثلا نأخذ: $E=\{1,2,3,4\}$ و $F=\{0\}$ بحيث جميع عناصر E لها نفس الصورة 0

و نأخذ: $A=\{1;2\}$ و $B=\{3;4\}$

	وهكذا يكون لدينا: $f(A)=\{0\}$ و أيضا $f(B)=\{0\}$ منه: $f(A)=f(B)$ لكن : $\{1;2\}\not\subset\{3;4\}$
11	العبارة $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$ ليست صحيحة دائما نفس المثال السابق: $f(A)\cap f(B)=\{0\}\cap\{0\}=\{0\}$ و $f(A\cap B)=f(\phi)=\phi$ لكن العبارة: $\{0\}\subset\phi$ غير صحيحة
1)	**تمرين 5** : ليكن f تطبيقا من مجموعة E نحو مجموعة F و ليكن X جزءا من E و Y جزءا من F .
1	لنبين أن: $X\subset f^{-1}(f(X))$ لدينا : $x\in X\Rightarrow f(x)\in f(X)\Rightarrow x\in f^{-1}(f(X))$ ، بالتالي : $X\subset f^{-1}(f(X))$
2	لدينا : $y\in f(f^{-1}(Y))\Rightarrow \exists x\in f^{-1}(Y)/\ y=f(x)\Rightarrow f(x)\in Y/\ y=f(x)\ \Rightarrow y\in Y$ بالتالي: $f(f^{-1}(Y))\subset Y$ تبدو مثل هذه العبارات صعبة البرهان، لكنها على العكس تماما، فقط يجب إدراك مفهوم صورة مجموعة بتطبيق و الصورة العكسية لمجموعة بتطبيق إدراكا جيدا

تمرين 6 :

$$f:\ IR^*\to IR$$
$$x\ \mapsto x+\frac{1}{x}$$

- لنبين أولا أن f تباين على $[1;+\infty[$

لدينا لكل $(x;y)\in[1;+\infty[^2$:

$$f(x)=f(y)\ \Rightarrow x+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{y}\Rightarrow x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0\Rightarrow(x-y)-\frac{(x-y)}{xy}=0$$

$$f(x)=f(y)\ \Rightarrow(x-y)\left(\frac{xy-1}{xy}\right)=0\Rightarrow\ x=y\ ou\ xy=1$$

و بما أن: $\begin{cases}xy=1\\x\geq1\\y\geq1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{y}\\x\geq1\\\frac{1}{y}\leq1\end{cases}\Rightarrow(1\leq x\leq1)\Rightarrow(x=1)\Rightarrow(y=1)\Rightarrow(x=y=1)$ فإن: $f(x)=f(y)\ \Rightarrow x=y$

- لنبين أن f شمول على $[2;+\infty[$

ليكن $y\in[2;+\infty[$ و لنبين أن المعادلة : $f(x)=y$ تقبل على الأقل حلا في $[1;+\infty[$

لدينا: $\begin{cases}f(x)=y\\x\in[1;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{1}{x}=y\\x\geq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-yx+1=0\\x\geq1\end{cases}$ و لدينا : $\Delta=y^2-4\geq0$

منه: $\begin{cases}f(x)=y\\x\in[1;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{1}{x}=y\\x\geq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}\ ou\ x=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}\\x\geq1\end{cases}$

و لدينا : $\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}\geq\frac{y}{2}\geq1$ ، إذن أن المعادلة : $f(x)=y$ تقبل على الأقل الحل $\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ في $[1;+\infty[$

إذن f شمولية على $[2;+\infty[$، بالتالي f تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $[2;+\infty[$ و تقابله العكسي f^{-1} معرف كما يلي :

$$f^{-1}\ [2;+\infty[\to[1;+\infty[$$
$$x\mapsto\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$$

للبرهان على التقابل يمكن البرهان أن للمعادلة $f(x)=y$ حلا وحيدا في مجموعة الانطلاق، لكن هذا الأمر يكون صعبا كما هو الشأن في هذا التمرين ، لذلك تكون أفضل وسيلة هي البرهان عن التباين ثم الشمول.

تمرين 7 : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي : $\begin{array}{l} f: \ IR \to IR \\ x \mapsto x|x| \end{array}$

- لنبين أن f تقابل من IR نحو IR

ليكن $y \in IR$ ولنبين أن المعادلة : $f(x)=y$ تقبل حلا وحيدا في IR

لدينا : $f(x)=y \Leftrightarrow x|x|=y$

إذا كان : $y \geq 0$ فإن :
$$f(x)=y \Leftrightarrow \begin{cases} x|x|=y \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{y}$$

و إذا كان : $y<0$ فإن :
$$f(x)=y \Leftrightarrow \begin{cases} x|x|=y \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2=y \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=-y \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\sqrt{-y}$$

في كل الحالات المعادلة : $f(x)=y$ تقبل على الأقل حلا في IR

بالتالي: f تقابل من IR نحو IR وتقابله العكسي f^{-1} معرف كما يلي :
$$f^{-1} \ IR \to IR$$
$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & si \ \ x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & si \ \ x<0 \end{cases}$$

هذا مثال تطبيق يكون تقابله العكسي معرف على مجالات

البرهان على التقابل في هذا التمرين تم بالبرهان على وجود و وحدانية حلول المعادلة $f(x)=y$ دون الحاجة للتباين، لكن يجب الانتباه أن ذلك يتطلب عبارة متكافئة و ليس استلزاما.

تمرين 8 : نعتبر التطبيقين : $f: \ E \to F$ و $g: \ F \to G$

1

- لنبين أن : f تباين $\Rightarrow \forall X \in P(E): f^{-1}(f(X))=X$

ليكن $(x;y) \in E^2$ بحيث: $f(x)=f(y)$

لدينا : $f(\{x\})=\{f(x)\}$ و $f(\{y\})=\{f(y)\}$

وبما أن $f(x)=f(y)$ فإن : $f(\{y\})=f(\{x\})$ منه : $f^{-1}(f(\{y\}))=f^{-1}(f(\{x\}))$

وحسب المعطيات و بأخذ $X=\{x\}$ ثم $X=\{y\}$

فإننا نستنتج أن : $\{x\}=\{y\}$ منه: $x=y$

- لنبين أن : $f \Rightarrow \forall X \in P(E): f^{-1}(f(X))=X$ تباين

ليكن $X \in P(E)$

لدينا من جهة: $x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(X))$ منه : $X \subset f^{-1}(f(X))$

ومن جهة أخرى : $x \in f^{-1}(f(X)) \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow \begin{cases} f(x)=f(a) \\ a \in X \end{cases}$

وباستعمال تباين الدالة نستنتج أن : $x=a$ ومنه: $x \in X$ ، إذن $f^{-1}(f(X)) \subset X$

بالتالي: $f^{-1}(f(X))=X$

خلاصة: f تباين $\Leftrightarrow \forall X \in P(E): f^{-1}(f(X))=X$

2

- لنبين أن : f شمول $\Rightarrow \forall Y \in P(F): f(f^{-1}(Y))=Y$

ليكن $y \in F$ ،منه $\{y\} \subset F$ أي: $\{y\} \in P(F)$ ، إذن حسب المعطيات: $f(f^{-1}(\{y\}))=\{y\}$

إذن $\exists a \in f^{-1}(\{y\}) \ / \ f(a)=y$ ، وبما أن $f^{-1}(\{y\}) \subset E$ فإن : $\exists a \in E \ / \ f(a)=y$ ، إذن : f شمول

- لنبين أن $f \Rightarrow \forall Y \in P(F): f(f^{-1}(Y))=Y$ شمول

ليكن $Y \in P(F)$ ،لدينا من جهة :

	$y \in f\left(f^{-1}(Y)\right) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(Y) / y = f(x) \Rightarrow f(x) \in Y / y = f(x) \Rightarrow y \in Y$ منه : $f\left(f^{-1}(Y)\right) \subset Y$ ، و من جهة أخرى و باستعمال شمول الدالة : $y \in Y \Rightarrow \exists x \in E \ / \ y = f(x) \Rightarrow f(x) \in Y \Rightarrow x \in f^{-1}(Y) \Rightarrow f(x) \in f\left(f^{-1}(Y)\right) \Rightarrow y \in f\left(f^{-1}(Y)\right)$ بالتالي: $Y \subset f\left(f^{-1}(Y)\right)$ خلاصة: f شمول $\Leftrightarrow \forall Y \in P(F) : f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y$	
	لنبين أن : $g \circ f$ تباين $\Rightarrow$ f تباين ليكن $(x;y) \in E^2$ بحيث: $f(x) = f(y)$ لدينا و باستعمال تباين $g \circ f$: $f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y$ بالتالي: f تباين	3
	لنبين أن : $g \circ f$ شمول $\Rightarrow$ g شمول ليكن $y \in G$ ، باستعمال شمول $g \circ f$ نستنتج أن : $\exists x \in E \ / \ y = g \circ f(x) = g(f(x))$ و بوضع $b = f(x) \in F$ فإننا نستنتج أن: $\exists b \in F \ / \ y = g(b)$ وبالتالي: g شمول	4