سلسلة التمارين 3 (الأولى بكالوريا علوم رياضية وتجريبية)
2008 - 2007
مبرهنة الطاقة الحركية

تمرين 1

سيارة كتلتها $m = 900kg$ انطلقت على طريق مستقيمي بسرعة بدئية $V_0 = 100km/h$ وعند قطعها مسافة $d = 97,0m$ خلال المدة الزمنية $\Delta t = 6,54s$ ، توقفت عجلاتها بشكل مفاجئ .

1 ــ أحسب الطاقة الحركية البدئية للسيارة . حدد المرجع الذي اخترته لحساب هذه الطاقة .

2 ــ نعتبر أن قوة الاحتكاك المطبقة من طرف الطريق على العجلات شدتها ثابتة .

أ ــ اجرد القوى المطبقة على السيارة

ب ــ أحسب شدة قوة الاحتكاك المطبقة من طرف الطريق على العجلات .

3 ــ أحسب القدرة المتوسطة لقوة الاحتكاك خلال الكبح .

أجوبة : 1 ــ $E_C = 347kJ$ 2 ــ ب ــ $f = 3580N$ 3 ــ $\mathscr{P}_m(\vec{f}) = -53kW$

تمرين 2

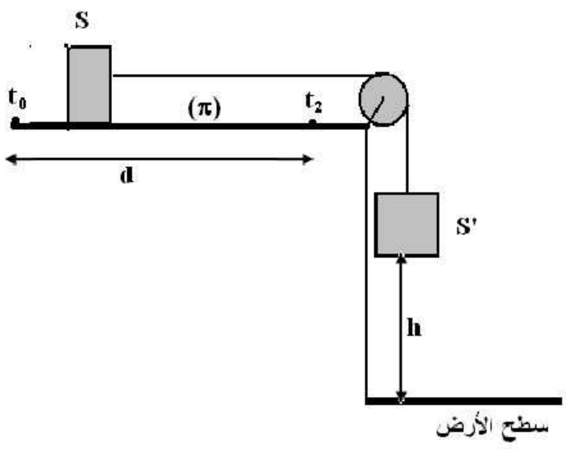
سيارة كتلتها $m = 800kg$ وسرعتها $72km/h$ في حركة هبوط مستقيمي على طريق مائلة بزاوية $\alpha = 4°$ بالنسبة لسطح الأرض , فوجئ السائق بحاجز يوجد في نقطة B ، فاضطر فرملة السيارة انطلاقا من نقطة A ، بحيث أن المسافة $d = AB = 92,0m$.

1 ــ اجرد القوى المطبقة على السيارة .

2 أوجد تعبير شغل هذه القوى خلال انتقال السيارة من A إلى B . واستنتج شدة قوة الاحتكاك التي نعتبرها ثابتة خلال هذه المرحلة . وقارنها بشدة وزن السيارة .

تمرين 3

نعتبر جسمين S و S′ كتلتهما على التوالي M و M′ مرتبطين بواسطة خيط غير قابل الامتداد وكتلته مهملة يمر من مجرى بكرة P بدون احتكاك وكتلتها مهملة . عند اللحظة $t_0 = 0$ المجموعة $\{S,S'\}$ في حالة سكون ويوجد S' على ارتفاع h من السطح الأفقي . نترك S' في سقوط رأسي بدون سرعة بدئية فينزلق الجسم S على المستوى (π) . نعتبر أن حركة الجسم على المستوى (π) تتم بالاحتكاك وأن القوة المقرونة بالاحتكاك تبقى ثابتة خلال الحركة . وأن المسافة المقطوعة من طرف الجسم S قبل توقفه نتيجة الاحتكاكات هي d $(d > h)$. نهمل تأثيرات الهواء .



1 ــ صف ما سيحدث خلال سقوط S' نحو السطح الأفقي .

2 ــ اجرد القوى المطبقة على الجسم S' خلال السقوط . بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية بين اللحظتين t_0 و t_1 (لحظة وصول الجسم إلى السطح الأفقي) أوجد تعبير السرعة v بدلالة M', g, h, T . v سرعة الجسم S' عند وصوله إلى السطح الأفقي . T شدة توتر الخيط قبل توقف الجسم S' .

3 ــ اجرد القوى المطبقة على الجسم S خلال انزلاقه على المستوى (π) في كل مرحلة .

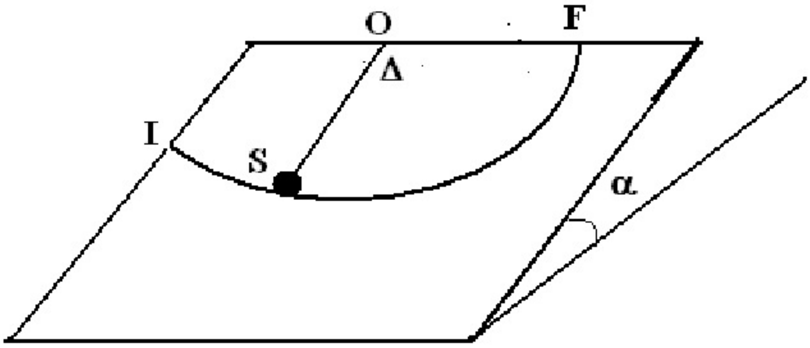
4 ــ بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية بين اللحظتين t_0 و t_1 وبين t_1 و t_2 بين أن شدة قوة الاحتكاك المطبقة من طرف المستوى على الجسم خلال حركة S هي كالتالي :

$$f = \frac{MM'gh}{M'(d-h)+Md}$$

بحيث أن t_2 اللحظة التي سيتوقف فيها الجسم S على المستوى (π) نتيجة الاحتكاكات

تمرين 4

نعتبر الجسم S كنقطة مادية كتلتها $m = 0,690kg$ يتحرك على مستوى مائل يكون زاوية $\alpha = 20°$ مع المستوى الأفقي . الجسم مرتبط بنقطة O ، توجد في أعلى المستوى المائل ، بواسطة خيط كتلته مهملة وغير قابل للامتداد واتجاهه عمودي على المحور الذي يمر منها . طول الخيط $\ell = 0,500m$ نأخذ $g = 9,80N/m$.



ينطلق الجسم من النقطة I بسرعة بدئية v_1 كما نعتبر أن الخيط يبقى متوترا خلال الحركة .

نعتبر المرجع الذي تدرس فيه الحركة المرتبط بالأرض مرجعا غاليليا .

1 ــ ما هو شكل مسار حركة الجسم S ؟

2 ــ نعتبر أن الاحتكاكات مهملة بين الجسم والمستوى المائل . عندما يمر الجسم من موضع توازنه المستقر O تكون سرعة مركز قصوره قيمتها هي $v_0 = 2m/s$. أجرد القوى المطبقة على الجسم ومثلها على التبيانة باعتماد اتجاهات هذه القوى .

عند وصول الجسم النقطة F ، أحسب سرعته في هذه النقطة ؟

3 ــ في الحقيقة هناك الاحتكاكات بين الجسم والمستوى المائل ، حيث تكون قيمة سرعته المقاسة في النقطة F هي $v_F = 0,500m/s$. نقرن قوى الاحتكاك بقوة شدتها f تبقى ثابتة خلال الحركة . أحسب شدتها .

تمرين 5

للأرض حركة دائرية حول الشمس ، شعاع هذا المسار الدائري هو $R = 1,5.10^8 km$.

نعطي كتلة الأرض $M_T = 6.10^{24} kg$ وشعاعها $R_T = 6380km$.

نعتبر أن الأرض كرة متجانسة شعاعها R_T وكتلتها M_T ، أحسب عزم قصورها بالنسبة لمحور القطبين ثم طاقتها الحركية للدوران عند دورانها حول هذا المحور .

2 ــ نعتبر الآن الأرض نقطية في حركتها حول الشمس أحسب طاقتها الحركية للإزاحة .

تمرين 6

تدور أسطوانة ذات عزم قصور $J_\Delta = 3.10^2 kg.m^2$ بسرعة توافق $45tr/min$. عندما نوقف المحرك تتوقف الأسطوانة تحت تأثير مزدوجة الاحتكاك بعد أن تنجز 120دورة .

1 ــ عين عزم مزدوجة الاحتكاك الذي نعتبره ثابتا .

2 ــ نشغل من جديد المحرك ، فتدور الأسطوانة بسرعة ثابتة تساوي $45tr/min$. استنتج شغل المحرك خلال دقيقة وكذا قدرته .

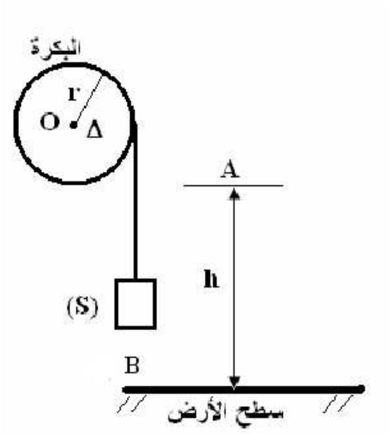
تمرين 7

تتكون المجموعة الممثلة في الشكل جانبه من :

* بكرة متجانسة شعاعها r وكتلتها M قابلة للدوران حول محور Δ أفقي منطبق مع محور تماثلها ، عزم قصورها بالنسبة لمحور الدوران (Δ) هو : $J_{\Delta}=\frac{1}{2}Mr^2$

* جسم صلب S نقطي ، كتلته m معلق بطرف خيط غير مدود ، ملفوف على مجرى البكرة ، ونعتبر أن الخيط لا ينزلق على مجرى البكرة أثناء الحركة وأن كتلته مهملة .

1 ـ نحرر S بدون سرعة بدئية انطلاقا من النقطة A والتي توجد على ارتفاع h من سطح الأرض عند اللحظة $t_0=0$ نعتبرها أصلا للتواريخ .



1 ـ 1 أوجد النسبة $b=\frac{E_{C2}}{E_{C1}}$ حيث E_{C1} و E_{C2} الطاقة الحركية عند اللحظة t بالتتابع للجسم (S) والبكرة .

1 ـ 2 أوجد تعبير الطاقة الحركية للمجموعة { بكرة ، S } عند اللحظة t بدلالة m,M,E_{C1} .

2 ـ بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على البكرة ثم على (S) بين اللحظتين t_A و t_B ، أوجد تعبير سرعة الجسم (S) عند اللحظة t_B بدلالة m,M,g,AB .

3 ـ نفصل الجسم (S) من الخيط ونطلقه من النقطة A بدون سرعة بدئية فيسقط ويصطدم بسطح الأرض عند النقطة C بسرعة $\vec{v}_0$ حيث يرتد نحو الأعلى بسرعة $\vec{v}_1=-e\vec{v}$ مع $0<e<1$.

3 ـ 1 أوجد بدلالة e,h الارتفاع h_1 القصوي الذي يصل إليه الجسم (S) بعد الارتداد الأول .

3 ـ 2 أوجد بدلالة e,h الارتفاع h_2 القصوي الذي يصل إليه الجسم بعد الارتداد الثاني .

3 ـ 3 استنتج بدلالة e,h,n الارتفاع القصوي الذي يصل إليه الجسم بعد الارتداد الرقم n .
أحسب h_5 في حالة $n=5$ علما أن : $e=0,9$ و $h=1m$.

R

تصحيح تمارين السلسلة 3
الشغل والطاقة الحركية
الأولى بكالوريا علوم رياضية وتجريبية 2008- 2007

تمرين 1

1 ـ الطاقة الحركية البدئية : $E_C = \frac{1}{2} m V_0^2$ بحيث أن $V_0 = 27,8 m/s$ أي أن $E_{C_0} = 347 kJ$

المرجع الذي تم اختياره مرجع غاليلي المرتبط بالأرض .

2 ـ جرد القوى المطبقة على السيارة : $\vec{P}, \vec{R} = \vec{R}_N + \vec{f}$ بحيث أن $\vec{f}$ قوة الاحتكاك .

ب ـ شدة قوة الاحتكاك المطبقة من طرف الطريق على العجلات :

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية بين لحظة الانطلاق ولحظة التوقف المفاجئ .

$$\Delta E_C = \sum W_{A \to B}\left(\vec{F}_i\right) \Leftrightarrow E_{Cf} - E_{ci} = W\left(\vec{P}\right) + W\left(\vec{R}\right)$$

$$W\left(\vec{P}\right) = 0 \quad W\left(\vec{R}\right) = W\left(\vec{R}_N\right) + W\left(\vec{f}\right)$$

$$W\left(\vec{R}_N\right) = 0 \quad W\left(\vec{f}\right) = -f.\Delta\ell$$

$$E_{cf} = 0 \quad E_{Ci} = E_{C0}$$

$$-E_{C0} = -f.\Delta\ell$$

وبالتالي فإن $f = \frac{E_{C0}}{\Delta\ell}$

تطبيق عددي : $f = 3580 N$

3 ـ حساب القدرة المتوسطة لقوة الاحتكاك خلال الكبح .

$$\mathcal{P} = \frac{W\left(\vec{f}\right)}{\Delta t} \Leftrightarrow \mathcal{P} = -\frac{f.\Delta\ell}{\Delta t}$$

تطبيق عددي : $\mathcal{P} = -53 kW$

تمرين 2

1 ـ القوى المطبقة على السيارة : $\vec{P}, \vec{R} = \vec{R}_N + \vec{f}$ بحيث أن $\vec{f}$ قوة الاحتكاك

2 ـ تعبير شغل القوى المطبقة على السيارة عند انتقاله من A إلى B :

$$\sum W\left(\vec{F}_i\right) = W\left(\vec{P}\right) + W\left(\vec{R}\right)$$

$$= mgAB \sin\alpha - f.AB$$

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على الجسم عند انتقاله من A إلى B

$$E_{CB} - E_{CA} = \sum W\left(\vec{F}_i\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} m v_A^2 = mgAB \sin\alpha - f.AB$$

$$f = \frac{m v_A^2}{2AB} + mg \sin\alpha$$

تطبيق عددي : $f = 2286 N$ عند مقارنتها نستنتج أن قوة الاحتكاك أقل شدة من وزن الجمع بأربع مرات .

تمرين 3

1 ـ عند وصول الجسم 'S إلى سطح الأرض يقطع الجسم S نفس المسافة h بنفس السرعة لأن الخيط متوتر وغير قابل الامتداد وكتلة البكرة مهملة .

إذا انتقل الجسم S بمسافة $\Delta\ell$ فإن الجسم S′ يسقط ب Δh بحيث أن

$$\Delta\ell = \Delta h \Leftrightarrow v = v'$$

أي أن لهما نفس السرعة .

عندما يتوقف الجسم S′ ، يتابع الجسم S حركته على المستوى π ويكون توتر الخيط منعدم .

2 ـ جرد القوى المطبقة على الجسم S′ :

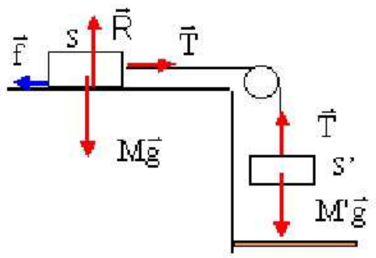
$\vec{P}'$ و $\vec{T}'$.

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على الجسم S′ خلال سقوطه بمسافة h :

$$\frac{1}{2}M'v^2 - \frac{1}{2}M'v_0^2 = W\left(\vec{P}'\right) + W\left(\vec{T}'\right)$$

$$\frac{1}{2}M'v^2 = M'gh - T'h$$

$$v = \sqrt{2gh - \frac{2T'h}{M'}}\,(1)$$



3 ـ جرد القوى المطبقة على S :

$\vec{P},\vec{R},\vec{T}$ في المرحلة الأولى أي عند قطعه المسافة h

في المرحلة الثانية القوى المطبقة عليه : $\vec{P},\vec{R}$

4 ـ نطبق مبرهنة الطاقة الحركية في المرحلة الأولى :

$$\frac{1}{2}Mv^2 - 0 = T.h - f.h \Leftrightarrow \frac{1}{2}Mv^2 = T.h - f.h \quad (2)$$

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية في المرحلة الثانية :

$$0 - \frac{1}{2}Mv^2 = -f\left(d-h\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}Mv^2 = f\left(d-h\right) \quad (3)$$

من العلاقة (2) و (3) نستنتج أن (4) $f.d = T.h$

في العلاقة (2)

$$\frac{1}{2}Mv^2 = f\left(d-h\right)$$

$$v^2 = \frac{2f\left(d-h\right)}{M}$$

في العلاقة (1)

$$v^2 = 2gh - \frac{2T.h}{M'} \Leftrightarrow \frac{2f\left(d-h\right)}{M} = 2gh - \frac{2fd}{M'}$$

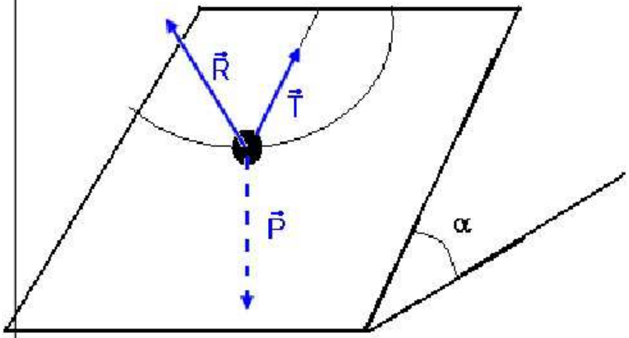
$$f\left(\frac{2\left(d-h\right)}{M} + \frac{2d}{M'}\right) = 2gh \Leftrightarrow f = \frac{gh}{\left(\frac{\left(d-h\right)}{M} + \frac{d}{M'}\right)}$$

$$f = \frac{ghMM'}{M'\left(d-h\right) + Md}$$

R

تمرين 4

1 ـ مسار حركة الجسم S هو عبارة عن قوس دائري .



2 ـ جرد القوى المطبقة على الجسم S : $\vec{P},\vec{T},\vec{R}$

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية بين موضع توازنه المستقر O والنقطة F :

$$\frac{1}{2}mv_F^{\,2}-\frac{1}{2}mv_O^{\,2}=W\left(\vec{R}\right)+W\left(\vec{T}\right)+W\left(\vec{P}\right)$$

$$W\left(\vec{R}\right)=0,W\left(\vec{T}\right)=0$$

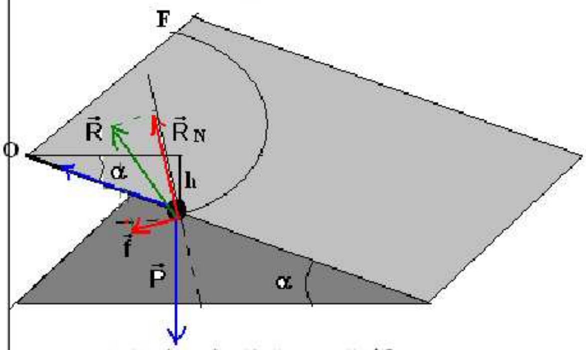
لأن $\vec{T}$ و $\vec{R}$ متعامدين على المسار .

$$\frac{1}{2}mv_F^{\,2}-\frac{1}{2}mv_O^{\,2}=W\left(\vec{P}\right)$$

$$\frac{1}{2}mv_F^{\,2}-\frac{1}{2}mv_O^{\,2}=-mg\ell\sin\alpha$$

$$v_F=\sqrt{v_0^{\,2}-2g\ell\sin\alpha}$$

تطبيق عددي : $v_F=0,805m/s$



مقطع للمستوى المائل عند موضع التوازن

3 ـ عند وجود الاحتكاكات تكون $\vec{R}$ مع الخط المنظمي على المستوى المائل زاوية احتكاك ومنحاها معاكس لمنحى الحركة أي يمكن أن نفككها إلى مركبتين

مركبة مماسة للمسار وهي قوة الاحتكاك $\vec{f}$ ومركبة

منظمية عمودية على المسار $\vec{R}_N$ وشغلها منعدم

وبالتالي نتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية نحصل على :

$$\frac{1}{2}mv^2_{F(mesurer)}-\frac{1}{2}mv_O^{\,2}=W\left(\vec{P}\right)+W\left(\vec{f}\right)\quad(1)$$

وفي السؤال الأول قمنا بحساب السرعة في حالة غياب الاحتكاكات أي أن :

$$\frac{1}{2}mv_{F(calculer)}^{\,2}-\frac{1}{2}mv_O^{\,2}=W\left(\vec{P}\right)\quad(2)$$

وبالتالي $(1)-(2)\Leftrightarrow\frac{1}{2}mv^2_{F(mesurer)}-\frac{1}{2}mv^2_{F(calculer)}=W\left(\vec{f}\right)$

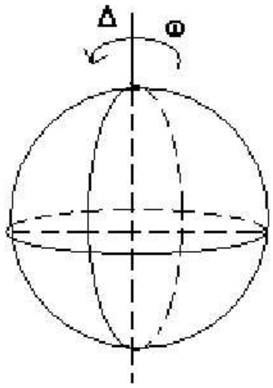
شغل قوة الاحتكاك $\vec{f}$ هو : $W\left(\vec{f}\right)=-f.\widehat{OF}=-f.\ell.\frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{2}mv^2_{F(mesurer)}-\frac{1}{2}mv^2_{F(calculer)}=-f.\ell.\frac{\pi}{2}$$

$$f=\frac{mv^2_{F(calculer)}-mv^2_{F(mesurer)}}{\pi\ell}=0,175N$$

تمرين 5

1 ـ نطبق العلاقة التالية : $E_C=\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$ بحيث أن



$$J_\Delta = \frac{2}{5} M_T R_T^{\,2} = 9,77.10^{37}\, kg.m^2$$

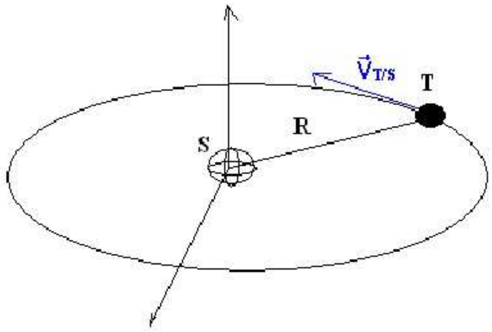
$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{24\times3600} = 7,27.10^{-5}\, rad\,/\,s$$

تطبيق عددي : $E_C = 2,58.10^{27}\, J$

2 ـ طاقتها الحركية عندما تدور حول الشمس :

$$E_C = \frac{1}{2} M_T V^2$$

$$V = R.\Omega$$



بحيث أن Ω السرعة الزاوية التي تدور بها الأرض حول الشمس :

$$\Omega = \frac{\Delta\Theta}{\Delta T} = \frac{2\pi}{365\times24\times3600} = 1,99.10^{-7}\, rad\,/\,s$$

وبالتالي ف $E_C = 2,68.10^{33}\, J$

تمرين 6

1 ـ عزم مزدوجة الاحتكاك

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية بين لحظة توقف المحرك وتوقف الأسطوانة :

$$\frac{1}{2} J_\Delta \omega_f^{\,2} - \frac{1}{2} J_\Delta \omega_i^2 = \mathcal{M}\Delta\theta$$

$$\omega_f = 0 , \omega_i = \omega(moteur) = \frac{45.2\pi}{60} = 4,71 rad\,/\,s$$

$$-\frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^{\,2} = \mathcal{M}\Delta\theta \Leftrightarrow \mathcal{M} = -\frac{J_\Delta \omega_0^2}{2\Delta\theta}$$

تطبيق عددي : $\mathcal{M} = -4,4.10^{-4}\, N.m$

2 ـ عند تشغيل من جديد المحرك يجب اعتبار مزدوجة الاحتكاك وبما أن المحرك يدور بسرعة ثابتة أي أن تغير الطاقة الحركية منعدم

$$\Delta E_C = \mathcal{M} + \mathcal{M}_- = 0 \Leftrightarrow \mathcal{M}_- = -\mathcal{M} = 4,4.10^{-4}\, N.m$$

وبالتالي فشغل المحرك :

$$W = \mathcal{M}\Delta\theta \Leftrightarrow W = \mathcal{M}\,\omega_e \Delta t$$

تطبيق عددي :

$$W = 0,124 J$$

والقدرة هي : $\mathcal{P} = \mathcal{M}\omega$

تطبيق عددي : $\mathcal{P} = 2,07.10^{-3} W$

تمرين 7

1 ـ تعبير النسبة $b = \frac{E_{C2}}{E_{C1}}$.

تعبير الطاقة الحركية لجسم في حركة إزاحة : $E_{C1} = \frac{1}{2} m V^2$

نعبر عن الطاقة الحركية للبكرة في حالة الدوران حول محورها بالعلاقة التالية :

$$E_{C2}=\frac{1}{2}J_{\Delta}\omega^2=\frac{1}{4}Mr^2.\frac{V^2}{r^2}$$

$$E_{C2}=\frac{MV^2}{4}$$

وبالتالي : $b=\frac{E_{C1}}{E_{C2}}=\frac{M}{2m}$

1 ــ 2 تعبير الطاقة الحركية E_C للمجموعة { بكرة ، (S) }

$$E_C=E_{C1}+E_{C2}$$

من السؤال السابق لدينا : $E_{C2}=bE_{C1}$ أي أن $E_C=E_{C1}\left(1+\frac{M}{2m}\right)$

2 ــ تعبير سرعة (S) .

القوى المطبقة على S خلال سقوطه : $\vec{P},\vec{T}$

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على S بين اللحظتين t_A و t_B

$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2=W_{A\to B}(\vec{P})+W_{A\to B}(\vec{T})$$

$$\frac{1}{2}m\left(v_B^2-v_A^2\right)=mgAB-T.AB$$

$$v_A=0\Rightarrow\frac{1}{2}mv_B^2=mgAB-T.AB\quad(1)$$

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على البكرة :

$$\frac{1}{2}J_{\Delta}\left(\omega_B^2-\omega_A^2\right)=W\left(\vec{P}'\right)+W\left(\vec{R}'\right)+W\left(\vec{T}'\right)$$

$$W\left(\vec{P}'\right)=0,W\left(\vec{R}'\right)=0,\omega_A=0$$

$$\frac{1}{2}J_{\Delta}\omega_B^2=W\left(\vec{T}'\right)$$

$$W\left(\vec{T}'\right)=-W\left(\vec{T}\right)$$

$$\frac{1}{2}J_{\Delta}\omega_B^2=-W\left(\vec{T}\right)\quad(2)$$

من العلاقتين (1) و (2) نستنتج أن : $\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}J_{\Delta}\omega_B^2=mgAB$

وحسب السؤال الأول توصلنا أن الطاقة الحركية للدوران البكرة هو :

$$\frac{1}{2}J_{\Delta}\omega_B^2=\frac{MV_B^2}{4}\Rightarrow\frac{1}{2}mV_B^2+\frac{MV_B^2}{4}=mg.AB$$

$$V^2{}_B=\left(\frac{2mg.AB}{m+\frac{M}{2}}\right)\Leftrightarrow V_B=\sqrt{\left(\frac{2mg.AB}{m+\frac{M}{2}}\right)}$$

3 ـ 1 تعبير h_1

يصطدم الجسم أول مرة بسطح الأرض بسرعة $\vec{V}_0$ حيث أنه حسب مبرهنة الطاقة الحركية :

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = mg.h \Leftrightarrow V_0^2 = 2gh$$

يرتد الجسم نحو الأعلى بسرعة V_1 حيث يصل الجسم بعد الاصطدام الأول إلى ارتفاع h_1

بحيث حسب مبرهنة الطاقة الحركية لدينا : $0-\frac{1}{2}mV_1^2 = -mgh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{V_1^2}{2g}$

لدينا حسب المعطيات $V_1 = -eV_0$ وبالتالي أن $h_1 = \frac{e^2V_0^2}{2g}$ وبما أن $V_0^2 = 2gh$ فإن $h_1 = e^2h$

3 ـ 2 تعبير h_2

بنفس الطريقة نتوصل إلى : $h_2 = e^2h_1 = e^4h$

3 ـ 3 حساب h_5

من الملاحظة التالية وهي :

$$h_1 = e^{2\times 1}h$$

$$h_2 = e^{2\times 2}h$$

.

.

$$h_n = e^{2\times n}h$$

وبالتالي ف $h_5 = e^{2\times 5}h = 34,7cm$