

## المجموعة الميكانيكية المتذبذبة ومظاهر الطاقة

### تمارين

#### تمرين 1

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ  $g = 10 \text{ m/s}^2$

نعتبر نوasa مرنا رأسيا مكونا من :

– نابض لفاته غير متصلة وكتلته مهملة وصلابته  $K = 40 \text{ N/m}$  مثبت بحامل .

– جسم صلب  $S$  كتلته  $m = 100 \text{ g}$  ومركزه  $G$  مثبت بالطرف الحر للنابض

1 – أوجد إطالة النابض  $\Delta l$  عند التوازن بدالة  $A, K, m$  واحسب  $\Delta l$

2 – نزح الجسم  $S$  رأسيا نحو الأسفل ، عن موضع توازنه المنطبق مع المعلم الفضاء  $Oz$

بمسافة  $Z_m = 4 \text{ cm}$  ونحرره بدون سرعة بدئية عند لحظة اختارها كأصل للتاريخ .

2 – 1 أوجد باعتمادك على الدراسة التحريرية المعادلة التفاضلية المميزة للحركة واستنتج طبيعتها .

2 – 2 أكتب المعادلة الزمنية للحركة  $z = f(t)$  .

2 – 3 بين أن سرعة الجسم  $S$  لحظة مروره أول مرة من موضع توازنه تكتب

$$V_1 = -Z_m \sqrt{\frac{K}{m}}$$

أحسب  $V_1$  .

3 – ينفصل الجسم عن النابض لحظة مروره من موضع توازنه في منحي  $\tilde{k}$  . أوجد تعبير المعادلة الزمنية  $z = f(t)$  في المعلم  $Oz$  لحركة  $S$  عن النابض  $S$  . اختار لحظة انفصال  $S$  عن النابض كأصل للتاريخ .

#### تمرين 2

نعتبر مجموعة ( $S$ ) مكونة من كرة متجلسة شعاعها  $R$  وكتلتها  $m = 100 \text{ g}$  ومن ساق متجلسة لها

نفس الممتدة وطولها  $l = 10R$  طرفها الأسفل ملحم بالكرة عند النقطة  $A$  . المجموعة ( $S$ ) قابلة

للدوران حول محور ( $\Delta$ ) أفقى ثابت . عزم قصور المجموعة ( $S$ ) بالنسبة للمحور ( $\Delta$ ) هو

$$J_\Delta = 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

نزح المجموعة عن موضع توازتها المستقر بزاوية  $\theta_m = 10^\circ$  ، ثم نحررها بدون سرعة بدئية في اللحظة  $t = 0$  . نعتبر الاحتكاكات مهملة .

1 – أوجد المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة ( $S$ ) .

2 – حدد طبيعة الحركة ودورها الخاص واكتب المعادلة الزمنية لحركتها .

نعطي :  $R = 2.5 \text{ cm}$ ,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

3 – أعط بدالة الزمن ، تعبير الطاقة الحركية للمجموعة ( $S$ ) وحدد قيمتها القصوى .

4 – أستنتاج بدالة الزمن ، تعبير طاقة الوضع الثقلية للمجموعة ( $S$ ) .

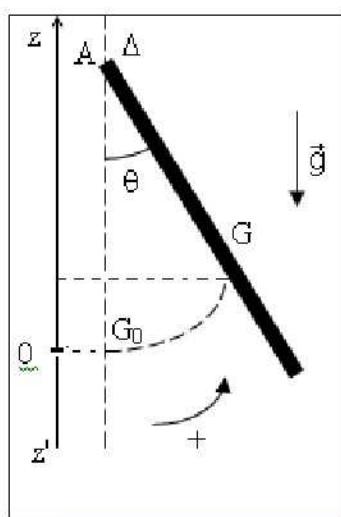
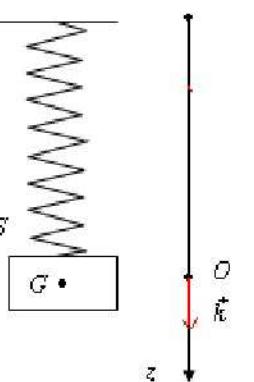
#### تمرين 3

نعتبر ساقا متجلسة  $AB$  كتلتها  $M = 0.25 \text{ Kg}$  وطولها  $L = 0.6 \text{ m}$  ومركز قصورها  $G$  ، يامكانها الدوران في مجال الثقالة حول محور  $\Delta$  أفقى ثابت يمر من طرفها  $A$  . نعلم موضع مركز قصور الساق في كل لحظة بالأوصول الزاوي ( $t$ ) .

ونعطي عزم قصور الساق بالنسبة للمحور  $\Delta$

$$J_\Delta = \frac{I}{3} ML^2 \quad \text{و} \quad g = 10 \text{ m/s}^2$$

نهمل جميع الاحتكاكات خلال هذه الدراسة .



## I - الدراسة التحريرية.

نزيح الساق عن موضع توازنه بزاوية  $\theta_m$  في المنحى الموجب ثم نحررها بدون سرعة بدئية عند اللحظة  $t=0$

- 1 - أوجد تعبير المعادلة التفاضلية لحركة الساق. ما هي طبيعة الحركة؟

- 2 - أوجد حل للمعادلة التفاضلية في حالة التذبذبات ذات وسع

$$\text{صغير } \theta_m = \frac{\pi}{30} \text{ rad}$$

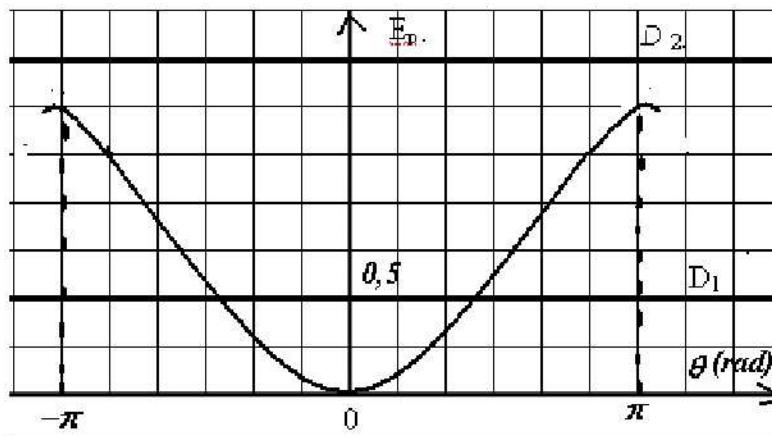
- 3 - أحسب قيمة الدور  $\theta_0$ .

## II - الدراسة الطافية

يمثل الشكل جانبه تغيرات طاقة الوضع التقالية للمجموعة بدالة الزاوية  $\theta$ . تعتبر المستوى الأفقي المار من  $G_0$  مرجعاً لطاقة الوضع التقالية.

- 1 - بين أن طاقة الوضع للساق يمكن أن نعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$E_p = MgL \frac{(1-\cos \theta)}{2}$$



خلال حركة الساق حول المحور  $\Delta$  يمكن إعطاء قيمتين للطاقة الميكانيكية والمتمثلتين في الشكل بالمستقيمين  $D_1$  و  $D_2$ .

الحالة الأولى: يمثل  $D_1$  الطاقة الميكانيكية للمجموعة.

أ - عين السرعة الزاوية للساق أثناء مرورها بموضع التوازن في المنحى الموجب.

ب - عين من خلال المنحى موضع أو مواضع الساق التي تكون فيها قيمة الطاقة الحرارية  $E_c = 0,25 E_0$ .

الحالة الثانية: يمثل  $D_2$  الطاقة الميكانيكية الجديدة للمجموعة. ما هو شكل مسار مركز القصور  $G$  للساق؟ علل الجواب.

أحسب القيمة الدنيا للسرعة الزاوية  $\dot{\theta}_1$  للساق وقيمتها القصوى  $\dot{\theta}_2$  حينما تدور في المنحى الموجب

## تمرين 4

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ  $g = 10m/s^2$ .

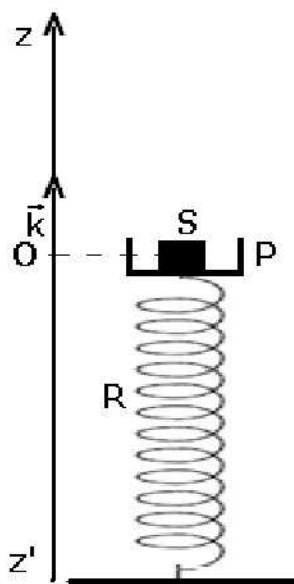
يمثل الشكل جانبه جسم (S) يعتبره نقطة مادية كتلتها  $m_1 = 100g$  موضوع على كفة  $P$  ذات سmek

صغير جداً وكتلتها  $m_2 = 200g$ . ثبتت عند مركزها  $O$  طرف نابض  $R$  ذي لفات غير متصلة وكتلة مهملة

، صلابته  $k = 300N/m$  يوجد في وضع رأسى الطرف الآخر ثابت على مستوى أفقي ثابت.

توجد المجموعة في حالة توازن حيث ينتمي مركز قصورها  $G$  إلى نفس الخط الأفقي المار من  $O$  أصل

معلم ثابت  $(O, \bar{k})$ .

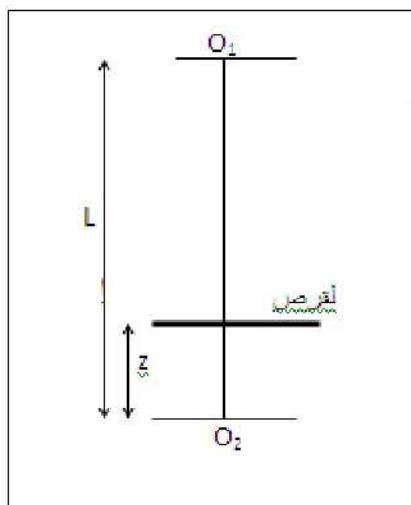


- 1 - أوجد الانضغاط  $|\Delta\ell|$  للنابض بدلالة  $m_1$  و  $m_2$  و  $g$  و  $k$ . أحسب  $|\Delta\ell|$ .
- 2 - عند اللحظة  $t=0$  نقوم بضغط المجموعة  $\{S, P\}$  نحو الأسفل ب  $0,2m$  وذلك بإعطائها سرعة بدئية  $\vec{v}_0$  موجهة نحو الأسفل وقيمتها  $v_0 = 1,2m/s$  فنحصل على حركة تذبذبية رأسية.
- 2 - 1 بتطبيق القانون الثاني لنيوتون على المجموعة  $\{S, P\}$  ، اوجد المعادلة التفاضلية لحركة  $G$ .

- 2 - 2 تقبل المعادلة التفاضلية حلا لها  $z(t) = z_m \cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$  ، استنتاج الدور الخاص للحركة وحدد  $z_m$  و  $\varphi$ .
- 3 - الدراسة الطاقية
- نختار أصل المعلم كمرجع لطاقة الوضع الثقالية  $(E_{pp} = 0)$  وطاقة الوضع المرنة  $(E_{pe} = 0)$ .
- 3 - 1 أوجد تعبير الطاقة الميكانيكية للمجموعة واستنتاج المعادلة التفاضلية لحركة المتذبذب.
- 3 - 2 أحسب السرعة  $v$  عند مرور المجموعة  $\{S, P\}$  من النقطة  $O$  لأول مرة.

- 3 - 3 بين أن المجموعة ممكن أن تذبذب بوسع  $z_i$  أكبر من  $z$  دون أن يغادر الجسم (S) الكفة (P) طالما أن قيمة  $z_i$  لم تتجاوز قيمة قصوية  $z_{max}$ . أحسب  $z_{max}$ . ما هو استنتاجك؟
- 4 - تجريبيا عندما تمر المجموعة من النقطة  $O$  مباشرة ينفصل الجسم (S) عن الكفة. نقبل أن  $z < 0$  الجسم (S) يبقى ملتصقا بالكفة و  $z > 0$  الجسم (S) ينفصل عن الكفة و  $z = 0$  الجسم (S) و الكفة (P) لهما نفس السرعة  $v$ .

نضع  $z_{max}$  الارتفاع القصوي الذي يمكن أن يصل إليه الجسم (S) و  $Z_{max}$  الارتفاع القصوي الذي يمكن أن تصل عليه الكفة والنابض. أوجد تعبيري  $z_{max}$  و  $Z_{max}$ .



**تمرين 5**  
نجز نواس لي بتعليق قرص عزم قصوره بالنسبة للمحور  $\Delta$   $J_\Delta = 5 \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2$  بطرف سلك فلزي رأسي طوله  $L = 0,50m$ . الطرف الآخر للسلك مثبت في النقطة  $O_1$  بحيث يكون محوري دوران السلك والقرص منطبقين . يوجد القرص في مستوى أفقي .

- 1 - أوجد طبيعة حركة القرص وأعط تعبير دوره  $T_0$ .
- 2 - احسب ثابتة لي السلك إذا كان  $T_0 = 0,92s$ .
- 3 - نثبت الآن طرف السلك الذي يبقى رأسيا في النقطتين  $O_1$  و  $O_2$ . يوجد مركز قصور القرص على المسافة  $z$  من الطرف السفلي  $O_2$  للسلك . نهمل سمك القرص بالنسبة ل  $L$ .
- A - أوجد طبيعة حركة النواس الجديد وأعط تعبير دوره  $T'_0$  بدلالة  $T_0$  و  $L$  و  $z$ . علما أن ثابتة لي السلك تناسب عكسيا مع طوله.

$$b - \text{أحسب } T'_0 \text{ نعطي } \left( z = \frac{L}{3} \right)$$

- ج - بين أن الدور  $T'_0$  يبلغ قيمة قصوية  $T'_{max}$  عندما تأخذ  $z$  قيمة معينة  $z_m$  احسب  $z_m$  واستنتاج

**تمرين 6**

النابض الحلزوني لساعة مماثل لسلك ثابتة له  $C=4.10^{-5} \text{ N.m.rad}^{-1}$ .

يدبر هذا النابض رقاصل له شكل عجلة ، عزم قصورها بالنسبة لمحورها

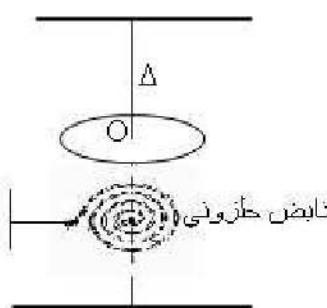
$$J_{\Delta} = 4.10^6 \text{ kg.m}^2$$

بعد الرقاصل عن موضع توازنه حيث يكون النابض مرتخيا بإدارته بزاوية  $\alpha=30^\circ$  ونطلقه بدون سرعة بدئية .

1 - عين السرعة الزاوية القصوية للرقاصل .

2 - أحسب الطاقة الحركية وطاقة الوضع للنواس عندما تأخذ الاستطالة

$$\frac{\theta_m}{2}$$

**تمرين 7**

ثبتت في أحد قضيب طوله  $l=40\text{cm}$  جسما صلبا (A) كتلته  $m=10\text{g}$  بحيث يمكن اعتباره نقطة مادية.

يمكن للقضيب أن يدور في مستوى رأسيا بدون احتكاك، حول محور  $\Delta$  أفقي وثابت يمر من النقطة O .

نحمل كتلة القضيب بالنسبة لكتلة الجسم (A) فتحصل على نواس عزم قصوره بالنسبة للمحور

$$J_{\Delta} = m l^2$$

1 - نزيح القضيب عن موضع توازنه الرأسيا بزاوية  $\theta_m$  ثم نطلقه بدون سرعة بدئية .

أ - بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك ، برهن على أن حركة الجسم (A) دائيرية جيبيّة في حالة التذبذبات ذات الوسع الضعيف .

ب - أعط تعبير الدور T لهذا النواس . واحسب قيمة T .

2 - نعتبر المجموعة {الجسم (A) - القضيب، الأرض}.

أ - برهن على أن الطاقة الحركية للمجموعة تساوي الطاقة الحركية للجسم (A).

ب - أعط تعبير هذه الطاقة بدلالة A , m والسرعة الزاوية  $\theta$  للقضيب .

ج - أوجد تعبير طاقة الوضع الثقالية للمجموعة بدلالة m وا g و  $\theta$  .

$\theta$  : زاوية انحراف القضيب مع وضعه الرأسيا.

نختار كمراجع لطاقة الوضع المستوى الأفقي المار من (A) في حالة توازن القضيب.

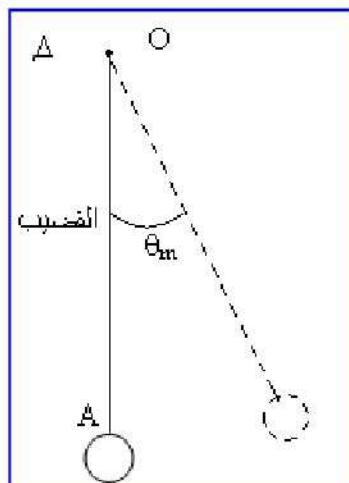
د - عين تعبير الطاقة الميكانيكية للمجموعة بدلالة m وا g و  $\theta_m$  .

3 - نعتبر من جديد القضيب في وضعه الرأسيا ( التوازن المستقر )، نعطي للجسم (A) سرعة بدئية أفقية  $V_A$  منظمها  $2\text{m/s}$ .

أ - بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية أوجد الزاوية القصوية لانحراف القضيب بالنسبة لوضعه الرأسيا.

- ما السرعة الدونية التي يجب اعطاؤها للجسم (A) لكي يصل القضيب إلى وضع توازنه غير المستقر .

- صف حركة المتذبذب إذا فاقت السرعة  $V_A$  قيمة هذه السرعة الدونية . نعطي :  $g=10\text{m/s}^2$



## المجموعات الميكانيكية المتذبذبة ومظاهر الطاقة تصحيح التمارين

### تمرين 1

1 - تحديد  $\Delta\ell$  عند التوازن  $\bar{P} + \bar{F} = \bar{0}$  الإسقاط على Oz

$$\text{إذن } \Delta\ell = 2,5 \text{ cm} \quad \text{تطبيق عددي}$$

2 - تحديد المعادلة التفاضلية

نختار معلم Oz كمعلم غاليلي ونطبق العلاقة الأساسية للديناميك  $\bar{P} + \bar{F}' = m\bar{a}$  إسقاط العلاقة على Oz

$$\Delta\ell' = \Delta\ell + z \quad \text{حيث أن } \Delta\ell' = \Delta\ell + z \quad \text{إطالة النابض عند اللحظة } t \\ \text{عند التوازن } \bar{P} + \bar{F}' = \bar{0} \quad \text{إذن } mg - K\Delta\ell' = m\ddot{z}$$

أن المعادلة التفاضلية للحركة هي  $\ddot{z} + \frac{K}{m}z = 0$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad \text{وتصبح المعادلة } \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 = \frac{K}{m}$$

إذن فالحركة مستقيمية جيبية نبضها الخاص هو :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

2 - المعادلة الزمنية للحركة

$$z = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{حيث أن } z = Z_m \cos(20t + \varphi)$$

و عند اللحظة  $t=0$   $z = Z_m \cos(20 \cdot 0 + \varphi) = Z_m \cos(\varphi)$  أي أن  $\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

المعادلة الزمنية تكتب على الشكل التالي

$$z = 4 \cdot 10^{-2} \cos(20t)$$

$$2 - نبين أن \quad V_I = -Z_m \sqrt{\frac{K}{m}}$$

نحدد السرعة في اللحظة  $t$  وذلك باشتتاقاف  $v = -Z_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

عند مرور الجسم من موضع توازنه تكون القيمة المطلقة لسرعته قصوية  $V_I = \pm Z_m \omega_0$  وبما أنه يمر

$$V_I = -Z_m \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{أي أن } \bar{V}_I = -Z_m \sqrt{\frac{K}{m}} \bar{k} \quad \text{أي أن } \bar{V}_I = -Z_m \omega_0 \bar{k}$$

تطبيق عددي  $V_I = 0,8 \text{ m/s}$

3

الهواء

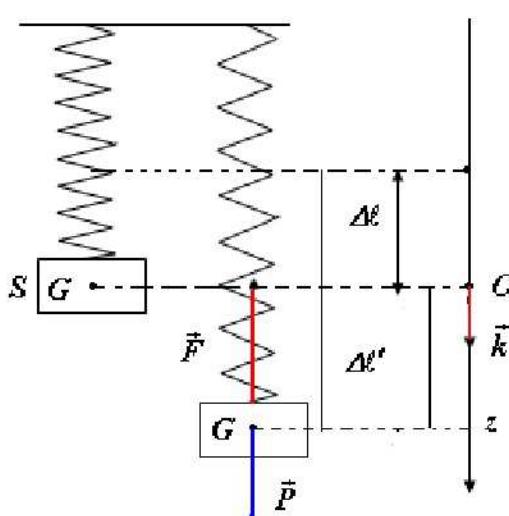
تسارع الجسم هو  $a = g$  ونأخذ  $z_0 = 0$  والسرعة البدئية  $V_0 = -V_I$

$$z = 5t^2 + 0,8t$$

### تمرين 2

1 - المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة (S)

المجموعة (S) قابلة للدوران حول المحور  $\Delta$



نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على المجموعة ( $S$ ) في معلم أرضي نعتبره غاليليا .  
جرد القوى المطبقة على المجموعة ( $S$ ) :  
 $\bar{R}$  تأثير المحور على الجسم ( $S$ ) .

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\bar{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\bar{R}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\bar{R}) = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_{\Delta}(\bar{P}) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

من خلال الشكل يتبيّن أن

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\bar{P}) = -2mg \cdot OH$$

$$OH = OG \sin \theta$$

لنحدد  $OG$  بتطبيق العلاقة المرجحية على المجموعة ( $S$ ) :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m\overrightarrow{OG_1} + m\overrightarrow{OG_2}}{2m} \quad \text{حيث أن } G_1 \text{ مركز قصور الساق و } G_2 \text{ مركز قصور الكرة}$$

$$\overrightarrow{OG_2} = 11R\vec{i} \quad \overrightarrow{OG_1} = 5R\vec{i} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OG} = 8R\vec{i}$$

$$OG = 8R \quad \text{وبالتالي فإن} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{16R}{2}\vec{i} = 8R\vec{i}$$

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\bar{P}) = -2mg \cdot OG \sin \theta \Rightarrow \mathcal{M}_{\Delta}(\bar{P}) = -16mgR \sin \theta$$

$$16mgR \sin \theta + J_{\Delta}\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{16mgR}{J_{\Delta}} \sin \theta = 0 \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{16mgR}{J_{\Delta}} \theta = 0 \quad \text{أي أن} \quad \theta_m = 10^\circ \quad \text{فإن} \quad \sin \theta \approx \theta$$

طبيعة حركة المجموعة دورانية جيبية بحيث المعادلة التفاضلية تقبل حلًا لها المعادلة ذات الشكل

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \quad \text{التالي}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{16mgR}} = 1s \quad \text{دورها الخاص يكتب على الشكل التالي :}$$

2 – المعادلة الزمنية لحركة المجموعة ( $S$ ) هي :

$$\theta_m = 10^\circ = \frac{\pi}{18} rad \quad \text{حيث أن} \quad \theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

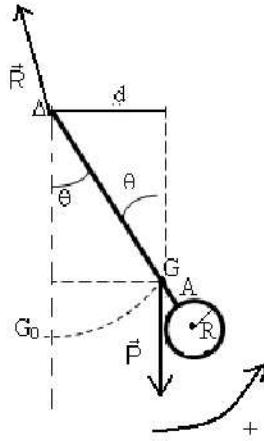
$$\theta(0) = \theta_m = \theta_m \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \quad \text{عند اللحظة} \quad t = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\theta(t) = \frac{\pi}{18} \cos(2\pi t)$$

## 5 – الطاقة الحرارية للمجموعة بدلالة الزمن $t$

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(2\pi t)$$

تكون الطاقة  $E_C$  قصوية



$$-1 \leq \sin(2\pi t) \leq 1 \Rightarrow \sin^2(2\pi t) \leq 1$$

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(2\pi t) \leq \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$$

$$E_C \leq \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$$

إذن القيمة القصوى للطاقة الحركية هي :  $E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$

تطبيق عددي :  $E_{C_{max}} = 6 \cdot 10^{-3}$

### 6 – نستنتج تعبير طاقة الوضع التقالية للمجموعة S :

بما أن الاحتكاكات مهملة نطبق انحفاظ الطاقة الميكانيكية بين موضعين وهما الموضع التوازن الذي تمر

منه المجموعة وتكون هنا السرعة قصوى أي أن الطاقة الميكانيكية قصوى  $E_{C_{max}} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$  ونعتبر

أن طاقة الوضع منعدمة أي أن  $E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$  . و موضع ثانى في اللحظة  $t$  أي أن الطاقة

$$E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + E_p$$

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + E_p = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 (1 - \sin^2(\omega_0 t))$$

$$E_p = E_{C_{max}} \cos^2(2\pi t)$$

### تمرين 3

I - الدراسة التحريرية

1 - المعادلة التفاضلية

القوى المطبقة على الساق  $\vec{P}$  و  $\vec{R}$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الساق :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$-Mg \frac{L}{2} \sin \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{2J_{\Delta}} \sin \theta = 0$$

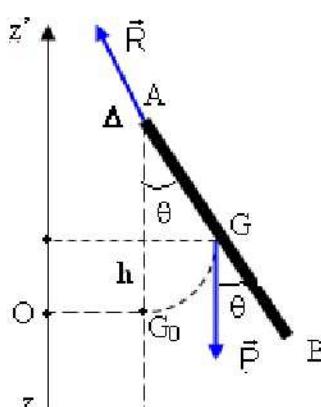
حسب شكل المعادلة التفاضلية فهي ليست خطية إذن فحركة الساق حركة تذبذبية

2 - المعادلة التفاضلية في حالة تذبذبات ذات وسع صغير حسب قانون التوازن ( لا يتعلّق دور حركة النواس بوسع الذبذبات في حالة الذبذبات ذات وسع صغير )

في حالة تذبذبات ذات وسع صغير  $\theta_m \approx \theta$  نعتبر أن  $\sin \theta \approx \theta$

وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L} \theta = 0 \quad \text{إذن فالمعادلة التفاضلية هي } J_{\Delta} \ddot{\theta} + \frac{MgL}{2J_{\Delta}} \theta = 0$$



### 3 - حساب قيمة الدور :

حسب المعادلة التفاضلية في حالة التذبذبات ذات وسع صغير فإن حركة النواس حركة تذبذبية جيبية

$$T_0 = 1,26s \quad \text{دورها الخاص} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

#### II - الدراسة الطاقية

##### 1 - نبين العلاقة

نعلم أن طاقة الوضع الثقالية هي :  $E_p = Mgz + C$  حسب الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية وحسب الشكل جانبى

بالنسبة  $E_p = 0$  إذن  $C = 0$  وطاقة الوضع تكتب على الشكل التالي  $E_p = Mgz$  بحيث أن

$$z = \frac{L}{2}(1 - \cos \theta)$$

$$E_p = \frac{MgL(1 - \cos \theta)}{2} \quad \text{ومنه}$$

#### 2 -

الحالة الأولى : عند مرور الساق من موضع توازنه . فحسب الشكل  $\theta = 0$  و  $E_m = E_c = 0,5J$

$$E_p = 0$$

$$\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_m^2 = 0,5 \Rightarrow \dot{\theta}_m = \sqrt{\frac{2 \times 0,5}{J_\Delta}} = 5,77 \text{ rad/s}$$

ب - موضع الساق عندما تكون  $E_c = 0,25J$  أي أن

$$\theta = \pm \frac{\pi}{3} \text{ rad} \quad \text{فحسب الشكل } E_m = E_p + E_c \Rightarrow E_p = E_m - E_c = 0,5 - 0,25 = 0,25J$$

الحالة الثانية :

عندما تكون  $E_m > E_c \Rightarrow E_c \neq 0$  أي أن الساق ستدور حول المحور  $\Delta$  .

- القيمة القصوية والقيمة الدنيا للسرعة الزاوية  $\dot{\theta}$

تكون السرعة الزاوية قصوية عندما تكون الطاقة الحركية  $E_c$  قصوية ونرمز لها بـ  $E_{C\max}$  حيث تكون طاقة الوضع ذئبة وحسب المبيان أن طاقة الوضع الدنيا عندما تكون  $\theta = 0$  أي  $E_{p\min} = 0$  وفي هذه

$$E_m = E_{C\max} = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_{\max}^2 \Rightarrow \dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{J_\Delta}} \quad \text{الحالة}$$

$$E_m = 1,5J \quad \text{وأن } J_\Delta = \frac{1}{3} ML^2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2 \quad \text{lدينا}$$

$$\dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{J_\Delta}} = 10,8 \text{ rad/s}$$

تكون السرعة الزاوية ذئبة عندما تكون الطاقة الحركية ذئبة  $E_{C\min}$  وتكون طاقة الوضع قصوية وفي هذه

الحالة

$$E_m = E_{c\min} + E_{p\max} \Rightarrow E_{c\min} = E_m - E_{p\max}$$

$$\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_{\min}^2 = E_m - E_{p\max} \Rightarrow \dot{\theta}_{\min} = \sqrt{\frac{2(E_m - E_{p\max})}{J_\Delta}} \quad \text{أي أن}$$

حسب المبيان لدينا :

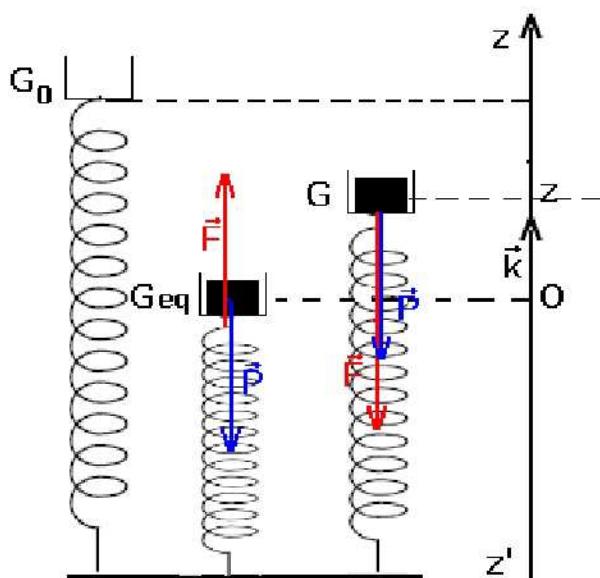
$$\theta_{\min} = \sqrt{\frac{2(E_m - E_{p\max})}{J_\Delta}} = 4,08 \text{ rad/s} \quad \text{وبالتالي : } E_{p\max} = 1,5J \quad E_m = 1,75J$$

#### تمرين 4

نعتبر أن النابض عندما يكون لا مطال ولا مكبوس وتوجد فوقه الكفة  $P$  أن طوله هو  $\ell_0$  عند وضع الجسم ( $S$ ) فوق الكفة يصبح طول النابض  $\ell$  ويعتبر هذا الموضع موضع التوازن المستقر حيث تعتبره أصل المحوّر الرأسي  $(O, \vec{k})$  موجة نحو الأعلى.

#### 1 – عند التوازن القوى المطبقة على المجموعة

نطبق شرط التوازن في المركز  $G$   
 $Oz$  و  $\bar{P} + \bar{F} = \bar{0}$



$$\bar{P} - k \overrightarrow{G_0 G_{eq}} = \bar{0}$$

$$-(m_1 + m_2)g + k|\Delta\ell| = 0$$

$$|\Delta\ell| = \frac{(m_1 + m_2)g}{K}$$

$$|\Delta\ell| = 1 \text{ cm}$$

المعادلة التفاضلية للحركة :

نطبق العلاقة الأساسية للديناميك على المجموعة

$$\bar{F} + \bar{P} = (m_1 + m_2)\bar{a}$$

$$-k \overrightarrow{G_0 G} + \bar{P} = (m_1 + m_2)\bar{a} \Rightarrow -k(\overrightarrow{G_0 G_{eq}} + \overrightarrow{G_{eq} G}) + \bar{P} = (m_1 + m_2)\bar{a}$$

$$-k \overrightarrow{G_0 G_{eq}} - k \overrightarrow{G_{eq} G} + \bar{P} = (m_1 + m_2)\bar{a}$$

$$\bar{P} - k \overrightarrow{G_0 G_{eq}} = \bar{0}$$

$$-k \overrightarrow{G_{eq} G} = (m_1 + m_2)\bar{a}$$

نسقط هذه العلاقة المتجهية على  $Oz$  :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m_1 + m_2} z = 0 \quad \text{إذن المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة هي :}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{k}} \quad \text{نستنتج الدور الخاص للحركة :}$$

حساب :  $T_0$

$$T_0 = 0,2s$$

#### 2 – المعادلة الزمنية لحركة المجموعة :

حركة G حرقة تذبذبية فمعادلتها الزمنية والتي هي حل للمعادلة التفاضلية السابقة هي :

تحديد الطور عند اللحظة  $t=0$

$$z(0) = Z_m \cos \varphi \Rightarrow 0,2 = Z_m \cos \varphi$$

بالنسبة للسرعة عند اللحظة  $t=0$

$$\dot{z}(t) = -Z_m \frac{2\pi}{T_0} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$t = 0 \Leftrightarrow \dot{z}(0) = -Z_m \frac{2\pi}{T_0} \sin \varphi$$

$$\dot{z}(0) = -1,2 = -Z_m \frac{2\pi}{T_0} \sin \varphi \quad \text{إذن } \dot{z}(0) < 0$$

من المعادلين نستنتج :

$$\begin{cases} 0,2 = Z_m \cos \varphi \\ 1,2 = Z_m 10\pi \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{0,2}{Z_m} = \cos \varphi \\ \frac{1,2}{10\pi Z_m} = \sin \varphi \end{cases}$$

$$\cos \varphi = \frac{0,200}{0,203} \Rightarrow \varphi = 10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{ rad} \quad \text{و بالنسبة ل } Z_m = 0,203m$$

$$z(t) = 0,2 \cos(10\pi t + \frac{\pi}{18})$$

### 3 - اختيار أصل لمعلم كمراجع لطاقة الوضع الثقالية :

نحن بصدد اختيار Oz موجه نحو الأعلى إذن  $E_p(t) = (m_1 + m_2)gz(t) + C$  بما أنه الحالة المرجعية تم اختيارها في المستوى حيث  $z = 0$  فإن  $C = 0$

طاقة الوضع المرننة حسب التعريف  $E_p = \frac{1}{2}ka^2 + Cte$  حيث  $a$  إطالة النابض

بحيث أن  $z - |\Delta\ell| = a$  ونختار حالة مرئية  $z = 0$  إذن  $|\Delta\ell| = z$

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kz^2 - k|\Delta\ell|z \quad \text{عند نشر هذه العلاقة نحصل على } E_p(t) = \frac{1}{2}k(|\Delta\ell| - z)^2 - \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$$

إذن الطاقة الميكانيكية للمجموعة هي :

$$E_m(t) = E_p(t) + E_c(t)$$

طاقة الوضع الكلية للمجموعة و  $E_c(t)$  الطاقة الحرارية للمجموعة .

$$E_m(t) = \frac{1}{2}kz^2 - k|\Delta\ell|z + (m_1 + m_2)gz + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)z^2$$

نعلم أنه عند التوازن  $-\Delta\ell = 0$

$$E_m(t) = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)z^2 \quad \text{إذن } z = 0$$

نستنتج المعادلة التفاضلية للحركة نعلم أن الحركة تتم بدون احتكاك إذن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية

$$\frac{dE_m(t)}{dt} = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{z} + kz = 0$$

$$\ddot{z} = -\frac{k}{(m_1 + m_2)}z$$

$$\ddot{z} + \frac{k}{(m_1 + m_2)}z = 0$$

### 3 – السرعة $V$ التي ستمر بها المجموعة من النقطة 0 لأول مرة.

طبق مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية عند انتقال الجسم من الموضع ذي الأنسوب  $m=0$  و  $z=0$

$$\frac{1}{2}kZ_m^2 + 0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + 0$$

$$V = \sqrt{\frac{kZ_m^2}{m_1 + m_2}} \quad \text{يعني أن } V = 1,2 \text{ m/s} \quad \text{تطبيق عددي}$$

نبين أن المجموعة ممكناً أن تتذبذب بوسع  $Z_i > Z$  دون أن يغادر الجسم الكفة :

طبق القانون الثاني الثاني لنيوتن على الجسم  $S$  الموضع على الكفة  $\bar{a}$

يسقط العلاقة على  $Oz$   $(m_1 + m_2)g + R = (m_1 + m_2)\ddot{z}$  – حسب الدراسة السابقة

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m_1 + m_2}z$$

نعرض  $\ddot{z}$  في العلاقة

$$-(m_1 + m_2)g + R = -(m_1 + m_2)\frac{k}{m_1 + m_2}$$

$$R = (m_1 + m_2)g - kz$$

لكي لا يغادر الجسم الكفة يجب أن تكون  $R > 0$  هذا يعني أن

$$z_i < \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \quad \text{نضع } Z_m = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \quad \text{لكي يبقى الجسم في حركة تذبذب حول 0 يجب}$$

مما يبين أن دراستنا النظرية لا يمكن أن توافق ما هو تجربياً وهذا ما مستطرد إليه في الجزء الثاني

4 – تعبيري  $Z_{max}$  و  $Z_{min}$

طبق انخفاض الطاقة الميكانيكية قبل الانفصال وبعد الانفصال .

$$\text{ بالنسبة للجسم : قبل الانفصال : } E_m = \frac{1}{2}m_1V^2 + 0$$

$$\text{بعد الانفصال : } E'_m = 0 + m_1gz_{max}$$

$$z_{max} = 7,2 \text{ cm} \quad \text{تطبيق عددي } E_m = E'_m \Rightarrow z_{max} = \frac{V^2}{2g}$$

بالنسبة للنابض والكافة

$$\text{مباشرة قبل الانفصال : } E_m = \frac{1}{2}m_2V^2 + 0 + 0$$

$$E'_m = \frac{1}{2} k Z_{\max}^2 + m_2 g Z_{\max}$$

$$E_m = E'_m \Rightarrow Z_{\max}^2 + 2m_2 g Z_{\max} - m_2 V^2 = 0$$

$$Z_m^2 + 4Z_m - 0,29 = 0$$

نحتفظ بالحل الموجب  $Z_{\max} = 0,07m$

### تمرين 5

1 – طبيعة حركة القرص :

طبق العلاقة الأساسية للتحريك على القرص له حركة دوران حول محور يجسده السلك جرد القوى المطبقة على السلك :

وزن القرص ،  $\vec{R}$  تأثير السلك على القرص ، مزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك .

$$\mathcal{M}_C = J_{\Delta} \ddot{\theta} \Rightarrow -C\theta = J_{\Delta} \ddot{\theta} \quad \text{لدينا } \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = 0 \quad \text{أي أن } \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_C = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية التالية :  $0 = \frac{C}{J_{\Delta}} \dot{\theta} + \ddot{\theta}$  خطية حلها جيبي وبالتالي فطبعية

حركة القرص حركة دورانية جيبيه .

$$\text{دورها هو : } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{C}}$$

2 – حساب ثابتة اللي بالنسبة لـ  $T_0 = 0,92s$

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_{\Delta}}{C} \Rightarrow C = \frac{4\pi^2 J_{\Delta}}{T_0^2} = 0,233 \cdot 10^{-2} N.m.rad^{-1}$$

3 – طبيعة حركة النواس الجديد :

طبق العلاقة الأساسية للتحريك على النواس الجديد :

جرد القوى المطبقة على النواس الجديد :

وزن القرص ،  $\vec{R}$  تأثير السلك على القرص ، مزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك (1) ومزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك (2) .

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{C1} + \mathcal{M}_{C2} = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_{C1} + \mathcal{M}_{C2} = J_{\Delta} \ddot{\theta} \quad \text{فإن } \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

$$\mathcal{M}_{C2} = -C_2 \cdot \theta \quad \text{و } \mathcal{M}_{C1} = -C_1 \cdot \theta \quad \text{بحيث أن } C_2 = -C_1$$

حسب المعطيات لدينا أن  $C_1$  تتناسب عكسيًا مع طول السلك ، أي أن  $C_1 = \frac{K}{L-z}$  و  $C_2 = \frac{K}{z}$  أي أن

$$C = \frac{K}{L} \quad \text{ثابتة اللي للسلك الذي طوله } L \text{ كذلك تتناسب عكسيًا مع الطول :}$$

$$-K \left( \frac{1}{L-z} + \frac{1}{z} \right) \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta} \Rightarrow -C_1 \theta - C_2 \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta} \Rightarrow -(C_1 + C_2) \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

لدينا كذلك :  $K = C \cdot L$  أي

$$-C \cdot L \left( \frac{1}{L-z} + \frac{1}{z} \right) \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta} \Rightarrow -\frac{L^2}{z(L-z)} C = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{L^2 \cdot C}{z(L-z) \cdot J_{\Delta}} \theta = 0$$

ب – تعبير الدور :

$$T'_0 = 2\pi \sqrt{\frac{z(L-z)J_\Delta}{L^2 \cdot C}} = \frac{T_0}{L} \sqrt{z(L-z)}$$

حساب  $T'_0$  في حالة  $z = \frac{L}{3}$

$$T'_0 = \frac{T_0}{L} \sqrt{\frac{L}{3} \left( \frac{2L}{3} \right)} = \frac{T_0}{3} \sqrt{2} = 0,43s$$

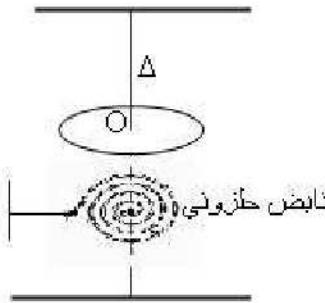
ج - لتبين أن  $T'_0$  تأخذ قيمة قصوية بالنسبة ل  $z = z_{\max}$  حسب المشتقة الأولى ل  $T'_0$  :

$$z = \frac{L}{2} \text{ وبالتالي فإن } T'_0 \text{ تأخذ قيمة قصوية بالنسبة ل } \frac{dT'_0}{dt} = \frac{T_0(L-2z)}{2L\sqrt{z(L-z)}} = 0 \Rightarrow L-2z=0$$

في هذه الحالة تكون  $T'_{0\max} = \frac{T_0}{2} = 0,46s$

## تمرين 6

1 - السرعة الزاوية القصوية للرذاذ :



طاقة الوضع لـ  $E_p = \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$  نختار

حالة مرتجعية الحالة التي يكون فيها النابض غير مشوه ، عند موضع التوازن  $\theta = 0$  يكون النابض غير مشوه  $E_p = 0$  أي أن  $Cte = 0$

$$E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$$

نعلم أن الرذاذ يأخذ سرعة زاوية قصوية عند مروره بموضع توازنه . كما أنه عند حركة النواس هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية أي :  $E_m(\theta) = E_p(\theta) + E_c(\theta)$  بحيث أن  $E_m(\theta) = E_p(\theta) + E_c(\theta)$  الطاقة الميكانيكية عند انطلاق الرذاذ بدون سرعة بدئية  $E_p(\theta) = E_c(\theta) = 0$  يعني أن

$$E_p(\theta) = \frac{1}{2}C\theta_m^2 \quad \text{و} \quad E_c(\theta) = 0 \quad \text{يعني أن}$$

$$(1) E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2$$

$$(2) E_m = \frac{1}{2}J_A\theta_{max}^2 \quad \text{يعني أن} \quad E_c = \frac{1}{2}J_A\dot{\theta}_{max}^2 \quad \text{و} \quad E_p = 0$$

$$\frac{1}{2}C\theta_m^2 = \frac{1}{2}J_A\dot{\theta}_{max}^2 \Rightarrow \dot{\theta}_{max} = \theta_m \sqrt{\frac{C}{J_A}}$$

من العلاقات (1) و(2) نستنتج

$$\dot{\theta}_{max} = 1,66 \text{ rad/s}$$

2 - حساب طاقة الوضع والطاقة الحرارية للنواس

طبق انحفاظ الطاقة الميكانيكية بين موضعين مثلا عند مروره من موضع التوازن وموضع في اللحظة

$$\frac{1}{2} J_A \dot{\theta}_{max}^2 = \frac{1}{2} C \theta^2 + E_c(t) \Rightarrow E_c(t) = \frac{1}{2} C \theta_m^2 - \frac{C \theta_m^2}{8}$$

$$E_c(t) = \frac{3C \theta_m^2}{8}$$

حساب طاقة الوضع :  $E_p = \frac{1}{2} C \theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{C \theta_m^2}{8}$

تطبيق عددي :  $E_p = 0,014 \cdot 10^{-4} J$  و  $E_c = 0,042 \cdot 10^{-4} J$

## تمرين 7

### 1 - أ - نطبق العلاقة الأساسية على الجسم A :

جرد القوى المطبقة على الجسم A :

$\bar{P}$  وزن الجسم A

$\bar{T}$  توتر القضيب

$\bar{R}$  تأثير المحور على القضيب .

$$\mathcal{M}_A(\vec{F}_i) = J_A \ddot{\theta} \quad \text{و بما أن خط تأثير}$$

القوة  $\bar{T}$  والقوة  $\bar{R}$  يتقاطعا مع المحور  $\Delta$  فإن عزمهما

$$\mathcal{M}_A(\bar{P}) = J_A \ddot{\theta} \quad \text{منعدم . أي أن } \ddot{\theta} = 0$$

بحيث أن  $d = l \sin \theta$  إذن  $\mathcal{M}_A(\bar{P}) = -mgd$

$$-mg \ell \sin \theta = J_A \ddot{\theta}$$

ونستنتج المعادلة التفاضلية لحركة الجسم A

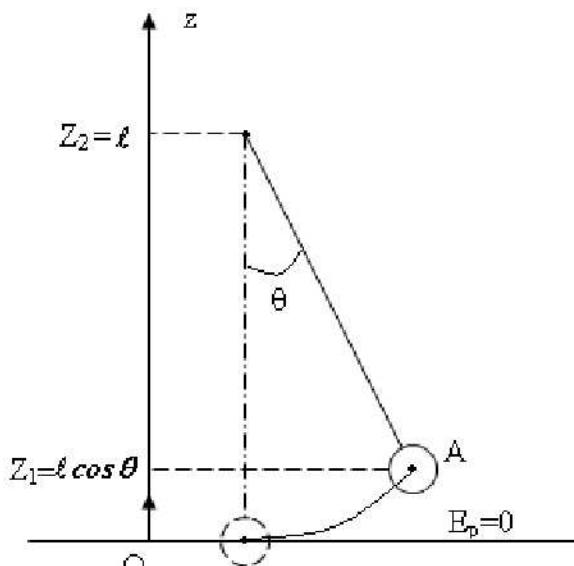
$$\ddot{\theta} + \frac{mg \ell}{J_A} \sin \theta = 0 \quad \text{في حالة التذبذبات ذات الوضع}$$

صغير في هذه الحالة الدور الخاص لا يتعلق بوسع الذبذبات :  $\sin \theta \approx \theta$

وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$\ddot{\theta} + \frac{mg \ell}{m \ell^2} \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

يتبيّن من المعادلة التفاضلية أن حركة A حركة دائرة جيّبة .



ب - تعبير الدور  $T_0$  لهذا النواس :  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$  حساب الدور T :

2 - أ البرهان على أن الطاقة الحرارية للمجموعة تساوي الطاقة الحرارية للقضيب :

$$E_c = E_c(\text{tige}) + E_c(A) + E_c(\text{terre})$$

$$E_c = \frac{1}{2} J'_A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2 + 0$$

نعلم أن كتلة القضيب مهملة بالنسبة لكتلة الجسم إذن فعزم قصوره منعدم في هذه الحالة لأن كتلة

المجموعة مرکزة في الجسم A إذن الطاقة الحرارية للمجموعة :  $E_c = E_c(A)$

$$E_c = \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

**ب - تعبير الطاقة الحركية للمجموعة :**

حسب تعريف طاقة الوضع الثقالية :  $E_p = mgz + cte$  نختار Oz موجة نحو الأعلى أي أن

$$z = 0 \Rightarrow E_p = 0 \Rightarrow cte = 0$$

$$E_p = mg\ell(1 - \cos \theta) \quad \text{في حالة التذبذبات ذات الوضع صغير فإن } \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad \text{وفي هذه الحالة}$$

تكون طاقة الوضع على الشكل التالي :

$$E_p = mg\ell \frac{\theta^2}{2}$$

**د - الطاقة الميكانيكية للمجموعة :**

$$E_m = E_c + E_p$$

بما أننا بصدق حركة تذبذبية حいبية فإن معادلتها الزمنية تكتب على الشكل التالي

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{T_0} \theta_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

نعرض في المعادلة للطاقة الميكانيكية :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgl\theta^2 \\ &= \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \frac{1}{2} mgl\theta_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) \end{aligned}$$

حسب المعادلة التفاضلية عندنا

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} ml^2 \frac{g}{l} \theta_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \frac{1}{2} mgl\theta_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) \\ &= \frac{1}{2} ml\theta_m^2 \left( \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) \right) \end{aligned}$$

$$E_m = \frac{1}{2} ml\theta_m^2$$

نستنتج أن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية نظراً لأن  $E_m = Cte$

**3 - 1 - نطبق مبرهنة الطاقة الحركية بين الوضع المستقر والوضع التي تكون فيه الزاوية قصوية  $\alpha_m$**

$$-\frac{1}{2}mv_A^2 = -mgl(I - \cos\alpha_m)$$

$$mv_A^2 = 2mgl - 2mgl \cos\alpha_m$$

$$\cos\alpha_m = I - \frac{v_A^2}{2gl}$$

$$\text{تطبيق عددي نجد } \alpha_m = \frac{\pi}{3}$$

**أ – السرعة الدنوية التي يجب إعطاؤها للجسم A لكي يصل القضيب إلى وضع توازنه غير المستقر :**

$$\text{وضع التوازن غير المستقر : } v'_A = 2\sqrt{gl} \quad \text{أي أن } \cos\alpha_m = -1 \quad \text{يعني أن } \alpha_m = \pi$$

$$\text{تطبيق عددي } v'_A = 4m/s$$

**ب – حركة القضيب ستكون في هذه الحالة حركة دورية حول المحور } أي مسار الكرة مسار دائري مركزه النقطة التي يمر منها المحور } .**