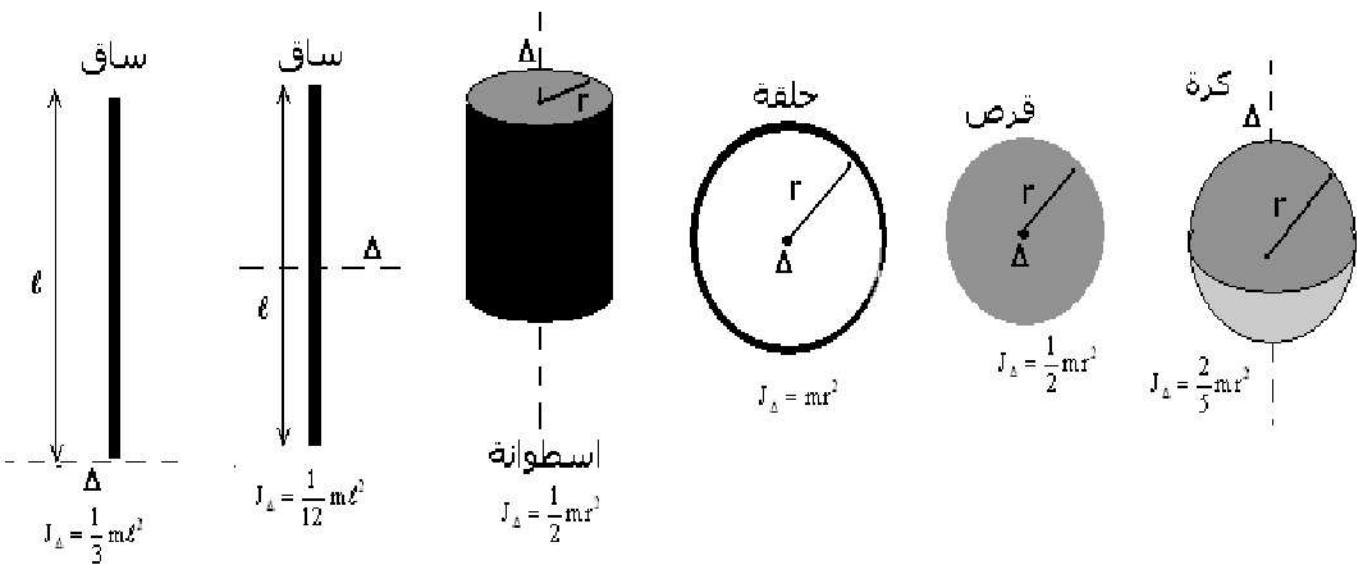
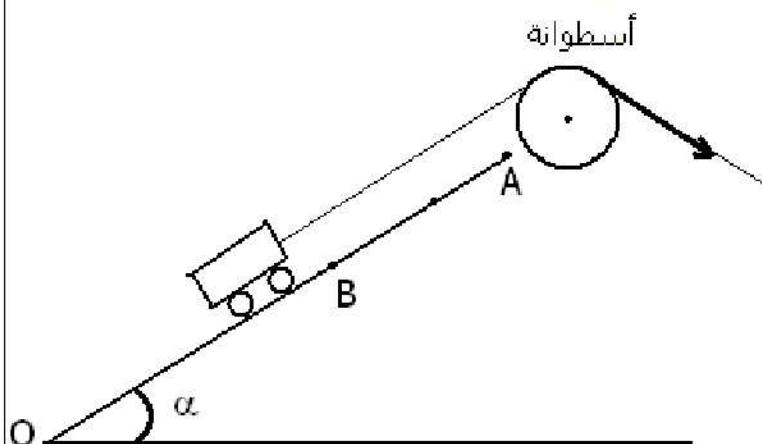


تمارين حول حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

عزم قصور لبعض الأجسام المتجانسة ومختلفة الأشكال .



تمرين 1



$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

نهمل الاحتكاكات ونأخذ $g = 9,8 \text{ m/s}^2$
يتم جر عربة بواسطة خيط غير قابل الامتداد وذي كتلة مهملة ملفوف حول أسطوانة كتلتها $m_c = 250\text{g}$ وشعاعها $r = 6\text{cm}$

الأسطوانة تدور حول محورها الأفقي بواسطة محرك يطبق عليه مزدوجة ذات عزم ثابت M .
العربة توجد فوق مستوى مائل بالزاوية $\alpha = 30^\circ$ بالنسبة للخط الأفقي طوله $OA = 2\text{m}$. كتلة العربة هي $m_s = 400\text{g}$.

- 1 – أحسب شدة قوة الجر لمنج العربة تسارعا $a = 0,5\text{m/s}^2$

- 2 – أكتب المعادلة الزمنية لحركة G مركز قصور العربة علما أن سرعته البدئية منعدمة عند أصل المعلم R.

- 3 – على أي مسافة OB من النقطة O يجب حذف قوة الجر لكي تصير سرعة G منعدمة عند النقطة A؟

- 4 – أحسب J_Δ عزم قصور الأسطوانة ، واستنتج قيمة M.

تمرين 2

نعتبر قرصا في دوران حول محور ثابت Δ ورأسي . عزم قصور القرص $J_\Delta = 6 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$

- 1 – يمثل المنحنى جانبيه مخطط السرعة الزاوية لحركة نقطة M توجد على بعد $r = 0,1\text{m}$ من المحور Δ .

- 1 – ما هي طبيعة حركة M ؟ علل الجواب

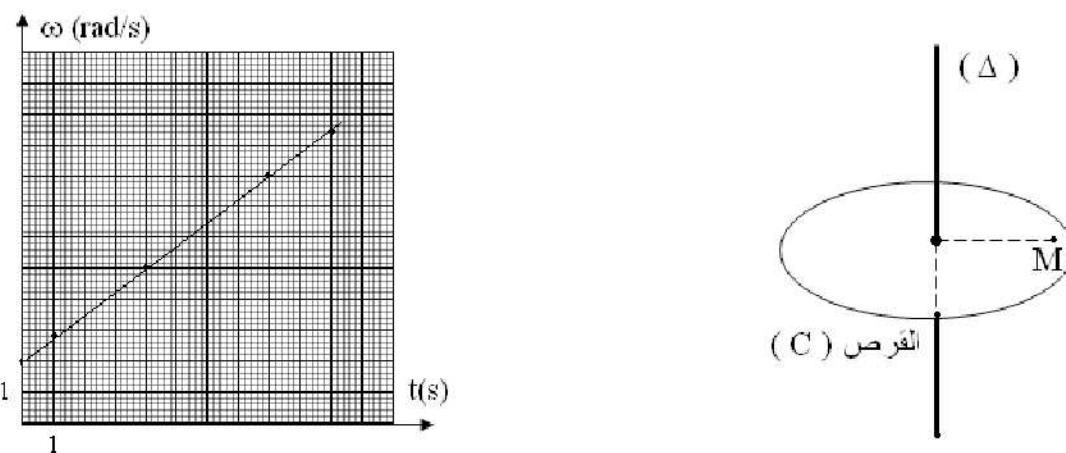
- 1 – 2 حدد قيمة التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ واكتب معادلة السرعة الزاوية $\dot{\theta} = f(t)$

- 2 – علما أن الأقصوال الزاوي منعدم عند أصل التواريخ .

- 2 – اكتب المعادلة الزمنية للحركة $\theta = f(t)$

- 2 – احسب عدد الدورات المنجزة من طرف القرص بين التاريحين $t_1 = 4,0\text{s}$ و $t_2 = 5,2\text{s}$

- 2 - 3 نعتبر اللحظة ذات التاريخ $t=2s$. احسب في هذه اللحظة قيمتي التسارع المماسي a_t والتسارع ألمنظمي a_n للنقطة M واستنتج منظم التسارع θ .
- 3 - احسب مجموع عزم القوى المطبقة على القرص بالنسبة للمحور Δ .



تمرين 3

ينزلق جسم (S) كتلته $m = 70\text{ kg}$ على طول خط أكبر ميل لمستوى مائل بزاوية $30^\circ = \alpha$ بالنسبة للمستوى الأفقي . نجر الجسم بواسطة حبل (C) . خلال حركة جسم (S) على المستوى المائل يطبق هذا الأخير قوى الاحتكاكات تكافئ قوة \bar{F} موازية للمستوى ومنحاها عكس منحى الحركة وشدتها $\frac{1}{10}$ وزن الجسم

$$(\|\bar{f}\| = \frac{1}{10} \|\bar{P}\|)$$

1- خلال المرحلة الأولى, يطبق الحبل على الجسم قوة ثابتة \bar{F} موازية للمستوى المائل , بحيث ينطلق الجسم بدون سرعة بدئية من النقطة A ليصل إلى النقطة B التي تبعد عنها بمسافة 5 m بسرعة $v_B = 5\text{ m/s}$.

خلال المرحلة الثانية وعند النقطة B ، تأخذ القوة \bar{F} قيمة جديدة بحيث تصبح حركة (S) منتظمة على طول المسافة BD حيث $BD=25\text{ m}$.

- أحسب خلال كل مرحلة شدة القوة \bar{F} .

- بعد أنقطع الجسم 30 m ، ما هي طبيعة حركة الجسم ؟ أستنتاج المدة الزمنية التي استغرقها منذ انطلاقه من النقطة A إلى حين رجوعه منها .

- للقيام بهذه التجارب نستعمل الجهاز التالي :

الحبل ملفوف على أسطوانة P . شعاعها $R_1 = 25\text{ cm}$ أسطوانة ثانية P_1 مثبتة على أسطوانة الأولى P

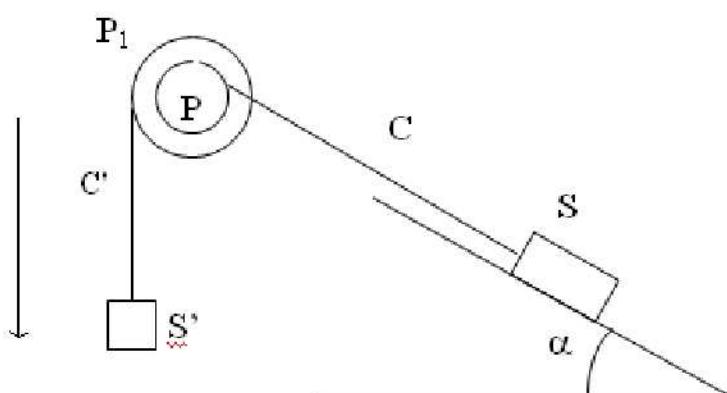
شعاعها $R_2 = 50\text{ cm}$ ، لهما نفس المحور (Δ) . نلف حبل آخر C حيث تب定 في طرفه الحرج (S) له حركة رأسية ويقوم بجر المجموعة نحو الأسفل .

عزم قصور المجموعة (P_1, P, S) $J_4 = 1.375\text{ kg.m}^2$

باعتمادك على المرحلتين اللتين تمت الإشارة إليهما في السؤال (1) . أحسب خلال كل مرحلة :

أ- المسافة المقطوعة من طرف S' .

ب- توتر الحبل C' .



- ج- قيمة الكتلة m_1 وأكتب المعادلة الزمنية لحركة '(S) خلال كل مرحلة .
- 4- أوجد السرعة الزاوية $\dot{\theta}$ للأسطوانة عند انقطاع الجبل C و كذلك أوجد السرعة الزاوية للأسطوانة والسرعة الخطية للجسم 'S عند اللحظة التي يمر فيها الجسم S من النقطة A .

تمرين 4

نعتبر جسماء صلبا (S_1) كتلته $m_1 = 1\text{kg}$ قابل للانزلاق على سكة أفقية . (S_2) مرتبط بجسم (S_2) كتلته m_2 بواسطة خيط غير مدور ، كتلته مهملة ، يمر في مجري بكرة (B) متجانسة شعاعها $r = 4\text{cm}$ قابلة للدوران بدون احتكاك حول محور (Δ) أفقي ثابت يمر من مركزها . خلال الحركة لا ينزلق الخيط على البكرة (B) .

عزم قصور (B) بالنسبة للمحور (Δ) هو J_Δ .

نحرر المجموعة المكونة من من (S_1) و (S_2) و (B) بدون سرعة بدئية عند اللحظة ذات التاريخ $t_0 = 0$.

يمثل المنحنى الممثل في الشكل (2) تغيرات السرعة الزاوية (t) $\dot{\theta}$ للبكرة .

1 – أوجد مبياناً معادلة السرعة الزاوية (t) $\dot{\theta}$.

2 – حدد معللاً جوابك ، طبيعة حركة (B) .

3 – أوجد تعبير n عدد الدورات المنجزة من طرف (B) عند اللحظة t بدلالة الزمن t و $\dot{\theta}$ التسارع الزاوي لحركة (B) . أحسب n عند اللحظة $t = 1,25\text{s}$.

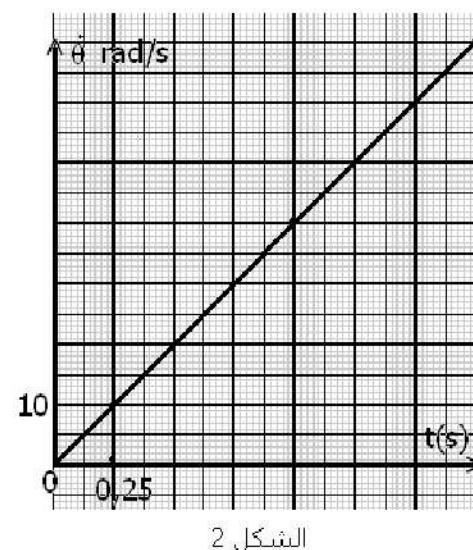
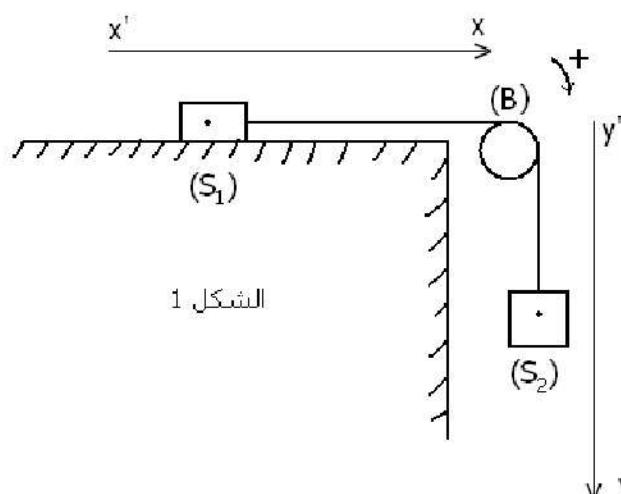
4 – حدد ، معللاً جوابك ، طبيعة حركة كل من (S_1) و (S_2) ، ثم أحسب قيمة تسارعهما a .

5 – يتم التماس بين (S_1) والسكة باحتكاك حيث φ زاوية الاحتكاك . بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على كل من (S_1) و (B) ، بين أن تعبير التسارع a يكتب على الشكل التالي :

$$a = \frac{(m_2 - m_1 k)g}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}}$$

حيث g تسارع الثقالة و $k = \tan \varphi$ معامل الاحتكاك .

6 – بين أن حركة (S_1) لا تتم إلا إذا كانت m_2 كتلة (S_2) أكبر من قيمة يجب تحديدها ز يعطى $k = \tan \varphi = 0,16$



تمرين 5 ***

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g = 10 \text{ m/s}^2$

نعتبر المجموعة (S) الممثلة في الشكل (1) والمكونة من :

- بكرة متاجنة شعاعها $r = 5 \text{ cm}$ ملتحمة

بساق طولها $MN = 2L = 40 \text{ cm}$ يتطابق مركز

قصورها مع المركز G للبكرة . المجموعة

{الساق ، البكرة } قابلة للدوران في المستوى

الرأسي حول محور أفقي Δ ثابت يمر من

المركز G . عزم قصور المجموعة بالنسبة

للمحور Δ هو J_Δ .

- خيط f غير مدود كتلته مهملة ملفوف حول

جري البكرة وثبت أحد طرفيه بجسم صلب S_1

كتلته $m = 0,8 \text{ kg}$ ومركز قصوره G_1 . الجسم

قابل للانزلاق على مستوى مائل بزاوية $\alpha = 30^\circ$ بالنسبة للمستوى

الأفقي وفق الخط الأكبر ميلا .

نعتبر أن الخيط f لا ينزلق على جري البكرة أثناء الحركة .

نحرر المجموعة (S) بدون سرعة بدئية عند لحظة $t = 0$ حيث يكون

منطبقا مع الأصل O للمعلم (O, \vec{i}) . نعلم عند كل لحظة موضع G_1

بالأوصول x .

1 - أوجد اعتمادا على الدراسة التحريرية ، تعبر التسارع a لحركة

الجسم S_1 بدلالة S_1 ، r ، m ، α و g .

2 - يمثل منحنى الشكل (2) تغيرات مربع السرعة للجسم (S) بدلالة x (($v^2 = f(x)$)) .

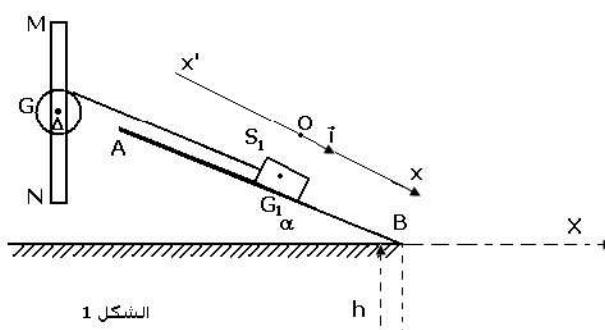
2 - 1 - حدد قيمة a واستنتج قيمة التسارع الزاوي θ للمجموعة {الساق ، البكرة} .

2 - 2 - ينفصل الجسم S_1 عن الخيط لحظة مروره بالنقطة B ذات الأوصول $x_B = 0,8 \text{ m}$ فيسقط عند I على

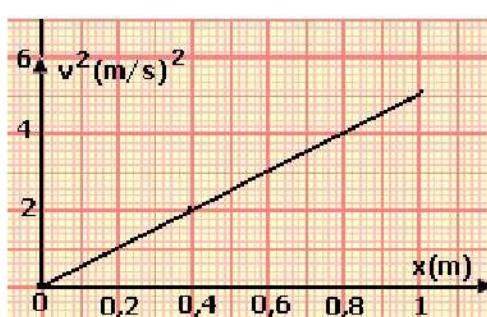
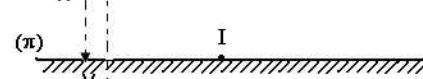
المستوى الأفقي (π) الذي يوجد على مسافة $h = 1 \text{ m}$ من النقطة B .

2 - 2 - 1 - أوجد إحداثي النقطة I في المعلم $(\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{BY})$.

2 - 2 - 2 - أحسب السرعة الخطية للطرف M للساق بعد انفصال الجسم S_1 عن الخيط .

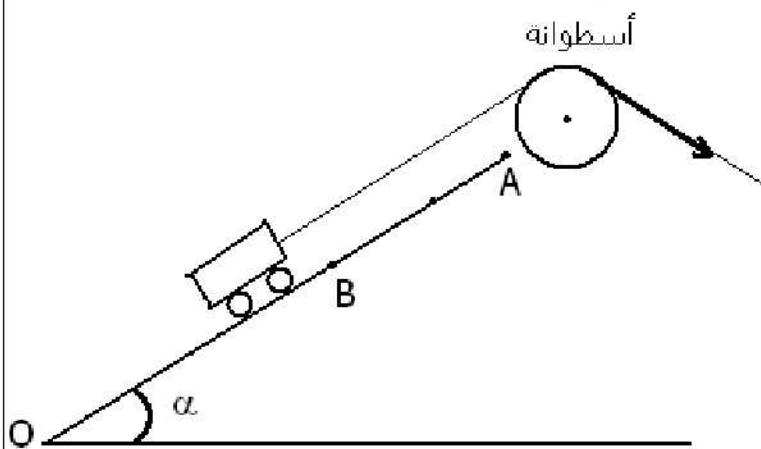


الشكل 1



تصحيح تمارين حول حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

تمرين 1



نهمل الاحتكاكات ونأخذ $g = 9,8 \text{ m/s}^2$
يتم جر عربة بواسطة خيط غير قابل للامتداد وذي كتلة مهملة ملفوف حول أسطوانة كتلتها $r = 6\text{cm}$ وشعاعها $m_c = 250\text{g}$

الأسطوانة تدور حول محورها الأفقي بواسطة محرك يطبق عليه مزدوجة ذات عزم M ثابت .
العربة توجد فوق مستوى مائل بالزاوية $\alpha = 30^\circ$ بالنسبة لخط الأفقي طوله $OA = 2\text{m}$. كتلة العربة هي $m_s = 400\text{g}$

1 - أحسب شدة قوة الجر لمنح العربة تسارعا $a = 0,5\text{m/s}^2$

2 - أكتب المعادلة الزمنية لحركة G مركز قصور العربة علما أن سرعته البدئية منعدمة عند أصل المعلم R .

3 - على أي مسافة OB من النقطة O يجب حذف قوة الجر لكي تصير سرعة G منعدمة عند النقطة A ؟

4 - أحسب J_Δ عزم قصور الأسطوانة ، واستنتج قيمة M .

الجواب :

1 - حساب قوة الجر T :

نختار جسم مرجعي مرتبط بالأرض ومعلم متعامد وممنظم $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ محوره $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ مواز للمستوى المائل وموجه في نفس منحى حركة العربة و $(\bar{j}, \bar{0})$ عمودي على المستوى المائل وموجه نحو الأعلى .

أنظر الشكل

دراسة حركة العربة S :

القوى المطبقة على العربة (S) كمجموعه مدروسة : $\vec{P}_s, \vec{R}_s, \vec{T}$

حسب القانون الثاني لنيوتن لدينا

$$\vec{P}_s + \vec{R}_s + \vec{T} = m_s \vec{a}_G$$

نسقط العلاقة على المحور $(\bar{i}, \bar{0})$ فنجد :

$$P_{sx} + R_{sx} + T_x = m_s \cdot a \quad (a_x = a)$$

$$-m_s g \sin \alpha + T = m_s \cdot a$$

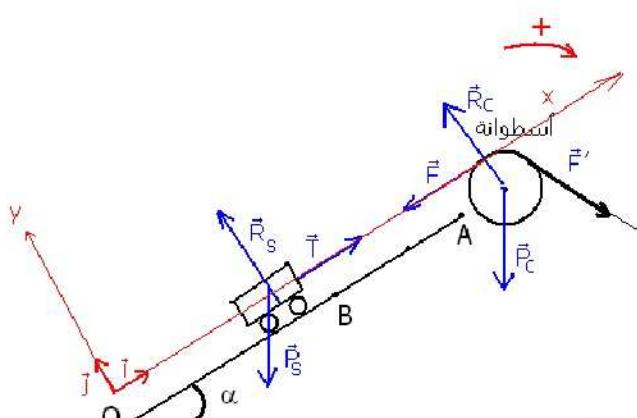
تمكن هذه العلاقة من حساب شدة توتر الخيط T بحيث أن

$$T = m_s a + m_s g \sin \alpha$$

$$T = m_s (a + g \sin \alpha)$$

تطبيق عددي : $T = 2,16\text{N}$

2 - المعادلة الزمنية لحركة G مركز قصور العربة باعتبار أن السرعة البدئية منعدمة عند أصل المعلم :
بما ن التسارع ثابت إذن فحركة مركز قصور العربة مستقيمية متغيرة بانتظام معادلتها الزمنية تكتب على الشكل التالي :



$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

$$x = 0,25t^2$$

3 - المسافة OB التي يجب عندها حذف قوة الجر لكي يصل إلى النقطة A بسرعة منعدمة :
نقسم مسار العربة إلى مرحلتين :

المرحلة الأولى وهي OB حيث أن حركة العربة حركة مستقيمية متغيرة بانتظام : $v = 0,5t$ و $x = 0,25t^2$
عند النقطة B تكون سرعة العربة هي : $v_B = 5t_B$ بحيث أن

$$t_B = \frac{v_B}{0,5} \Rightarrow x_B = OB = 0,25 \times \left(\frac{v_B}{0,5} \right)^2$$

$$v_B^2 = \frac{(0,5)^2}{0,25} \times OB \Rightarrow v_B^2 = OB$$

المرحلة الثانية هي عندما تقطع العربة المسافة BA ، نطبق مبرهنة الطاقة الحركية :

$$\frac{1}{2}m_S v_A^2 - \frac{1}{2}m_S v_B^2 = W_{B \rightarrow A}(\vec{P}_S) + W_{B \rightarrow A}(\vec{R}_S)$$

لدينا حسب المعطيات أن العربة ستتوقف في النقطة A أي أن $v_A = 0$ وأن \vec{R}_S عمودية على متوجه الانتقال أي أن شغلها منعدم . وبالتالي :

$$-\frac{1}{2}m_S v_B^2 = W_{B \rightarrow A}(\vec{P}_S) \Rightarrow v_B^2 = 2gBA \sin \alpha$$

$$OB = 2g(-OB + OA) \sin \alpha$$

$$OB(1 + 2g \sin \alpha) = 2gOA \sin \alpha \Rightarrow OB = \frac{2gOA \sin \alpha}{(1 + 2g \sin \alpha)} = 1,82m$$

4 - عزم قصور الأسطوانة هو :

$$J_\Delta = \frac{1}{2}m_C r^2 = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

لنسننح قيمة M :

دراسة حركة الأسطوانة :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الأسطوانة :

القوى المطبقة على الأسطوانة هي :

$$\vec{T}', \vec{P}_C, \vec{R}_C, M(\vec{F}, \vec{F}')$$

M بحيث أن $a = r\ddot{\theta}$ لكون أن الخيط غير قابل الامتداد وكتلته مهملة . أي أن $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$ وبالتالي فإن

$$M_\Delta = J_\Delta \cdot \frac{a}{r} + T' \cdot r = 0,13 \text{ N.m}$$

تمرين 2

نعتبر قرصا في دوران حول محور ثابت Δ ورأسي . عزم قصور القرص $J_\Delta = 6 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$

1 - يمثل المنحنى جانبه مخطط السرعة الزاوية لحركة نقطة M توجد على بعد $r=0,1m$ من المحور Δ .

1 - ما هي طبيعة حركة M ؟ علل الجواب

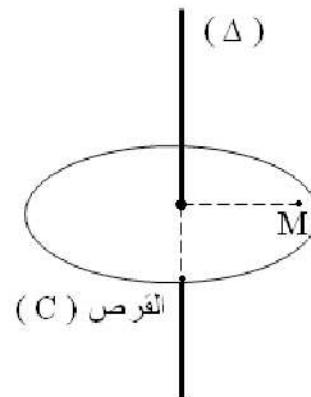
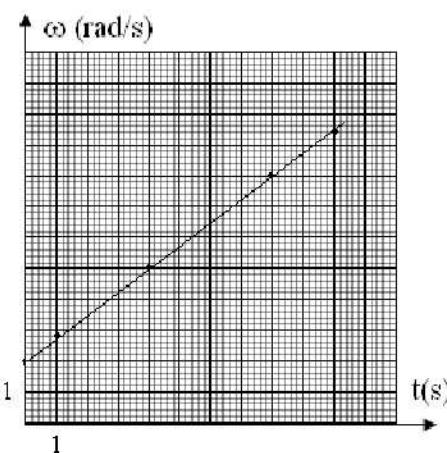
1 - 2 حدد قيمة التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ واكتب معادلة السرعة الزاوية ($\dot{\theta} = f(t)$)

2 - علما أن الأقصوال الزاوي منعدم عند أصل التوازي .

2 - اكتب المعادلة الزمنية للحركة ($\theta = f(t)$)

2 - احسب عدد الدورات المنجزة من طرف القرص بين التاريخين $t_1 = 4,0s$ و $t_2 = 5,2s$

- 2 – 3 نعتبر اللحظة ذات التاريخ $t=2s$. احسب في هذه اللحظة قيمتي التسارع المماسي a_t والتسارع ألمنظمي a_n للنقطة M واستنتج منظم التسارع θ .
- 3 – احسب مجموع عزم القوى المطبقة على القرص بالنسبة للمحور Δ .



الأجوبة :

- 1 – طبيعة حركة M
النقطة M حركة دائرية متغيرة بانتظام
- 2 – قيمة التسارع الزاوي

$$\ddot{\theta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0,75 \text{ rad/s}^2$$

$$\omega(t) = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$$

$$\omega(t) = 0,75t + 2 \text{ (rad/s)}$$

- 2 – المعادلة الزمنية للحركة M (rad)

- 2 – عدد الدورات القرص بين اللحظتين t_1 و t_2

$$n = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{4\pi(t_2 - t_1)} \text{ أي أن } n =$$

- 3 – قيمتي التسارع المماس والتسارع ألمنظمي

$$a_t = r\ddot{\theta} \Rightarrow a_t = 75 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}^2$$

$$a_n = r\dot{\theta}^2 \Rightarrow a_n = 1,225 \text{ rad/s}^2$$

منظم متوجه التسارع هو

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

$$a = 1,227 \text{ rad/s}^2$$

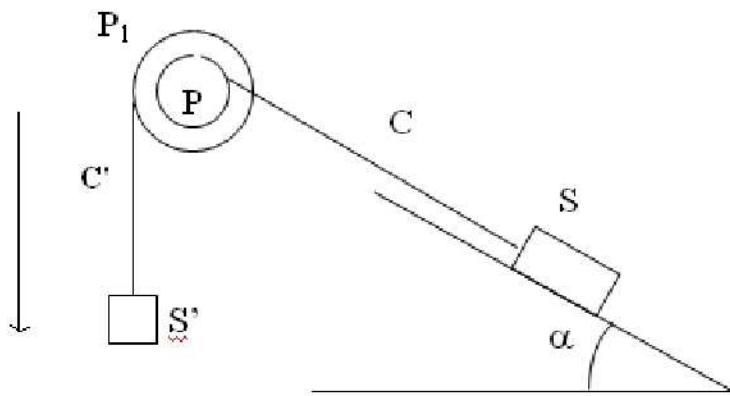
- 3 – مجموع عزم القوى المطبقة على القرص بالنسبة للمحور Δ

$$\sum M_{\Delta}(F) = J_{\Delta}\ddot{\theta}$$

$$= 45 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}$$

تمرين 3

ينزلق جسم (S) كتلته $m = 70 \text{ kg}$ على طول خط أكبر ميل لمستوى مائل بزاوية $30^\circ = \alpha$ بالنسبة للمستوى الأفقي . نجر الجسم بواسطة حبل (C) . خلال حركة جسم (S) على المستوى المائل يطبق هذا



الأخير قوى الاحتكاك تكافئ قوة \vec{f} موازية للمستوى ومنها عكس منحى الحركة وشدتها $\frac{1}{10}$ وزن الجسم ($\|\vec{f}\| = \frac{1}{10} \|\vec{P}\|$)

1- خلال المرحلة الأولى، يطبق الجبل على الجسم قوة ثابتة \vec{F} موازية للمستوى المائل، بحيث ينطلق الجسم بدون سرعة بدئية من النقطة A ليصل إلى النقطة B التي تبعد عنها بمسافة 5m بسرعة $v_B = 5m/s$.

خلال المرحلة الثانية وعند النقطة B، تأخذ القوة \vec{F} قيمة جديدة بحيث تصبح حركة (S) منتظمة على طول المسافة BD حيث $BD = 25m$.

أحسب خلال كل مرحلة شدة القوة \vec{F} .

2- بعد أن قطع الجسم 30 m، ينقطع الجبل. ما هي طبيعة حركة الجسم؟ أستنتج المدة الزمنية التي استغرقها منذ انطلاقه من النقطة A إلى حين رجوعه منها.

3- لليقاب بهذه التجارب نستعمل الجهاز التالي: الجبل ملفوف على أسطوانة P. شعاعها $R = 25cm$ مثبتة على أسطوانة الأولى P_1 الجبل ملفوف على أسطوانة P. شعاعها $R_1 = 50cm$ ، لهما نفس المحور (Δ). وشعاعها $50cm$ للف جبل آخر C حيث تبى في طرفه الحر جسما (S') له حركة رأسية ويقوم بجر المجموعة نحو الأسفل.

عزم قصور المجموعة (P_1, P) $J_4 = 1.375 kg.m^2$

ياعتمد على المرحلتين اللتين تمت الإشارة إليهما في السؤال (1). أحسب خلال كل مرحلة:
أ- المسافة المقطوعة من طرف S' .

ب- توتر الجبل C' .

ج- قيمة الكتلة m_1

وأكتب المعادلة الزمنية لحركة (S) خلال كل مرحلة.

4- أوجد السرعة الزاوية θ للأسطوانة عند انقطاع الجبل C و كذلك أوجد السرعة الزاوية للأسطوانة والسرعة الخطية للجسم S' عند اللحظة التي يمر فيها الجسم S من النقطة A .

الجواب :

1 - في المرحلة الأولى :

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية في المرحلة الأولى :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = F\ell - \frac{mg}{10}\ell - mg\ell \sin \alpha$$

$$F = \frac{mv_B^2}{2\ell} + \frac{mg}{10} + mg \sin \alpha$$

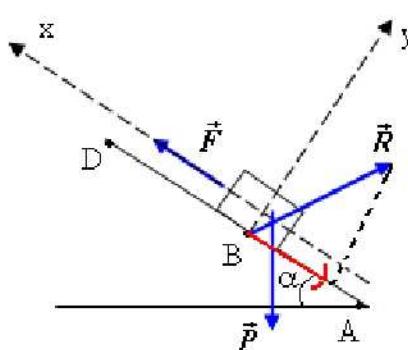
$$F = 595N$$

المرحلة الثانية $a=0$ حسب مبدأ القصور :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} + \vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$$

نسقط العلاقة على (O, \vec{i})

$$F = 420N \quad \text{تطبيق عددي} \quad F = mg \sin \alpha + \frac{mg}{10}$$



2 - عند انقطاع الحبل :

طبق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}'$

$$a' = -g(\sin \alpha + \frac{1}{10}) \Rightarrow a' = -6m/s^2 \quad \text{الاسقاط على } (O, \vec{i})$$

طبيعة الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام
المدة الزمنية المستغرقة من انطلاق الجسم من النقطة A إلى حين الرجوع إليها .

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$

$$\Delta V = a \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta V}{a} = t_1 \quad \text{المدة المستغرقة لقطع المسافة AB}$$

$$t_1 = 2s \quad \text{إذن}$$

$$\Delta x = V_B t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{BD}{V_B} = 5s \quad \text{المدة الزمنية المستغرقة خلال المرحلة التي انقطع فيها الحبل :}$$

$$t_3$$

بما أن الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام وهي متباطئة ،

$$\Delta v = a' \Delta t \Rightarrow \Delta t = -\frac{v_B}{a'} = 0,83s$$

$$DE = \frac{1}{2} a' t^2 + v_B t = 2,08m \quad \text{والمسافة التي يقطعها الجسم هي :}$$

المدة الزمنية المستغرقة خلال مرحلة الرجوع
حساب التسارع :

$$mg \sin \alpha - \frac{mg}{10} = ma'' \Rightarrow a'' = g(\sin \alpha - 0,1) = 3,92m/s^2$$

$$EA = \frac{1}{2} a'' t^2 \Rightarrow t_4 = \sqrt{\frac{2EA}{a''}} = 4,04s \quad \text{نعتبر أن أصل المعلم هو E وأصل التواريخ كذلك :}$$

$$t = 11,87s \quad \text{إذن}$$

3 - الدراسة التحرسية

حساب المسافة المقطوعة خلال المرحلتين السابقتين :

العلاقة بين X و Z بحيث أن X هو موضع الجسم في لحظة t و Z هو موضع الجسم S في نفس اللحظة t
نعتبر أنه في نفس اللحظة t أن الأفصول الزاوي للأسطوانة هو θ . نعتبر أن الحبل غير قابل الانزلاق على

$$\text{الأسطوانة } R\theta \text{ و } z = R\theta \text{ أي أن } \frac{x}{R} = \frac{z}{R_1} \text{ وبما أن } R_1 = 2R \text{ نستنتج من هذه العلاقة } z = 2x$$

* في المرحلة الأولى $x = AB = 5m$ وبما أن $z = 10m$ فإن

* في المرحلة الثانية $x = BD = 25m$ وبما أن $z = 50m$ فإن

حساب التوتر T_1

طبق القانون الثاني لنيوتن على S لحساب التسارع في المرحلة الأولى نستعمل معطيات السؤال (1) :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$$

الاسقاط على (O, \vec{i})

$$F - mg \sin \alpha - f = ma \Rightarrow a = \frac{F - mg \sin \alpha - f}{m}$$

$$a = 2,5m/s^2$$

دراسة المجموعة في الحالة الجديدة :

نطبق القانون الثاني لنيوتن في الحالة الجديدة على الجسم (S) :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$$

$$(1) \quad T = mg \sin \alpha + \frac{mg}{10} + ma \quad (O, \vec{i})$$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة

$$(2) \quad T_1 R_1 - TR = J_A \ddot{\theta}$$

نطبق القانون الثاني لنيوتن على S'

من العلاقة (1) والعلاقة (2) نستنتج

$$T_1 = \frac{J_A a}{R R_1} + T \frac{R}{R_1} \text{ et } T = F \Rightarrow T_1 = \frac{J_A a}{R R_1} + F \frac{R}{R_1}$$

في المرحلة الأولى : $T_1 = 325N$

في المرحلة الثانية $a=0$: $T_1 = 210N$

حساب الكتلة في المرحلتين : نطبق العلاقة (3)

$$T_1 = m_1(g - a_1)$$

$$z = 2x \Leftrightarrow \dot{z} = 2\dot{x}$$

$$a_1 = 2a$$

$$m_1 = \frac{T_1}{g - 2a} \quad \text{أي أن } T_1 = m_1(g - 2a)$$

في المرحلة الأولى : $m_1 = 65g$

في المرحلة الثانية $m_1 = 21g$ الكتلة التي يجب أن يأخذها الجسم

S' للحصول على حركة بالمواصفات المذكورة في المرحلة 2

المعادلات الزمنية :

$$z = 2,5t^2$$

$$z = 10t + 10$$

4 - عندما يقطع الحبل.

$$x = R\theta \Leftrightarrow \dot{x} = R\dot{\theta} \quad \text{السرعة الزاوية للأسطوانة :}$$

$$\dot{\theta} = \frac{V_D}{R}$$

$$\dot{\theta} = 20 \text{ rad / s}$$

لحساب السرعة الزاوية للأسطوانة والسرعة الخطية للجسم S' :

- حسب المدة الزمنية المستغرقة من طرف S لمورده من A

عندما يقطع الحبل : $t = 4,87s$ أنظر السؤال 2

الدراسة الديناميكية للمجموعة { أسطوانة + جسم S' } عند انقطاع الحبل

$$\vec{P} + \vec{T} = m_1 \vec{a} \quad S' =$$

$$P - T = m_1 a_2 \quad Oz$$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة : $T' \cdot R_1 = J_A \ddot{\theta}'$

$T' = T$ نستنتج

$$(m_1 g - m_1 R_1 \ddot{\theta}') R_1 = J_A \ddot{\theta}'$$

$$\ddot{\theta}' = \frac{m_1 g R_1}{m_1 R_1 + J_A} \Rightarrow \ddot{\theta}' = 15,85 \text{ rad / s}^2$$

حركة البكرة حركة دورية متغيرة بانتظام عند اللحظة $t=3,95s$ السرعة الزاوية للأسطوانة هي

$$\dot{\theta} = 15,85t + 20 \Rightarrow \dot{\theta} = 97,2 \text{ rad / s}$$

وسرعة الجسم' S' هي $V = R_1 \dot{\theta} \Rightarrow V = 48,6 \text{ m/s}$

تمرين 4

نعتبر جسمًا صلبا (S_1) كتلته $m_1 = 1 \text{ kg}$ قابل للانزلاق على سكة أفقية. (S_2) مرتبط بجسم (S_2) كتلته m_2 بواسطة خيط غير ممدد، كتلته مهملة، يمر في مجري بكرة (B) متاجسة شعاعها $r = 4 \text{ cm}$ قابلة للدوران بدون احتكاك حول محور (Δ) أفقي ثابت يمر من مركزها. خلال الحركة لا ينزلق الخيط على البكرة (B) .

عزم قصور (B) بالنسبة للمحور (Δ) هو J_Δ .

نحرر المجموعة المكونة من من (S_1) و (S_2) و (B) بدون سرعة بدئية عند اللحظة ذات التاريخ $t_0 = 0$. يمثل المنحنى الممثل في الشكل (2) تغيرات السرعة الزاوية (t) للبكرة.

1 - أوجد مبيانياً معادلة السرعة الزاوية (t) .

2 - حدد معللاً جوابك، طبيعة حركة (B) .

3 - أوجد تعبير n عدد الدورات المنجزة من طرف (B) عند اللحظة t بدلالة الزمن t و التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ لحركة (B) . أحسب n عند اللحظة $t = 1,25 \text{ s}$.

4 - حدد، معللاً جوابك، طبيعة حركة كل من (S_1) و (S_2) ، ثم أحسب قيمة تسارعهما a .

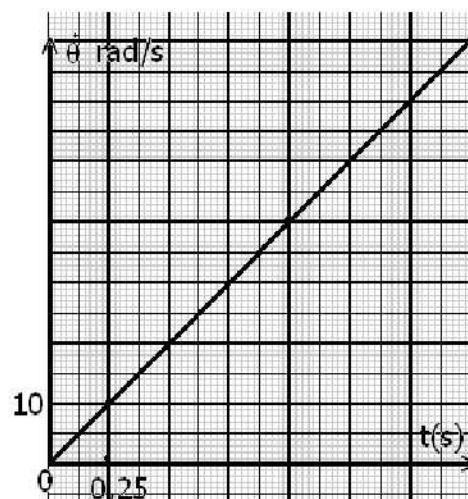
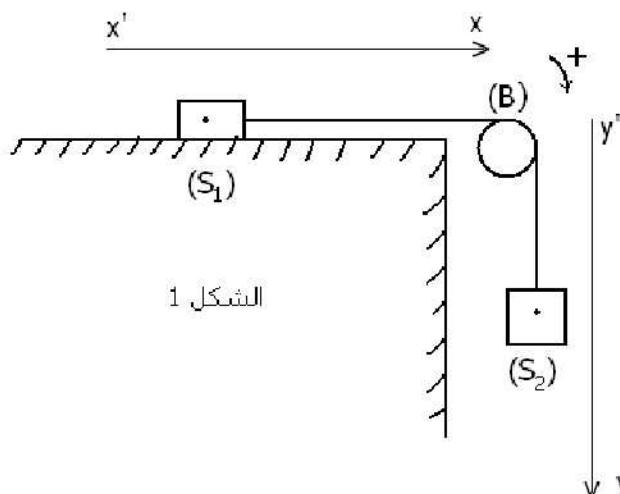
5 - يتم التماس بين (S_1) والسكة باحتكاك حيث φ زاوية الاحتكاك. بتطبيق القانون الثاني لنيوتون على كل من (S_1) و (S_2) و العلاقة الأساسية للتحريك على (B) ، بين أن تعبير التسارع a يكتب على الشكل التالي

$$a = \frac{(m_2 - m_1 \cdot k)g}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}}$$

حيث g تسارع الثقالة و $k = \tan \varphi$ معامل الاحتكاك.

6 - بين أن حركة (S_1) لا تتم إلا إذا كانت m_2 كتلة (S_2) أكبر من قيمة يجب تحديدها. نعطي

$$k = \tan \varphi = 0,16$$



الشكل 2

الجواب :

١ - إيجاد مبيانيا السرعة الزاوية ($\dot{\theta}$) :

من خلال المبيان يتبيّن أن $(t)^{\theta}$ هي دالة خطية تمر من أصل المعلم معاملها الموجّه هو :

$\dot{\theta}(t) = 40t$ وبالتالي فالمعادلة تكتب على الشكل التالي :

2 - طبيعة حركة (B)

السرعة الزاوية عبارة عن دالة خطية على شكل $\frac{d\theta}{dt} = 40 \text{ rad/s}^2 = cte$ أي أن $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}t + c$ وبالتالي فحركة البكرة : حركة دورانية متغيرة بانتظام تقاربها الزاوي $\dot{\theta} = 40 \text{ rad/s}^2$.

3 – تعبير n عدد الدورات البدنية عند اللحظة t :
بما أن الحركة دورانية متغيرة بانتظام فإن معادلتها الزمنية تك

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \ddot{\theta} t^2 \Rightarrow \theta(t) = 20t^2$$

ونعلم أن عدد الدورات خلال اللحظة t هو :

$$n = \frac{20t^2}{2\pi} = \frac{10t^2}{\pi} : \text{أي أن}$$

عند $t = 1,25s$ يكون عدد الدورات هو :

4 – طبيعة كل من S_1 و S_2 :

بما أن الخط لا ينزلق على البكرة وغير مدد فإن المسافة x_1 التي ينتقل بها الجسم S_1 على (\bar{O}, \bar{i}) هي نفس المسافة y_1 التي سيتقل بها الجسم S_2 على المحور (\bar{O}, \bar{j}) ونفس طول القوس s_B الذي ستنتقل به نقطة على مجرب البكرة أي أن $s_B = y_1 = x_1$ ولدينا $s_B = r\theta$ أي أن

به نقطة على مجرى الكرة أي أن $s_B = r\theta$ ولدينا أي أن $x_1 = y_1 = s_B$

$$x_1 = y_1 = r\theta \Rightarrow v_1 = v_2 = r\dot{\theta} \Rightarrow a_1 = a_2 = r\ddot{\theta}$$

نستنتج أن S_2 و S_1

هي حركة مستقيمية متغيرة بانتظام .

$$a = r\ddot{\theta} = 1,6 \text{m} / \text{s}^2$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1 \cdot k)g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} : \text{لثبت العلاقة التالية} \quad 5$$

نطبق القانون الثاني لنيوتن على كل من S_1 و S_2 :

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m\vec{a} : S_1 \text{ على}$$

نقط العلاقه على (j) :

$$m_2 g - T_2 = m_2 a \Rightarrow T_2 = m_2 g - m_2 a$$

$$\vec{P}_2 + \vec{R} + \vec{T}_2 = m_1 \cdot \vec{a} \quad \text{على}$$

الإسقاط على (O, \vec{i})

$$-f + T_2 = m_2 a$$

$$R_N - m_1 g = 0 \Rightarrow R_N = m_1 g : (O, \vec{j}) \text{ على}$$

$$k = \tan \varphi = \frac{f}{R_N} \Rightarrow f = m_1 g k$$

$$T_2 = km_1 g + m_1 a$$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على B

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_1) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_2) = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow -T_1 r + T_2 r = J_\Delta \cdot \frac{a}{r}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{J_\Delta}{r^2}$$

نعرض T_1 و T_2 بتعبيريهما المحصل عليه سابقاً :

$$a \left(m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2} \right) = m_2 g - km_1 g \Rightarrow a = \frac{g(m_2 - km_1)}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}}$$

لكي تتم حركة S_1 يجب أن يكون التسارع $a > 0$ أي أن

$$a = \frac{g(m_2 - km_1)}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}} > 0 \Rightarrow m_2 - km_1 > 0$$

$$m_2 > km_1 \Rightarrow m_2 > 0.16 kg$$

تمرين 5

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g = 10 m/s^2$

نعتبر المجموعة (S) الممثلة في الشكل (1)

والمكونة من :

- بكرة متاجسة شعاعها $r = 5 cm$ ملتحمة
بساق طولها $MN = 2L = 40 cm$ يتطابق مركز
قصورها مع المركز G للبكرة . المجموعة
{الساق ، البكرة } قابلة للدوران في المستوى
الرأسى حول محور أفقى Δ ثابت يمر من
المركز G . عزم قصور المجموعة بالنسبة
للمحور Δ هو J_Δ .

- خيط f غير مدد كتلته مهملة ملفوف حول

جري البكرة وثبت أحد طرفيه بجسم صلب S_1 كتلته $m = 0.8 kg$ ومركز قصورة G_1 . الجسم S_1 قابل للانزلاق
على مستوى مائل بزاوية $\alpha = 30^\circ$ بالنسبة لمستوى الأفقى وفق
الخط الأكبر ميلاً .

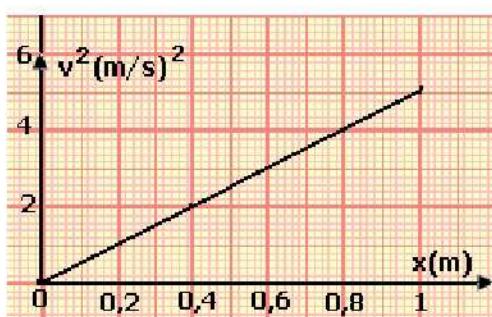
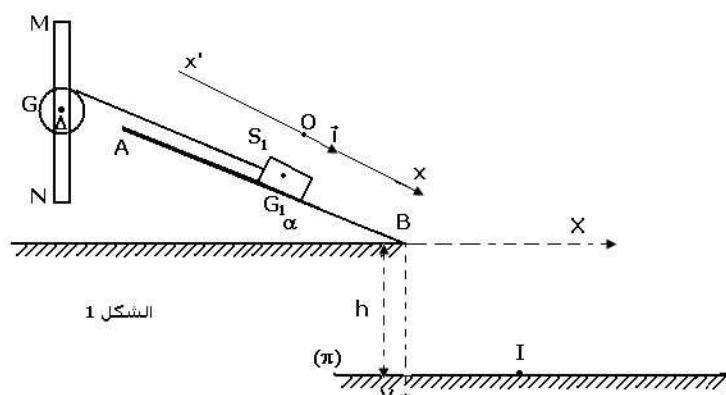
نعتبر أن الخيط f لا ينزلق على جري البكرة أثناء الحركة .
نحرر المجموعة (S) بدون سرعة بدئية عند لحظة $t = 0$ حيث يكون
 G_1 منطبقاً مع الأصل O للمعلم (\bar{O}, \bar{i}) . نعلم عند كل لحظة
موضع G_1 بدلالة x .

1 - أوجد اعتماداً على الدراسة التحريرية ، تعبر التسارع a لحركة
الجسم S_1 بدلالة x ، r ، m ، α و g .

2 - يمثل منحنى الشكل (2) تغيرات مربع السرعة للجسم (S) بدلالة x ($v^2 = f(x)$) .

2 - 1 حدد قيمة a واستنتج قيمة التسارع الزاوي $\dot{\theta}$ للمجموعة {الساق ، البكرة} .

2 - 2 ينفصل الجسم S_1 عن الخيط لحظة مروره بالنقطة B ذات الأصول $x_B = 0.8 m$ فيسقط عند I على
المستوى الأفقى (π) الذي يوجد على مسافة $h = 1 m$ من النقطة B .



- 2 - 1 - أوجد إحداثي النقطة I في المعلم $(\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{BY})$.
 2 - 2 - أحسب السرعة الخطية للطرف M للساقي بعد انفصال الجسم S_1 عن الخيط.

الجواب :

الدراسة التحريرية للجسم (S_1) :

المجموعة المدرستة : الجسم (S_1)

المعلم : مرتبط بالأرض ويعتبر غاليليا

جرد القوى : وزن الجسم \vec{P}_1 ، تأثير السطح \vec{R} ، تأثير الخيط (f) .

تطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \vec{F}_{ext} = m_1 \cdot \vec{a}$ و منه :

$$\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T} = m_1 \cdot \vec{a}$$

إسقاط العلاقة المتجهية على المحور $(O; \vec{i})$ نحصل

على : $m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha - T = m_1 \cdot a$ وبالتالي :

$$(1) \quad T = m_1 g \sin \alpha - m_1 a$$

طبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة :

المجموعة المدرستة : البكرة

المعلم : مرتبط بالأرض ويعتبر غاليليا

جرد القوى : وزن البكرة \vec{P}' ، تأثير محور الدوران \vec{R}' ،

تأثير الخيط (f') .

$$M_{\Delta}(\vec{P}') = M_{\Delta}(\vec{R}') = 0 \text{ مع } M_{\Delta}(\vec{P}') + M_{\Delta}(\vec{R}') + M_{\Delta}(\vec{T}') = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta} \quad (2) \quad \sum M_{\Delta}(\vec{F}_{app}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

و بالتالي نحصل على المعادلة التالية :

بما أن الخيط غير مددود و كتلته مهملة فإن : $T' = T$ و من جهة أخرى لا ينزلق على مجرب البكرة فإن :

$$a = g \cdot \frac{m \cdot \sin \alpha}{m + \frac{J_{\Delta}}{r^2}} \quad \text{و منه : } \ddot{\theta} = \frac{a}{r} \quad \theta = \frac{x}{r}$$

2 - 1 - من خلال المبيان يتبيّن أن $V^2 = f(x)$ دالة خطية معادلتها : $v^2 = b \cdot x$ مع a يمثل المعامل الموجي

للمنحنى ، نحصل باشتراك هذه المعادلة بالنسبة للزمن على : $\frac{dv}{dt} = b \cdot v$. $2 \cdot v$. $2 \cdot v$ و منه :

$$a = \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta(v^2)}{\Delta(x)} = 2.5 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\text{حساب التسارع الزاوي للمجموعة : } \ddot{\theta} = \frac{a}{r} = \frac{2.5}{5 \cdot 10^{-2}} = 50 \text{ rad.s}^{-2}$$

2 - 1 - 2 - إحداثي النقطة I :

حساب السرعة v_B

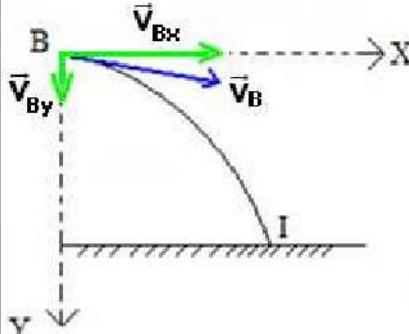
باستعمال المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$ و $v(t)$ عند انتقال الجسم من A إلى B ، وإقصاء الزمن بينهما :

$$x_B - x_A = \frac{1}{2} a t^2$$

$$v_B - v_A = at$$

$$V_B = \sqrt{2 \cdot a \cdot x_B} = 2 \text{ m.s}^{-1}$$

المعادلتين الزمنيتين :



$$t = \frac{x}{V_B \cdot \cos(\alpha)}$$

بعد إقصاء الزمن

$$\left\{ \begin{array}{l} x = V_B \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + V_B \cdot \sin(\alpha) \cdot t \end{array} \right.$$

نحصل على معادلة المسار

$y_I = h = \frac{g}{2V_B^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x_I^2 + \tan(\alpha) \cdot x_I$ و منه : $y = \frac{g}{2V_B^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x$

معادلة من الدرجة الثانية : $\frac{g}{2V_B^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x_I^2 + \tan(\alpha) \cdot x_I - h = 0$ التي يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$x_I = 0.62m \text{ و أحد حلولها } 1.66 \cdot x_I + 0.577 \cdot x_I - 1 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_I = 0.62m \\ y_I = 1m \end{array} \right\} \text{إحداثياتي النقطة } I$$

2 - 2 - 2 - السرعة الخطية للطرف M بعد انفصال الجسم :

$$\frac{V_B}{r} = \frac{V_M}{L} \text{ و التعويض نجد : } \dot{\theta}_B = \dot{\theta}_M$$

$$\boxed{V_M = V_B \frac{L}{r} = 8 \text{ m.s}^{-1}} \text{ و بالتالي :}$$